

# Analiza strujanja u modelu ispusta plinskih turbina pri velikoj cirkularnoj komponenti brzine

---

Ćulić, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:144167>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Luka Čulić**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:  
Dr. sc. Severino Krizmanić, dipl. ing.

Student:  
Luka Čulić

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se dr. sc. Severinu Krizmaniću na svesrdnoj pomoći pri izradi ovog rada.

Luka Ćulić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Ćulić**

Mat. br.: 0035191701

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza strujanja u modelu ispusta plinskih turbina pri velikoj cirkularnoj komponenti brzine**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of fluid flow in gas turbine EGH model subjected to large circular component of velocity**

Opis zadatka:

Uslijed rastućeg udjela obnovljivih izvora u proizvodnji električne energije, postojeća postrojenja s plinskim turbinama izložena su oštrim uvjetima u pogledu raspona izlazne snage. Slijedom toga, kod većine instaliranih jedinica se događaju znatna oštećenja ispušnih dijelova zbog čestog i dugotrajnog rada u režimima s manjom izlaznom snagom. Kao dominantan uzročnik ovih oštećenja pojavljuje se nepovoljan kut nastrojavanja ispušnih plinova na aerodinamički oblikovanu zaštitu nosača kućišta ispušnog dijela turbine. U cilju iznalaženja ekonomski isplativog rješenja za postojeće i buduće plinske turbine, proizvođači još uvijek pribjegavaju raznolikim rješenjima što govori da najefikasnije rješenje još uvijek nije pronađeno.

Cilj ovog rada jest istražiti strujne pojave pri opstrujavanju modela rijetke statorske rešetke kakva se nalazi u ispušnim dijelovima stacionarnih plinskih turbina pri različitim iznosima cirkularne komponente brzine.

U radu je potrebno pomoću dostupnog CAD alata izraditi model statorske rešetke, te uz primjenu metoda Računalne dinamike fluida obaviti proračune strujanja kroz rešetku pri različitim kutovima nastrojavanja, te dati osvrt na dobivene rezultate.

Pisani dio završnog rada treba sadržavati sljedeća poglavlja:

1. Uvod,
2. Opis problema i metoda primijenjenih za njihovo rješavanje,
3. Prikaz dobivenih rješenja i osvrt na rješenja,
4. Zaključak.

U radu je potrebno navesti popis korištene literature i zahvalu na pomoći pri izradi rada.

Zadatak zadan:

25. studenog 2015.

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016
2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.
3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.
3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc.  Severino Krizmanić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

# Sadržaj

Sadržaj . . . . .	II
Popis slika . . . . .	IV
Popis tablica . . . . .	V
Popis oznaka . . . . .	VI
Sažetak . . . . .	VIII
Summary . . . . .	IX
1 Uvod. . . . .	1
2 Teorijske osnove . . . . .	2
2.1 Osnovne jednačbe dinamike fluida . . . . .	2
2.1.1 Zakon očuvanja mase . . . . .	2
2.1.2 Zakon očuvanja količine gibanja . . . . .	2
2.2 Turbulencija . . . . .	3
2.2.1 Statističko opisivanje turbulencije . . . . .	5
2.2.2 Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju . . . . .	6
2.2.3 Disipacija energije . . . . .	8
2.2.4 Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednačbe . . . . .	9
2.2.5 Modeli turbulencije . . . . .	10
2.2.6 $k - \omega$ Shear Stress Transport model turbulencije . . . . .	11
3 Numeričko rješavanje problema mehanike fluida . . . . .	13
3.1 Idealizacija ili matematičko modeliranje . . . . .	13
3.2 Diskretizacija matematičkog modela . . . . .	14

---

3.3	Metoda konačnih volumena . . . . .	15
3.3.1	Shema prvog reda točnosti . . . . .	19
3.3.2	Shema drugog reda točnosti . . . . .	20
3.4	Računalna dinamika fluida . . . . .	20
3.4.1	Postupak provođenja računalne simulacije . . . . .	21
4	Modeliranje geometrije i diskretizacija prostora . . . . .	22
4.1	Plinske turbine . . . . .	22
4.2	Geometrija . . . . .	24
4.3	Mreža konačnih volumena . . . . .	25
4.4	Proračun strujanja . . . . .	26
5	Rezultati . . . . .	31
6	Zaključak . . . . .	40
	LITERATURA. . . . .	41
	PRILOZI. . . . .	42

## Popis slika

1.1	Presjek turbine . . . . .	1
2.1	Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče . . . . .	5
3.1	Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda . . . . .	13
3.2	Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena . . . . .	16
3.3	Numerička shema prvog reda točnosti . . . . .	19
3.4	Numerička shema drugog reda točnosti . . . . .	20
4.1	Plinska turbina . . . . .	22
4.2	Prikaz loma oplata . . . . .	23
4.3	Prikaz izlaznog dijela turbine . . . . .	24
4.4	Prikaz geometrije s jednom lopaticom . . . . .	24
4.5	Prikaz geometrije s tri lopatice . . . . .	24
4.6	Prikaz mreže s jednom lopaticom . . . . .	25
4.7	Prikaz mreže uz lopaticu . . . . .	25
4.8	Prikaz mreže s tri lopatice . . . . .	25
4.9	Prikaz mreže uz lopatice . . . . .	26
4.10	Prikaz mreže uz lopaticu . . . . .	26
4.11	Prikaz rubnih uvjeti za jednu lopaticu . . . . .	27
4.12	Prikaz rubnih uvjeti za tri lopatice . . . . .	28
4.13	Prikaz ulaznog kuta fluida te smjera djelovanja sila . . . . .	29
5.1	Ulazni kut $30^\circ$ modela s jednom lopaticom . . . . .	33
5.2	Ulazni kut $30^\circ$ modela s tri lopatice . . . . .	33
5.3	Ulazni kut $45^\circ$ modela s jednom lopaticom . . . . .	33
5.4	Ulazni kut $45^\circ$ modela s tri lopatice . . . . .	34
5.5	Ulazni kut $60^\circ$ modela s jednom lopaticom . . . . .	34
5.6	Ulazni kut $60^\circ$ modela s tri lopatice . . . . .	34
5.7	Ulazni kut $30^\circ$ i lopatica 1 . . . . .	35
5.8	Ulazni kut $30^\circ$ i lopatica 3 . . . . .	35



5.9	Slika za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut $30^\circ$ . . . . .	36
5.10	Slika za slučaj s tri lopaticei ulazni kut $30^\circ$ . . . . .	37
5.11	Slika za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut $60^\circ$ . . . . .	37
5.12	Slika za slučaj s tri lopatice i ulazni kut $60^\circ$ . . . . .	37
5.13	Slika područja oko lopatica za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut $60^\circ$ . . . . .	38
5.14	Slika područja oko lopatica za slučaj s tri lopatice i ulazni kut $60^\circ$ . . . . .	38

## Popis tablica

1	Vrste granica i rubni uvjeti u programskom paketu <i>OpenFOAM</i> . . . . .	27
2	Rubni uvjeti za tri lopatice . . . . .	28
3	Tablica koeficijenata sile u smjeru osi $x$ i osi $y$ za različite ulazne kutove fluida .	31

## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$[m^2]$	površina konačnog volumena
$\Delta A$	$[m^2]$	površina stranice konačnog volumena
$A_D$	$[m^2]$	referentna površina za koeficijent otpora
$a_C$	$[kg/s]$	centralni koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
$a_D$	$[kg/s]$	koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
$b$	$[-]$	slobodni član u diferencijskoj jednadžbi
$C_D$	$[-]$	koeficijent otpora
$C_L$	$[-]$	koeficijent uzgona
$D$	$[kg/s]$	jačina difuzije
$F_n$	$[kg/s]$	jačina konvekcije
$f_i$	$[N/kg]$	komponente vektora specifične masene sile
$J_j$	$[-]$	vektor fluksa fizikalnog svojstva
$l_t$	$[m]$	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
$\bar{k}$	$[J/kg]$	kinetička energija turbulencije
$p$	$[N/m^2]$	tlak
$\bar{p}$	$[N/m^2]$	statistički osrednjeno polje tlaka
$p'$	$[N/m^2]$	pulzirajući dio polja tlaka
$q_H$	$[W/m^3]$	volumenska gustoća toplinskih izvora
$Re$	$[-]$	Reynoldsov broj
$Re_{kr}$	$[-]$	kritični Reynoldsov broj
$Re_\lambda$	$[-]$	turbulentni Reynoldsov broj
$t$	$[s]$	vrijeme
$V$	$[m^3]$	volumen konačnog volumena
$v_i$	$[m/s]$	komponente vektora brzine strujanja
$\bar{v}_i$	$[m/s]$	osrednjeni dio vektora brzine strujanja

Oznaka	Jedinica	Opis
$v'_i$	[m/s]	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja
$v_n$	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
$v_\infty$	[m/s]	brzina neporemećenog strujanja
$v_t$	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
$x_i$	[m]	pravokutne koordinate
$x_{kr}$	[m]	kritična duljina
$y^+$	[–]	bezdimenzijska udaljenost prvog čvora od stijenke
$\delta$	[–]	Kroneckerov simbol
$\Sigma$	[N/m <sup>2</sup> ]	Tenzor viskoznih naprezanja
$\lambda$	[m]	valna duljina turbulentnih pulsacija
$\phi$	[–]	volumenska gustoća fizikalne veličine
$\varphi$	[–]	polje fizikalne veličine
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent difuzije
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent turbulentne difuzije
$\mu$	[–]	dinamička viskoznost
$\mu_t$	[–]	turbulentna viskoznost
$\bar{\epsilon}$	[W/kg]	disipacija kinetičke energije turbulencije
$\tau$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\mu$	[Pas]	dinamička viskoznost
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematička viskoznost

## Sažetak

Cilj ovog rada jest istražiti utjecaj strujanja dimnih plinova na aerodinamički oblikovanu oplatu nosača izlaznog dijela kućišta plinskih turbina. Poseban naglasak jest istraživanje ulaznog kuta nastrujavanja na pojavu sila na aerodinamički profilirani dio oplate koji je oblika rijetke statorske rešetke s ravnim lopaticama.

Usvojen je dvodimenzijski model strujanja na srednjem radijusu strujnog prostora. Geometrijski model izrađen je u programskom paketu Salome, diskretizacija prostora obavljena paketom cfMesh, a proračun paketom OpenFOAM. Proračun je izveden za slučaj s jednom lopaticom te slučaj s tri lopatice u nizu. Kutovi nastrujavanja su u rasponu od  $0^\circ$  do  $60^\circ$ .

Područje proračuna ispunjeno je mrežom konačnih volumena pretežno heksaedarskog oblika, uz određena profinjenja uz lopatice i vanjske granice područja.

Svi proračuni izvršeni su primjenom programa za rješavanje modela nestacionarnog strujanja. U radu su prikazana polja različitih fizikalnih veličina te je izvršena analiza rezultata.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida, metoda konačnih volumena, plnska turbina, sila na lopaticu

## Summary

The aim of work thesis is to investigate the influence of the flow of flue gases to the aerodynamically shaped shell carrier output of the casing gas turbines. Special emphasis is to study how the input angle affects on the aerodynamic profiled part of the casing, which is a rare form of the stator bars with straight blades.

The two-dimensional flow model at the middle radius of the casing model was assumed. Geometric model is made in the software package Salome, spatial discretization in cfMesh package, and calculations in OpenFOAM. Calculations are made for the model consisting of one aerodynamic profiled part and for the model consisting of three aerodynamic profiled parts. The swirl angles applied were in the range from  $0^\circ$  to  $60^\circ$ .

The finite volume meshes consisted of predominantly regular hexahedral volumes with necessary refinements on blades and external borders.

All calculations were performed using the program for solving unsteady fluid flow model. This work describes the different fields of physical quantities and the results have been analysed.

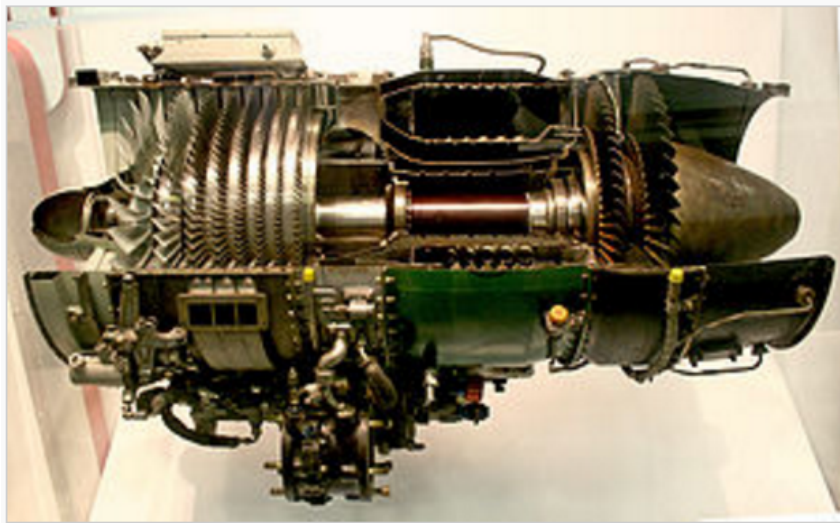
Keywords: Computational Fluid Dynamic, finite element method, gas turbine, strut forces

# 1 Uvod

Plinska turbina je rotacijski stroj koji pretvara energiju izgaranja goriva u koristan rad, te spada u motore s unutarnjim izgaranjem. Na ulazu se nalazi kompresor, koji povećava tlak ulaznih plinova, dok im smanjuje volumen, dok se u komori za izgaranje vrući plin usmjerava preko statorskih lopatica na turbinske lopatice, te ih okreće.

U komoru za izgaranje ulazi zrak kojemu se izgaranjem goriva predaje energija te nastaju dimni plinovi pri visokom tlaku i temperaturi. Dimni plinovi ulaze u turbinu sa velikom brzinom i protokom, gdje se preko mlaznica usmjeruju na lopatice, koje se okreću, a izlaze sa smanjenom temperaturom i tlakom.

Dobivena energija može se prenijeti preko vratila, komprimiranog zraka ili sile potiska izlaznog mlaza, ovisno o tome primjenjuje li se za zrakoplove, vlakove, brodove, električne generatore ili čak za tenkove.



Slika 1.1: Presjek turbine

Razvojem računala i računalnih metoda, danas možemo rješavati i kompleksne jednadžbe matematičkih modela mehanike fluida. Tako se primjenom Računalne dinamike fluida mogu odrediti i sile uzgona i otpora nastale uslijed strujanja dimnih plinova u turbini. U ovome radu primjenjuje se matematički model nestlačivog strujanja fluida bez izmjene topline s okolišem. U nastavku je izložen njegov kratki opis.

## 2 Teorijske osnove

### 2.1 Osnovne jednadžbe dinamike fluida

Dinamika fluida temelji se na osnovnim zakonima iz područja klasične fizike. Ovi se zakoni u mehanici fluida definiraju za materijalni volumen, tj. skup čestica fluida, koji može mijenjati oblik i izmjenjivati energiju s okolinom, ali kroz njegove granice nema protoka mase jer se pretpostavlja da je sastavljen uvijek od istih čestica.

#### 2.1.1 Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Masa materijalnog volumena je konstantna. Ovaj Zakon se također naziva i jednadžbom kontinuiteta.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

#### 2.1.2 Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i \quad (2.2)$$

gdje je za stlačivo strujanje uz zanemarenje volumenske viskoznosti fluida, prema Newtonovom zakonu viskoznosti

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} \quad (2.3)$$

Formulacija osnovnih fizikalnih zakona za materijalni volumen često nije pogodna za primjenu u praksi, budući da inženjera uglavnom ne zanimaju promjene fizikalnih veličina u nekom gibajućem materijalnom volumenu, već ga npr. zanima utjecaj stijenke cijevi na materijalni volumen u trenutku u kojem on ispunjava njenu unutrašnjost. Poznavajući silu kojom stijenka cijevi djeluje



na materijalni volumen, po trećem Newtonovom zakonu poznajemo i silu kojom fluid djeluje na stijenku, što je od primarnog interesa sa stajališta dimenzioniranja cijevi. Jasno je da u različitim vremenskim trenucima kroz cijev protječu različiti materijalni volumeni, stoga se definira kontrolni volumen koji ima fiksne granice, i od okoline je odijeljen kontrolnom površinom. Kontrolni je volumen u većini slučajeva s mirujućim granicama, a u analizi konstrukcija s pomičnim dijelovima koristi se i formulacija kontrolnog volumena s pomičnim granicama. Za preformuliranje osnovnih jednadžbi dinamike fluida za materijalni volumen u jednadžbe za kontrolni volumen koristi se Reynoldsov transportni teorem.

a) slučaj mirujućeg ( $u_j = 0$ ) kontrolnog volumena  $V_{KV}$  koji je ograđen mirujućom kontrolnom površinom  $S_{KV}$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \Phi dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_{KV}} \Phi dV + \int_{S_{KV}} \Phi v_j n_j dS \quad (2.4)$$

b) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena  $V$  čija se granica  $S$  giba brzinom  $u_j$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \Phi dV = \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \Phi dV + \int_{S(t)} \Phi (v_j - u_j) n_j dS \quad (2.5)$$

U gornjim jednadžbama  $\Phi$  predstavlja volumensku gustoću fizikalne veličine.

## 2.2 Turbulencija

Sve do danas razumijevanje turbulentnog ponašanja fluida koji struji je jedan od najintragantnijih, najvažnijih ali i jedan od najtežih problema u klasičnoj fizici. Velika većina strujanja u prirodi je turbulentnog karaktera, a uz to činjenicu da se strujanje fluida javlja diljem poznatog svijeta - od unutrašnjosti bioloških ćelija, cirkularnog i respiratornog sustava živih bića, raznih tehnoloških uređaja, do geofizičkih strujanja, čini ovo područje izuzetno zanimljivim za istraživanje. Unatoč tolikoj rasprostranjenosti i učestaloj pojavi, problem turbulentnog strujanja ostaje i dan danas bez egzaktnog rješenja. Strujanja fluida se, sa stajališta podjele prema vrijednostima Reynoldsovog broja, mogu podijeliti na laminarna i turbulentna. Turbulentno strujanje karakterizira kaotična

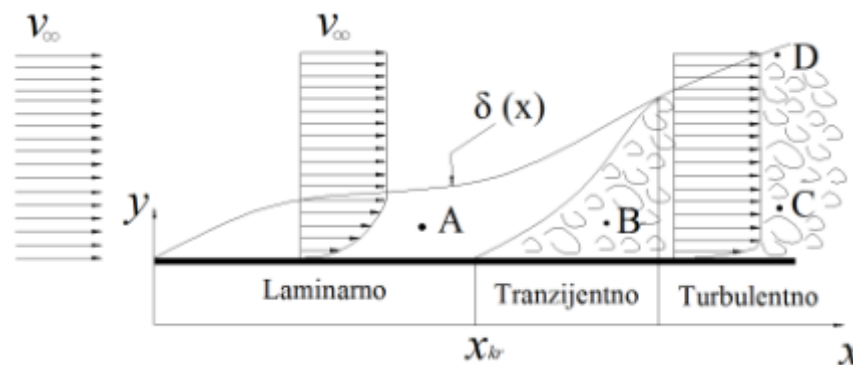
promjena svojstava u vremenskoj i prostornoj domeni, a pojavljuje se uvijek pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja. Reynoldsov broj je bezdimenzijski broj koji prikazuje omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida:

$$Re = \frac{v \cdot x}{\nu} \quad (2.6)$$

gdje  $v$  označuje brzinu strujanja fluida,  $x$  karakterističnu duljinu, a  $\nu$  kinematičku viskoznost fluida.

Laminarno strujanje se javlja pri niskim Reynoldsovim brojevima, kada su viskozne sile dominantne naspram inercijskih, i karakterizira ga uredno gibanje čestica fluida, za razliku od turbulentnog strujanja, koje se javlja pri visokim Reynoldsovim brojevima, kada su inercijske sile dominantne nad viskoznim, a karakteriziraju ga slučajne pulsacije brzine i tlaka, te burno komešanje čestica fluida. Laminarno nestlačivo strujanje fluida konstantnog koeficijenta viskoznosti može se opisati sustavom Navier Stokesovih jednažbi – jednažbom kontinuiteta i jednažbom količine gibanja. Matematičko ispitivanje stabilnosti rješenja Navier-Stokesovih jednažbi, a time i ispitivanje klasifikacije strujanja fluida, vrši se dodavanjem male vremensko prostorne perturbacije polja brzine i polja tlaka na dobiveno stacionarno rješenje. Ako perturbacije slabe u vremenu, strujanje je stabilno i ostaje stacionarno i laminarno (jednažbe 2.1 - 2.3). Kritična vrijednost Reynoldsovog broja je ona kod koje se pojavi prva perturbacija koja ne slabi u vremenu naziva se  $Re_{kr}$  i kod nje počinje proces tranzicije laminarnog u turbulentno strujanje. Kritičan Reynoldsov broj nije univerzalna veličina, njegova vrijednost ovisi o uvjetima strujanja, geometriji opstrujavajućeg tijela, pobudama u obliku vibracija itd. Donji kritični Reynoldsov broj je vrijednost ispod koje se, za određeni oblik strujanja, ne pojavljuju slučajne pulsacije fizikalnih veličina, odnosno ne pojavljuje se turbulentno strujanje. Gornja kritična vrijednost Reynoldsovog broja je vrijednost iznad koje se ne može održati laminarno strujanje. Treba naglasiti da se te vrijednosti mogu dobiti samo u laboratorijskim uvjetima gdje se bilo kakve pobude, koje inače postoje u realnim strujanjima, neutraliziraju. Na donjoj slici prikazano je opstrujavanje ravne ploče. Na samom početku, gdje je Reynoldsov broj manji od donje kritične vrijednosti, vlada laminarno strujanje. U presjeku  $x = x_{kr}$ , kada Reynoldsov broj poprimi kritičnu vrijednost  $Re_{kr} = \frac{v_{\infty} x_{kr}}{\nu}$ , pojavljuju se nestabil-

nosti strujanja. Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve izraženije, te nakon nekog presjeka vlada potpuno turbulentno strujanje.



Slika 2.1: Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče

Potrebno je naglasiti da i u laminarnom i u turbulentnom strujanja prisutan sloj u neposrednoj blizini tijela, u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenu), do brzine neporemećenog strujanja. To područje naziva se graničnim slojem, unutar kojeg se ni u turbulentnom strujanju, gdje su inercijalne sile dominantne nad viskoznim, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine će biti ujednačeniji, pa će, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci, biti veće i smično naprezanje.

### 2.2.1 Statističko opisivanje turbulencije

Zbog prirode turbulentnog strujanja, pri numeričkom rješavanju Navier – Stokesovih jednadžbi za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja, diskretizacija proračuna bi morala biti tako sitna da se obuhvate sve amplitude pulsacija fizikalnih veličina, a vremenski korak integracija bi morao biti tako mali da se obuhvate sve frekvencije turbulentnih pulsacija. Takva vrsta izračuna dala bi jako veliki broj rezultata što bi bilo problematično sa stajališta brzine računanja i kapaciteta današnjih računala, te takvi proračuni nisu nužni kako bi se riješio problem turbulentnog strujanja. Inženjere najčešće zanimaju prosječne vrijednosti fizikalnih veličina, integralne veličine poput protoka, naprezanja na nekoj površini itd. Zato se obično koristi uprosječivanje Navier – Stokesovih jednadžbi po vremenu. Time se značajno olakšava zadaća numeričkog rješavanja tih jednadžbi, bez da se gubi na točnosti rješenja. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo osrednjavanje, prema kojem se neka

veličina (tlak, brzina) u turbulentnom strujanju može prikazati kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela.

Vremenski osrednjena vrijednost u razdoblju  $T_0$  glasi:

$$\bar{y}(x, t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(x_i, t - \tau) d\tau \quad (2.7)$$

gdje  $T_0$  mora biti odabran tako da vrijedi  $y = \bar{y}$ . Vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli.

Primjenom Reynoldsovog osrednjavanja na opći oblik zakona očuvanja za nestlačivo strujanje ( $\rho = konst.$ ):

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + S_\varphi \quad (2.8)$$

gdje  $\varphi$  predstavlja polje fizikalne veličine,  $\Gamma$  koeficijent difuzije (primjer – toplinska provodnost materijala  $\lambda$  kod kondukcijskog prijenosa topline kroz krutinu), a  $S_\varphi$  izvorski član, te uzevši da je koeficijent difuzije konstantan, polje brzine i specifično fizikalno svojstvo se prikazuju kao zbroj vremenski uprosječene vrijednosti i pulsirajućeg dijela, slijedi:

$$\frac{\partial \rho \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j \bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} - \rho \bar{v}'_j \bar{\varphi}' \right) + \bar{S}_\varphi \quad (2.9)$$

gdje iščezavaju derivacije pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina po vremenu, ali ostaje prisutan član  $\frac{\rho \bar{v}'_j \bar{\varphi}'}{\partial x_j}$  kao predstavnik pulsirajućeg strujanja. Član  $\rho \bar{v}'_j \bar{\varphi}'$  predstavlja novu nepoznanicu, što znači da bi za nju trebalo definirati novu jednadžbu, ili je modelirati. Budući da bi se izvođenjem jednadžbe koja bi opisivala prijenos tog člana, pojavili novi članovi kao nepoznanice, te bi kao rezultat dobili još više nepoznanica, potrebno je taj član modelirati.

## 2.2.2 Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju

Prijenos fizikalne veličine u strujanju fluida odvija se putem konvekcije, čestica fluida koja je nositelj fizikalnog svojstva (npr. temperature ili tlaka) svojim premještanjem prenosi fizikalno svojstvo, i putem difuzije. Difuzija je posljedica kaotičnog gibanja molekula, i makroskopski gle-

dano, odvija se uslijed postojanja gradijenta fizikalne veličine. Difuzijski se procesi odvijaju sami od sebe, odnosno sustav u kojem postoje gradijenti fizikalnih veličina, spontano teži uspostavljanju ravnoteže.

Kondukcija ili provođenje topline primjer je difuzijskog procesa, toplina spontano prelazi s mjesta više temperature na mjesto niže temperature, a o toplinskoj provodnosti materijala ovisi intezitet prijenosa topline. Ako je toplinska provodnost jednaka nuli (teoretski slučaj), nema ni prijenosa topline. Međutim, u toplinski nevodljivom fluidu koji struji turbulentno, te se nalazi u toplinskoj neravnoteži, čestice fluida se gibaju kaotično u svim smjerovima, te čestice toplijeg fluida ulaze među čestice hladnije fluida, i obrnuto, dolazi do prodora hladnijih čestica među toplije čestice. Ovo miješanje čestica ima za posljedicu izjednačavanje temperatura, pa govorimo o turbulentnoj difuziji fizikalnog svojstva. Jasno je da turbulentna difuzija ima porijeklo u konvektivnom prijenosu fizikalnog svojstva uslijed gibanja čestica u poprečnom smjeru u odnosu na smjer glavnog strujanja. Dakle, u realnim strujanjima su prisutne molekularna difuzija, uslijed viskoznosti fluida, i turbulentna difuzija, uslijed turbulentne viskoznosti fluida. Naravno, difuzija, turbulentna ili molekularna, postoji samo ako je prisutan gradijent polja fizikalne veličine, tj. ako je sustav u fizikalnoj neravnoteži, budući da miješanjem čestica fluida nositelja fizikalnog svojstva iste apsolutne veličine nema efekta u vidu prijenosa fizikalnog svojstva. Turbulentna difuzija se modelira sljedećom relacijom:

$$-\rho \bar{v}'_j \bar{\varphi}' = \Gamma_t \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

Ako se izraz uvrsti u vremenski osrednjenu jednadžbu općeg zakona očuvanja u nestlačivom strujanju, dobije se relacija:

$$\frac{\partial \rho \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}'_j \bar{\varphi}')}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\Gamma - \Gamma_t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) + \bar{S}_\varphi \quad (2.11)$$

Zbroj koeficijenata molekularne i turbulentne difuzije se naziva koeficijent efektivne difuzije. Jasno je da je koeficijent molekularne difuzije  $\Gamma$  svojstvo fluida, neovisno o karakteru strujanja, a koeficijent turbulentne difuzije  $\Gamma_t$  funkcija karaktera strujanja, te je u laminarnom strujanju jednak nuli.

### 2.2.3 Disipacija energije

Disipacija energije predstavlja pretvorbu mehaničke energije u unutarnju energiju. U turbulentnom strujanju je veći gradijent brzine na stijenci nego u laminarnom strujanju, što za posljedicu ima da će i tangencijalno naprezanje na stijenci u turbulentnom strujanju biti veće nego u laminarnom strujanju. Proporcionalno povećanju tangencijalnog naprezanja raste i disipacija energije što je vidljivo iz Darcy–Weissbachovog izraza za pad tlaka pri strujanju u cijevima, koji glasi:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{sr}^2}{2} \quad (2.12)$$

Kako je u laminarnom strujanju faktor trenja jednak

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{v_{sr}D} \quad (2.13)$$

pad tlaka će biti linearno razmjernan srednjoj brzini strujanja, što kod turbulentnog strujanja nije slučaj. U režimu potpuno izražene turbulencije faktor trenja je konstantan što se lako može primijetiti iz Moodyjevog dijagrama. Iz toga slijedi da će pad tlaka u režimu potpuno izražene turbulencije biti razmjernan kvadratu srednje brzine. Isti zaključak vrijedi i pri optjecanju tijela, gdje definiramo koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S} \quad (2.14)$$

Jednadžba 2.14 govori o sili otpora, odnosno o snazi potrebnoj za gibanje tijela kroz mirujući fluid (to je snaga potrebna za svladavanje sile otpora, koja se predaje fluidu, a u konačnici se pretvara u unutarnju energiju fluida, što nazivamo disipacijom energije).

Pri optjecanju bilo kojeg tijela za slučaj niskih vrijednosti Reynoldsova broja (slučaj laminarnog strujanja) koeficijent otpora je oblika  $C_D = \frac{\textit{konst.}}{Re}$ , gdje vrijednost konstante zavisi od oblika tijela. U tom je slučaju sila otpora razmjerna brzini optjecanja tijela.

Za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja koeficijent otpora je približno konstantan, što znači da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine optjecanja.

## 2.2.4 Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe

Promatrat ćemo nestlačivo turbulentno strujanje gdje ćemo zanemariti utjecaj masenih sila ( $f_i \equiv 0$ ). Fizikalna polja brzine i tlaka ćemo prikazati zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, p_i = \bar{p}_i + p'_i \quad (2.15)$$

Jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.16)$$

Osrednjavanjem jednadžbe dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17)$$

Budući da je jednadžba kontinuiteta linearna, pa za nju vrijedi princip superpozicije, zbroj jednadžbe kontinuiteta za osrednjeno i pulsirajuće strujanje jednak je jednadžbi kontinuiteta za ukupno strujanje. Obzirom da nas zanimaju samo osrednjene vrijednosti fizikalnih veličina nećemo promatrati jednadžbe za pulsirajuće strujanje. Jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje glasi:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j \right] \quad (2.18)$$

Skup vremenski osrednjenih jednadžbi naziva se Reynoldsovim jednadžbama, u kojima se javlja predstavnik pulsirajućeg strujanja  $-\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i$ , kojeg nazivamo turbulentnim ili Reynoldsovim naprezanjima. Tenzor Reynoldsovih naprezanja je simetrični tenzor s 6 nepoznanica:

$$-\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i = \begin{bmatrix} -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Već je objašnjeno zbog čega se ovaj član ne opisuje pomoću jednadžbi, već se modelira, čime

se gubi dio informacija koje sadrže Navier – Stokesove jednačbe.

### 2.2.5 Modeli turbulencije

Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednačbi i broja nepoznanica koje se javljaju u Navier – Stokesovim jednačbama, modeliranjem člana pulsirajućeg strujanja pomoću poznatih parametara sustava. Modeli turbulencije se dijele s obzirom na red korelacije brzina, budući da se svakom novom korelacijom pojavljuje novi član brzine. Zahtjevi koji se nameću svakom modelu turbulencije su točnost, mogućnost rješavanja i jednostavnost, stoga viši model turbulencije ne mora nužno biti i bolji model, a budući da ima povećan broj članova koje treba modelirati, često nije i najtočniji. Modeli turbulencije temelje se na eksperimentalnim rezultatima.

U modelima prvog reda, modelira se dvojnja korelacija brzina prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

gdje je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji je funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli. Modeli koji se temelje na gornjoj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije, budući da su analogni s Newtonovim zakonom viskoznosti.

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsovu jednačbu za količinu gibanja, dobiva se izraz:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i) = - \frac{\partial (\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.21)$$

Ovim uvrštavanjem izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju, ali se pojavio problem modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti. Prema kinetičkoj teoriji plinova, molekularna viskoznost fluida proporcionalna je gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Boussinesqova je ideja da se turbulentna naprezanja, koja su posljedica kaotičnog gibanja čestica fluida, modeliraju slično viskoznim naprezanjima, gdje su ona uzrokovana kaotičnim gibanjem atoma i molekula unutar čestica fluida, pa slijedi da se turbulentna



viskoznost modelira slično molekularnoj viskoznosti fluida:

$$\mu_t = \rho l_t v_t \quad (2.22)$$

gdje je  $l_t$  duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju, a  $v_t$  karakteristična brzina turbulentnih pulsacija. Budući da ove dvije veličine nisu svojstvo fluida, već ovise o obliku strujanja, postoje razni modeli koji se razlikuju po definiciji te dvije veličine, a jedan od njih je  $k - \omega SST$  model turbulencije.

### 2.2.6 $k - \omega$ Shear Stress Transport model turbulencije

$k - \omega SST$  je model turbulencije s dvije jednačbe koji se koristi kako bi se zatvorio sustav jednačbi osrednjenog strujanja fluida. Sofisticiraniji je od modela s nula ili jednom jednačbom budući da modelira efekte transporta svojstava turbulencije putem osrednjenog strujanja, difuzije te nastanka i nestanka turbulencije. U ovom modelu kombinirano je najbolje od  $k - \omega$  i  $k - \epsilon$  modela.  $k - \omega$  model se koristi u blzini stijenke u graničnom sloju stoga  $k - \omega SST$  model se može koristiti i za modele s malom vrijednošću Reynoldsova broja bez dodatnih prigušnih funkcija.  $SST$  model se također prebacuje na  $k - \epsilon$  model u podrčijima dalje od stijenke odnosno slobodne struje fluida i tako izbjegava osjetljivost  $k - \omega$  modela na razinu turbulencije u slobodnoj struji.

Sastoji se od dvije parcijalno diferencijalne jednačbe, jedne koja opisuje transport turbulentne kinetičke energije  $k$  (jednačba 2.23) te jedne koja opisuje specifičnu brzinu disipacije turbulencije  $\omega$  (jednačba 2.24).

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_\omega^2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.24)$$

Glavna razlika leži u drugačijem podešavanju koeficijenata za zatvaranje sustava jednačbi.

Cjelokupni izvod jednadžbi, koeficijenta kao i pomoćnih odnosa može se naći u [4] pa će se ovdje prikazati samo konačni izrazi:

$$P_k = \min \left( \tau_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, 10\beta^* k\omega \right) \quad (2.25)$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^k \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega y^2}} \right] \right\}^4 \right\} \quad (2.26)$$

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^k \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.27)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (2.28)$$

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1) \quad (2.29)$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0.44 \quad (2.30)$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \beta^* = \frac{9}{100} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1 \quad (2.32)$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.865 \quad (2.33)$$

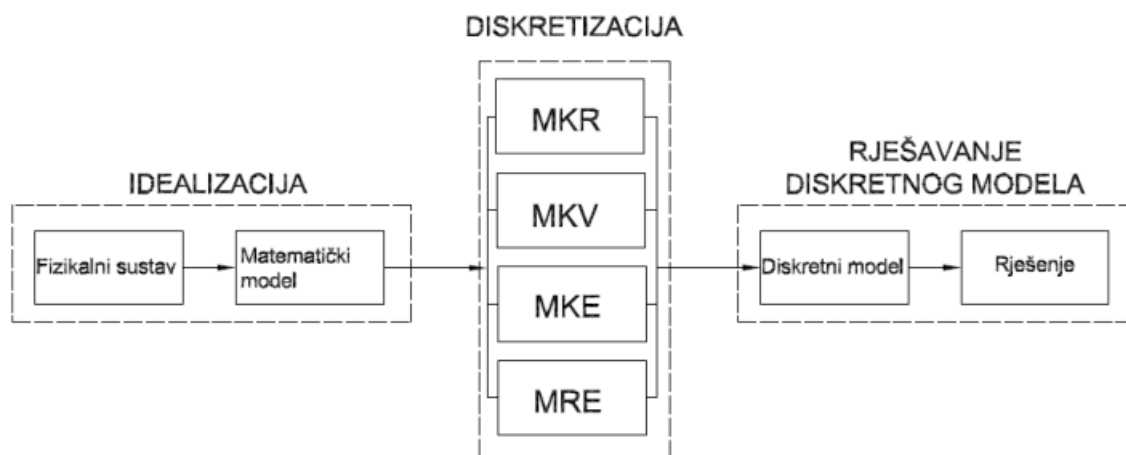
### 3 Numeričko rješavanje problema mehanike fluida

Numerički pristup je jedan od tri temeljna pristupa rješavanju inženjerskih problema, uz analitički i esperimentalni.

Numeričkim metodama dobivaju se približna rješenja diferencijalnih jednadžbi kojima se opisuje zadani model. Odstupanja numeričkog rješenja od egzaktnog su, pod uvjetom pravilnog modeliranja i proračunavanja problema, dovoljno mala za upotrebu u inženjerskoj praksi. Preduvjet za postizanje pouzdanog numeričkog rješenja je točna formulacija numeričke metode i matematičkog modela. Prednost ovog načina rješavanja problema, uz relativno nisku cijenu potrebnih sredstava, je činjenica da se jednostavno i brzo može provesti promjena odgovarajućih parametara u numeričkim simulacijama, što omogućuje lakše i brže postizanje optimalnog rješenja.

Postupak rješavanja inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda sastoji se od tri faze

- idealizacija ili matematičko modeliranje
- diskretizacija matematičkog modela
- rješavanje sustava diskretiziranih jednadžb



Slika 3.1: Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda

#### 3.1 Idealizacija ili matematičko modeliranje

Idealizacija predstavlja opisivanje fizikalnog sustava pomoću određenog matematičkog modela. Cilj izrade matematičkog modela je što vjerniji opis problema uz što jednostavniji matematički zapis. Matematički model daje odnos između svih prisutnih fizikalnih veličina.

Često je nemoguće izraditi apsolutno točan matematički model, pa se tako pristupa određenim aproksimacijama i zanemarivanju određenih parametara. Najčešća pretpostavka koja se koristi pri opisivanju strujanja fluida je da je fluid kontinuum, zamišljena tvar koja bi sadržavala svojstva i za infinitezimalno mali volumen. Također se pretpostavlja homogenost (jednakost fizikalnih svojstava u svim točkama fluida) i izotropnost (jednakost fizikalnih svojstava u svim smjerovima) fluida. U ovome radu primjenjuje se matematički model osrednjenih jednažbi kontinuiteta i količine gibanja (jedn. 2.18 i 2.22), uz primjenu  $k - \omega$  modela turbulencije (jedn. 2.23-2.33)

### 3.2 Diskretizacija matematičkog modela

Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji je opisan s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuju se diskretizacija područja, diskretizacija vremena i diskretizacija jednažbi.

Diskretizacija područja predstavlja podjelu područja na konačni broj segmenata, diskretizacija vremena je podjela vremenskog kontinuuma na određeni broj vremenskih koraka dok je diskretizacija jednažbi aproksimacija diferencijalnih jednažbi sustavom algebarskih jednažbi.

Neke od diskretizacijskih metoda su:

- Metoda konačnih razlika (MKR) – temelji se na diskretizaciji razmatranog područja pomoću točaka (čvorova) koje čine mrežu konačnih razlika
- Metoda konačnih volumena (MKV) – dijeli razmatrano područje pomoću ili konačnih kontrolnih volumena
- Metoda konačnih elemenata (MKE) – dijeli razmatrano područje na manje koje dijelove nazivamo konačnim elementima
- Metoda rubnih elemenata (MRE) – temelji se samo na diskretizaciji ruba promatranog područja

U današnje vrijeme, rješavanje diskretiziranog modela se odvija uporabom specijaliziranih programskih paketa. U ovome radu se primjenjuje Metoda konačnih volumena, kako je implementirana u sklopu OpenFOAM računalnog paketa.

### 3.3 Metoda konačnih volumena

U programskim paketima za rješavanje problema računalne dinamike fluida metoda konačnih volumena predstavlja uobičajen pristup jer ima povoljnu upotrebu memorije i brzinu rješavanja, pogotovo kod većih problema, te turbulentnih strujanja s visokim Reynoldsovim brojem.

Metoda konačnih volumena je diskretizacijska metoda koja se koristi za predstavljanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u algebarskom obliku. Domena strujanja, tj. ukupni volumen proračuna dijeli se na veliki broj konačnih volumena, u kojima se računaju vrijednosti polja fizikalnih veličina. Konačni volumeni moraju u potpunosti ispunjavati kontrolni volumen, i ne smiju se preklapati. Zakoni očuvanja ostaju zadovoljeni za svaki konačan volumen. Pri proučavanju nestacionarnih problema, gdje rješenje ovisi i o vremenu, proračun se dijeli u određen broj vremenskih intervala tj. vremenskih koraka.

Opća jednadžba zakona očuvanja fizikalnog svojstva  $\varphi$  glasi:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = S_\varphi \quad (3.1)$$

gdje je s lijeve strane jednakosti:

- prvi član – označava lokalnu promjenu fizikalnog svojstva,
- drugi član – označava konvektivni prijenos fizikalnog svojstva,
- treći član - označava prijenos fizikalnog svojstva putem difuzije.

Drugi i treći član zajedno označavaju vektor fluksa, tj. ukupni protok fizikalnog svojstva. Član  $S_\varphi$  s desne strane označava izvorski član fizikalnog svojstva. Ako gornju jednadžbu integriramo po konačnom volumenu, dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV \quad (3.2)$$

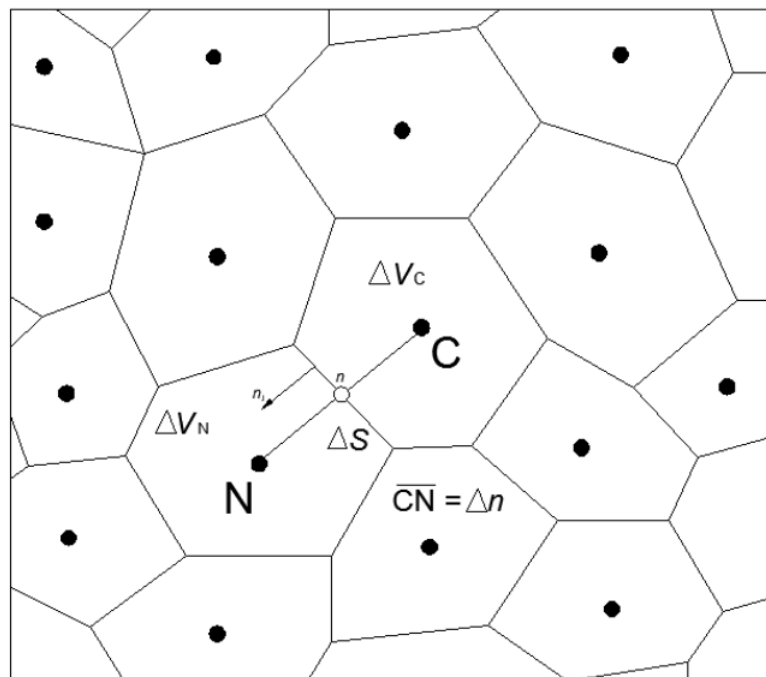
gdje:

- prvi član označava brzinu promjene sadržaja nekog fizikalnog svojstva  $\varphi$  u konačnom volumenu,
- drugi član zbroj konvektivnog i difuzijskog protoke sadržaja fizikalnog svojstva  $\varphi$  kroz

granice volumena

- treći član izvor fizikalnog svojstva.

U jednadžbi 3.2 je protok fizikalnog svojstva definiran kao pozitivan kad se odnosi od konačnog volumena prema okolini, pa je jasno da će se uslijed takvog protoka, zbog minusa ispred integrala, sadržaj fizikalnog svojstva u konačnom volumenu smanjivati. Gornja jednadžba mora biti zadovoljena za svaki konačni volumen, što metodi konačnih volumena daje bitno svojstvo konzervativnosti.



Slika 3.2: Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena

Lokalna konzervativnost numeričkih flukseva znači da je numerički fluks fizikalnog svojstva konzervativan od jednog diskretiziranog volumena do njegovih susjeda. Metoda konačnih volumena zbog ovog svojstva je posebno kompatibilna s problemima u kojima je od velike važnosti vektor fluksa, kao što su mehanika fluida, ili prijenos topline i tvari. Vrijednosti fizikalnih veličina se izračunavaju u položajima čvorova geometrijske mreže, koji se najčešće nalaze u sredini konačnog volumena.

Zbroj dvaju članova protoka fizikalnog svojstva čini ukupni vektor konvekcijsko-difuzijskog toka  $J_j$ , pa pišemo:

$$\begin{aligned}
J_j \cdot n_j &= \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \\
&= \left[ \rho (\overline{v_n \varphi})_n - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_n \right] \Delta S
\end{aligned} \tag{3.3}$$

U gornjoj jednadžbi u obzir su uzete samo normalne komponentne vektora protoka, budući da samo one i doprinose protoku fizikalnog svojstva. Također je provedeno osrednjavanje vrijednosti difuzijskog i konveksijskog protoka po površini  $\Delta S$ . Ako uvedemo bezdimenzijsku koordinatu  $n = \frac{x}{\Delta n}$  gdje  $\Delta n$  označava udaljenost između čvorova konačnih volumena, te aproksimiramo vrijednost umnoška konvektivnog prijenosa umnoškom srednjih vrijednosti, dolazimo do relacije:

$$J_j n_j = (\rho \overline{v_n} \Delta S) \overline{\varphi}_n - \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \Big|_n = F_n \overline{\varphi}_n - D_n \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \Big|_n \tag{3.4}$$

gdje je  $F_n$  maseni protok, odnosno jačina konvekcije kroz stranicu konačnog volumena  $\Delta S$ , a  $D_n$  označava jačinu difuzije. Omjer ovih dvaju veličina se naziva Pecletovim brojem. Dakle, Pecletov broj daje informaciju o odnosu inteziteta prijenosa fizikalne veličine konvekcijom i difuzijom. Jasno je da se smanjenjem volumena smanjuje i  $\Delta n$ , čime se smanjuje i lokalni Pecletov broj, što znači da difuzijski transport postaje utjecajniiji. U gornjim jednadžbama koriste se izrazi za srednju vrijednost fizikalne veličine na površini  $\Delta S$ , dok se u samom numeričkom postupku računaju vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima volumena. Da bi se pomoću vrijednosti u čvorovima volumena aproksimirale vrijednosti na stranicama, koriste se sheme diferencije ili numeričke sheme.

Koristeći neku od shema diferencije, aproksimiramo vrijednosti  $\overline{\varphi}_n$  i  $\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \Big|_n$ , pa se izraz može prikazati kao:

$$J_j n_j = F_n \overline{\varphi}_n - D_n \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \Big|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \tag{3.5}$$

gdje su  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$  vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima C i N, a  $a_N$  je koeficijent koji ovisi o shemi diferencije koja se koristi. Ako ovako definirani vektor fluksa uvrstimo u jednadžbu očuvanja za konačni volumen s aproksimiranim vrijednostima površinskih i volumnih integrala, dobiva se sljedeća relacija:

$$\rho \Delta V_C \frac{\partial \varphi_C}{\partial t} = -a_C \varphi_C + \sum_{nb=1}^{N_{ab}} [a_N \varphi_N]^{nb} + S_C \Delta V_C \quad (3.6)$$

gdje je centralni koeficijent suma aproksimirajućih koeficijenata:

$$a_C = \sum_{nb=1}^{N_{ab}} [a_N]^{nb} \quad (3.7)$$

Način prikazivanja izvorskog člana ovisi o metodi rješavanja diferencijalne jednadžbe. Ako se jednadžba rješava eksplicitnom metodom, izvorski član ostaje nepromijenjen, a ako se primjenjuje implicitna metoda, izvorski član se linearizira:

$$S_C \Delta V_C = a + b \varphi_C \quad (3.8)$$

Dakle, diskretizacijom integrala i uvrštavanjem lineariziranog izvorskog člana dobije se linearna algebarska jednadžba očuvanja za konačni volumen. Ako se postupak ponovi za cijelo područje proračuna, dobije se sustav linearnih algebarskih jednadžbi. Broj jednadžbi odgovara broju nepoznanica – vrijednostima fizikalnih veličina u čvorovima konačnih volumena. Taj se sustav jednadžbi može matematički zapisati u obliku:

$$[A_{ji}] [\varphi_i] = [b_j] \quad (3.9)$$

gdje je

- $[A_{ji}]$  matrica koeficijenata sustava koju čine koeficijenti koji se dobiju korištenjem određene sheme diferencije, pri čemu su koeficijenti  $a_C$  na glavnoj dijagonali,
- $[\varphi_i]$  označava vektor nepoznanica,
- $[b_j]$  označava vektor u kojeg ulaze sve poznate veličine.

Polje fizikalne veličine  $\varphi$  također mora zadovoljavati rubne uvjete, koji se ugrađuju u jednadžbu s desne strane. Ako je izvorski član nelinearna funkcija od  $\varphi$ , rješavanje jednadžbe zahtijevati će iterativni postupak, pa će se sustav linearnih jednadžbi za svaki čvor kontrolnog volumena rješavati više puta unutar jednog vremenskog koraka.

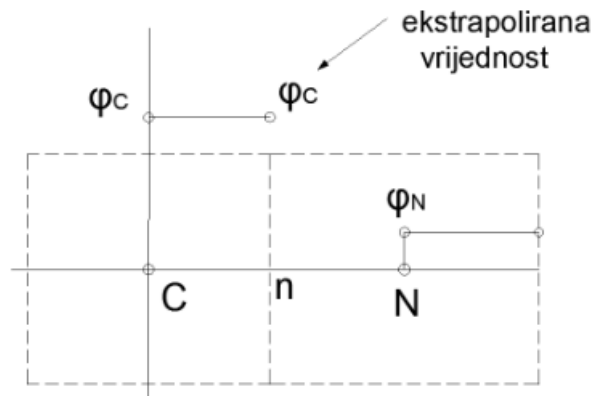
Budući da ćemo u proračunu koristiti uzvodne sheme diferencije prvog i drugog reda, malo



ćemo ih pobliže objasniti.

### 3.3.1 Shema prvog reda točnosti

Uzvodna shema prvog reda je najjednostavnija numerička shema. Pretpostavlja se da je vrijednost fizikalne veličine na stranici jednaka vrijednosti u čvoru konačnog volumena uzvodno.



Slika 3.3: Numerička shema prvog reda točnosti

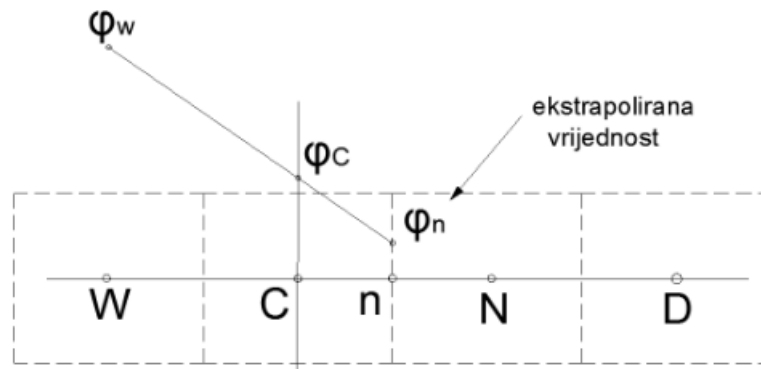
Difuzijski transport je simetričan, pa se za njegovu diskretizaciju koristi shema centralnih razlika, koja daje najbolje rješenje, i glasi:

$$-D \frac{d\varphi}{dn} = -D(\varphi_N - \varphi_C) \quad (3.10)$$

Dakle, sheme će se razlikovati po modeliranju konvekcijskog transporta. Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici se u uzvodnoj shemi prvog reda definira kao rješenje eksponencijalne sheme, za vrijednost jačine difuzije  $D = 0$ . Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici će biti jednaka vrijednosti u uzvodnom čvoru  $\varphi_C$  ako se prijenos fizikalnog svojstva putem konvekcije odvija od čvora C prema čvoru N. Ako se prijenos odvija u suprotnom smjeru, vrijednost fizikalne veličine na stranici biti će jednaka vrijednosti u nizvodnom čvoru  $\varphi_N$ .

Osnovna prednost ove sheme je jednostavnost implementacije i stabilna rješenja, i često je najbolja shema za početak proračuna. Nedostatak je što ova shema unosi lažnu difuziju u rješenje.

### 3.3.2 Shema drugog reda točnosti



Slika 3.4: Numerička shema drugog reda točnosti

Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici ( $\varphi_n$ ) određuje se linearnom ekstrapolacijom vrijednosti iz dvaju čvorovu uzvodno. Difuzijski se transport definira shemom centralnih razlika, a izraz za konvekcijski transport glasi:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial C} \Big|_C = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_N) \\ \varphi_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial E} \Big|_E = \varphi_E + \frac{1}{2} (\varphi_E - \varphi_D) \end{cases} \quad (3.11)$$

gdje se prvi način odnosi kada se transport odvija od čvora C prema N, tj. kada je F veći od nule, a drugi način kada se transport odvija od čvora N prema čvoru C, tj. kada je F manji od nule. Sheme drugog reda u područjima s značajnim gradijentima fizikalnih veličina mogu davati rezultate koji su izvan limita vrijednosti u čvorovima, stoga je potrebno postaviti limitne vrijednosti na vrijednosti fizikalnih veličina na stranicama. Linearno uzvodna shema drugog reda točnosti je popularna numerička shema koja se često koristi zbog zadovoljavajućeg odnosa točnosti i stabilnosti.

## 3.4 Računalna dinamika fluida

Računalna dinamika fluida (eng. Computational fluid dynamics, CFD) je grana mehanike fluida koja proučava pojave pri strujanju fluida, korištenjem numeričkih metoda. Temelji se na Navier–Stokes-ovim nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

### 3.4.1 Postupak provođenja računalne simulacije

Numerička simulacija se provodi kroz tri programa:

- predprocesor
- procesor
- postprocesor

Predprocesor je računalni program koji generira geometrijsku mrežu i rubne uvjete proračuna. Pri generiranju mreže treba voditi računa o gustoći mreže, koja s jedne strane mora zadovoljavati računalne resurse, a s druge strane, mora biti dovoljno gusta da bi rezultati bili zadovoljavajući i kako bi se dobro opisale sve promjene polja fizikalnih veličina. Stoga je potrebna gušća diskretizacija u dijelu domene u kojem su veći gradijenti fizikalnih veličina. Budući da ne postoje algoritmi koji automatski generiraju mrežu na temelju geometrije područja i rubnih uvjeta proračuna, na korisniku je da, na temelju iskustva, pretpostavi približnu sliku strujanja i raspodjelu vrijednosti polja fizikalnih veličina, te provede diskretizaciju modela na takav način da zadovolji zahtjeve za točnošću proračuna i istodobno vodi računa o računalnim resursima. U ovome radu se za generiranje mreže koriste paketi Salome i cfMesh.

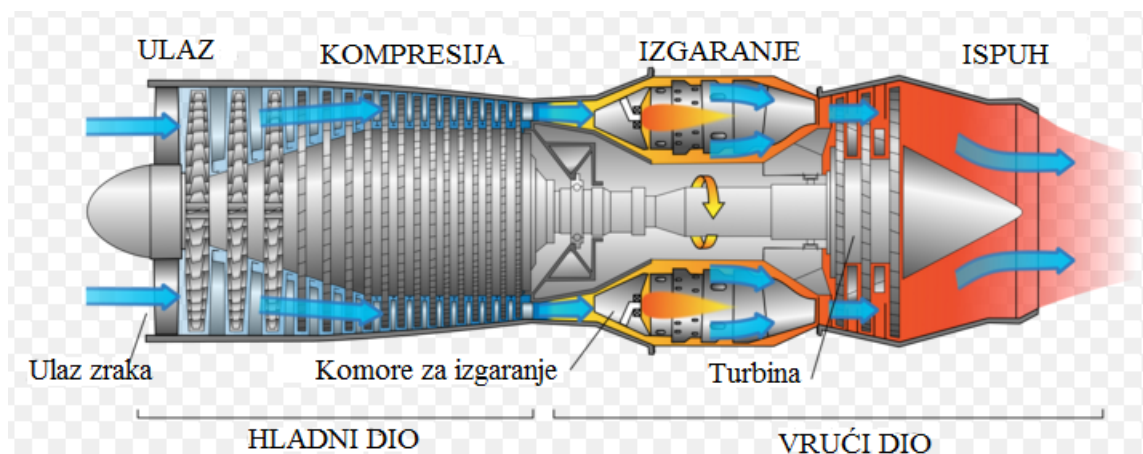
Procesor numerički rješava problem koristeći željeni matematički model, koji može biti fiksno ugrađen u program ili temeljen na objektnom programiranju, gdje korisnik slobodno zadaje matematički model koji će se rješavati. Nakon postavljanja svojstava određenog problema (rubni uvjeti, inicijalizacija početnog rješenja, svojstva materijala, određivanje jednadžbi koje su relevantne), simulacija se vrši kroz određen broj iteracija. U ovome se radu diskretizirane jednadžbe matematičkog modela, koje su navedene u poglavlju 3.2 rješavaju u sklopu SIMPLE postupka, kako je on izveden u programu pimpleFoam koji dolazi kao sastavni dio OpenFOAM paketa.

Postprocesor je program koji služi za vizualizaciju rezultata proračuna, prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integriranih veličina, te dijagramskog prikaza željenih veličina. U ovome radu se za vizualizaciju rezultata koriste programski paketi Paraview, Gnuplot.

## 4 Modeliranje geometrije i diskretizacija prostora

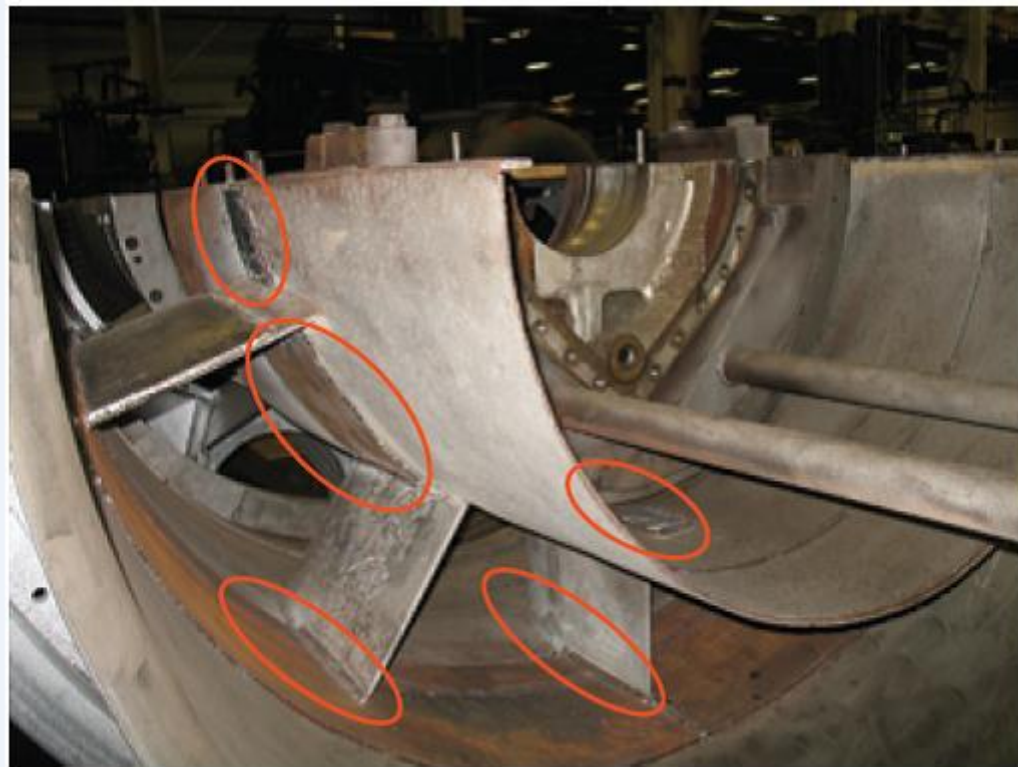
### 4.1 Plinske turbine

Plinske turbine koje se koriste u termoenergetskim postrojenjima kao i one koje se koriste za pogon zrakoplova redovito su aksijalnog tipa. Izuzetak su jedinice manjih snaga gdje se koriste radijalne ili dijagonalne plinske turbine. Prema drugom zakonu termodinamike, iskoristivost plinskih turbina pretežno ovisi u temperaturi dimnih plinova na ulazu u turbinski dio i to tako da iskoristivost raste s porastom ulazne temperature. Danas plinske turbine uz primjenu hladenih lopatica i modernih temperaturno otpornih materijala rade s ulaznim temperaturama plina i do 1700 °C. Ulazni tlakovi su niži od onih kod parnih turbina i kreću se od (1-1.4) MPa, pa su plinske turbine relativno lakše, posebice one koje rade u otvorenom ciklusu (npr. plinske turbine za pogon zrakoplova). Plinske turbine se danas sve više koriste u termonenergetskim i procesnim postrojenjima zbog mogućnosti primjene različitih vrsta goriva: prirodni plin, metan, dizel, kruta goriva pa čak i otpad, te većih mogućnosti regulacije izlazne snage. Plinske turbine se mogu koristiti samostalno ili u kombinaciji s parnim postrojenjem. U kombiniranom postrojenju, plinovi visoke temperature koji izlaze iz plinske turbine koriste se u generatoru pare za proizvodnju pare koja se koristi za pogon parne turbine. Svaki stupanj plinske turbine sastoji se od statora i rotora. Stator se nalazi uzvodno od rotora i u njemu se statička entalpija plina pretvara u kinetičku energiju i plin se usmjerava u sljedeći rotor. U rotoru se energija plina u obliku kinetičke energije i statičke entalpije pretvara u mehaničku.



Slika 4.1: Plinska turbina

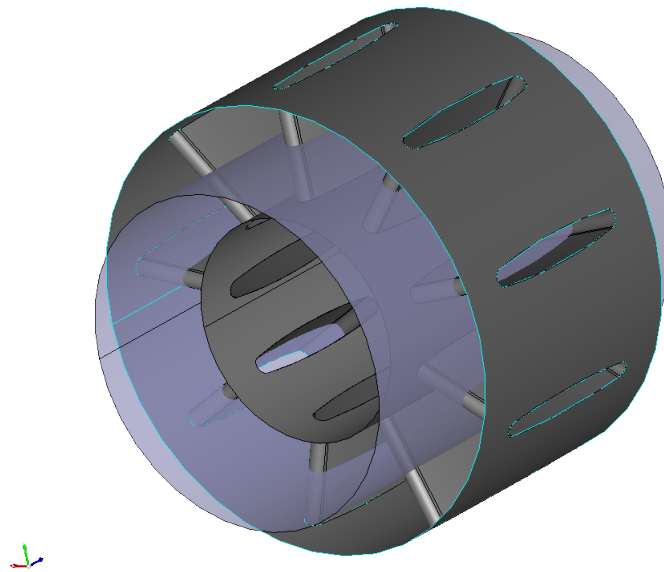
Kada turbina radi pri optimalnoj brzini ulazni kut ispušnih plinova u odnosu na lopatice je oko  $0^\circ$ , ali budući da se plinske turbine uključuju i isključuju ovisno o količini struje koja nastane iz drugih izvora energije npr. ako imamo velik vodostaj onda će vodne turbine proizvesti više struje te će biti smanjena potreba za strujom plinskih turbina. Kada turbina ne radi pri optimalnom opterećenju pa dimni plinovi na izlazu ulaze pod drugačijim kutom od predviđenog što uzorkuje lom oplata.



Slika 4.2: Prikaz loma oplata

Na slici 4.3 se vidi presjek izlaza turbine s deset držača koji imaju posebno napravljen profil kako bi pri normalnim radnim uvjetima stvarali što manji otpor.

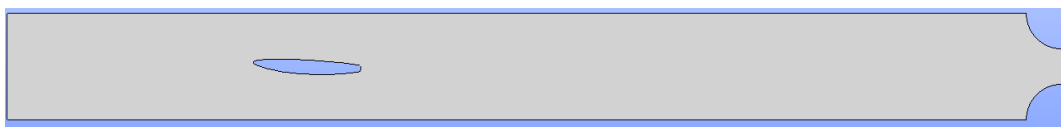
Za proučavanje našeg problema profil ćemo uzeti sa središnje kružnice (koja je na donjoj slici prikazana ljubičastom bojom) te je razviti u ravninu kako bi dobili 2D problem.



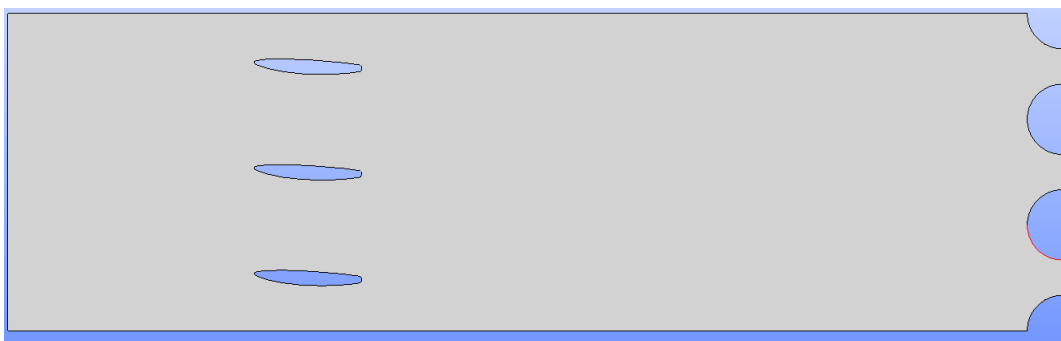
Slika 4.3: Prikaz izlaznog dijela turbine

## 4.2 Geometrija

Kako smo pokazali u gornjem odlomku središnju kružnicu smo razvili u ravninu te smo uzeli dio samo s jednom lopaticom te dio s tri lopatice. Odgovarajući dvodimezijski modeli prikazani su na slikama 4.4 i 4.5.



Slika 4.4: Prikaz geometrije s jednom lopaticom

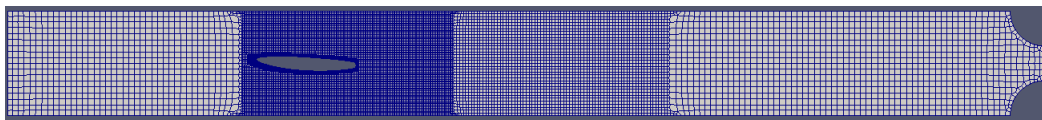


Slika 4.5: Prikaz geometrije s tri lopatice

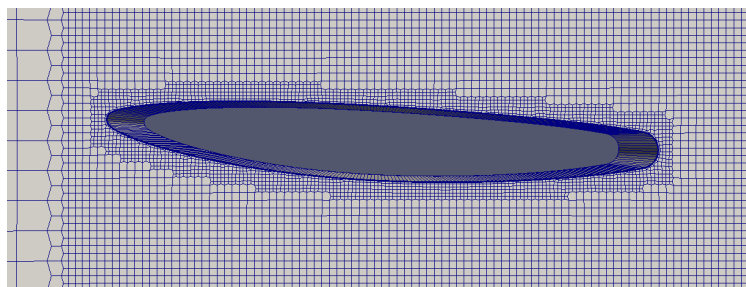
### 4.3 Mreža konačnih volumena

Prostorna diskretizacija područja proračuna obavljena je u programskom paketu **cfMesh**. **cfMesh** je programski paket za automatsko generiranje mreže. Pomoću njega se može stvarati nestrukturirane dvo i trodimenzijske mreže konačnih volumena raznih topologija, a također je dobro izvedena paralelizacija, što se pokazuje posebno pogodnim prilikom izrade velikih mreža.

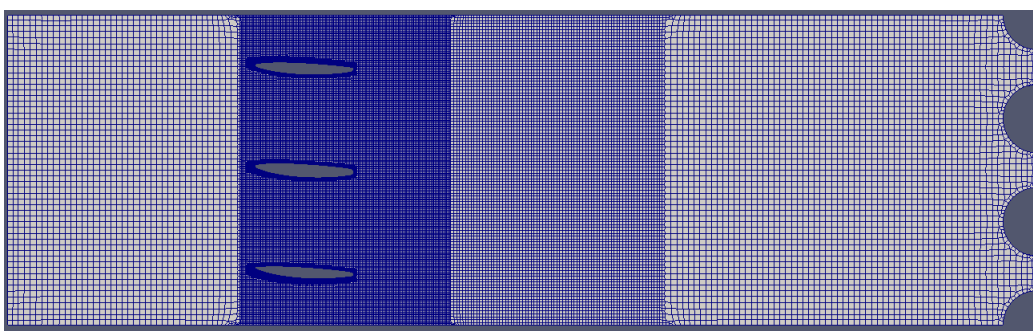
Mreža uz samu konturu lopatice je najgušća zbog graničnog sloja. Zatim smo postepeno prorjedili mrežu od lopatice do izlaza kako bih što bolje uhvatili očekivane promjene fizikalnih veličina, a mreže su prikazane na sljedećim slikama:



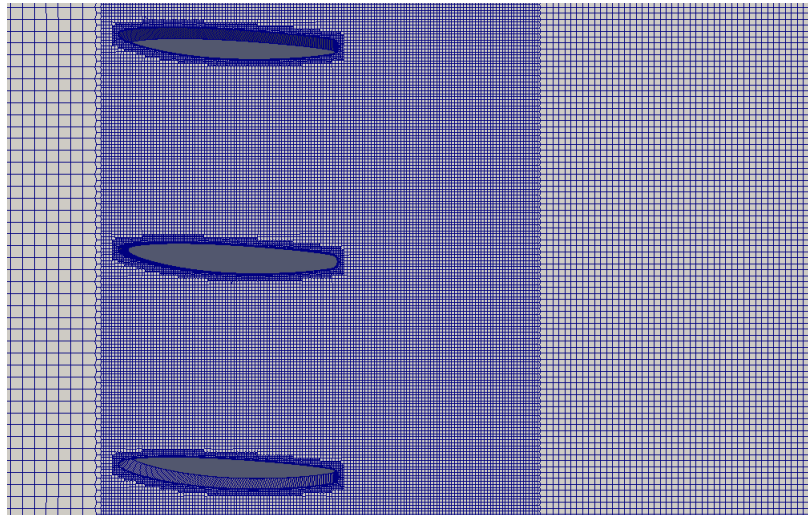
Slika 4.6: Prikaz mreže s jednom lopaticom



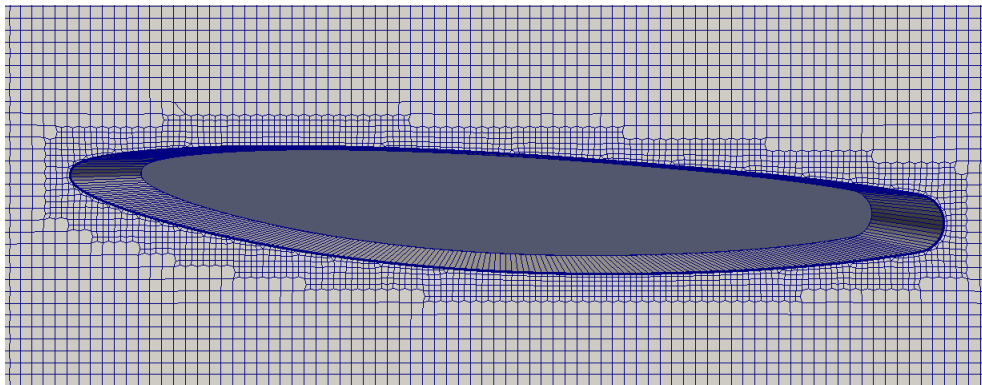
Slika 4.7: Prikaz mreže uz lopaticu



Slika 4.8: Prikaz mreže s tri lopatice



Slika 4.9: Prikaz mreže uz lopatice



Slika 4.10: Prikaz mreže uz lopaticu

#### 4.4 Proračun strujanja

Proračun je proveden programom za proračunavanje nestacionarnih strujanja pimpleFOAM koji dolazi kao sastavni dio OpenFOAM paketa. OpenFOAM je prvenstveno program za operacije nad skalarnim transportnim jednadžbama čime omogućava efikasne proračune kompleksnih tipova struja fluida, turbulencije, kemijskih reakcija, prijenosa topline, dinamike krutih tijela, elektromagnetike i sl. Svoju modularnost zasniva na postojanju obimne biblioteke objekata koji se vrlo lako mogu nadodati te prilagoditi tipu problema koji se analizira. Program ima vrlo dobru paralelizaciju gdje postiže gotovo linearno skaliranje kod uporabe više tisuća procesora.

Rubni uvjeti su definirani prema tablici 1 i slici 4.11 za slučaj s jednom lopaticom te tablici 2 i slici 4.12 za slučaj s tri lopatice. Rubni uvjeti za tri lopatice su analogni onima s jednom lopaticom

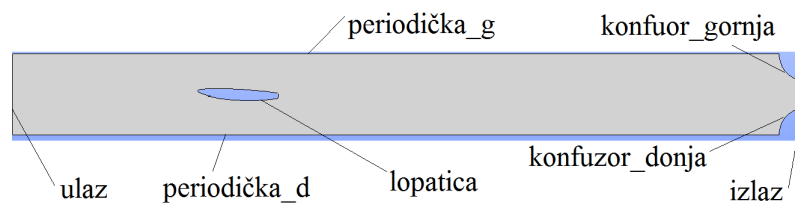


pa njih nećemo detaljno prikazivati.

Naziv rubnog uvjeta	Vrsta granice	Rubni uvjet	
		$v_i$	$p$
ulaz	<i>patch</i>	<i>fixedValue</i>	<i>zeroGradient</i>
periodička_g	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
periodička_d	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
lopatica	<i>wall</i>	<i>fixedValue</i>	<i>zeroGradient</i>
konfuzor_gornja	<i>wall</i>	<i>slip</i>	<i>zeroGradient</i>
konfuzor_donja	<i>wall</i>	<i>slip</i>	<i>zeroGradient</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
bottomEmptyFaces	<i>empty</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>
topEmptyFaces	<i>empty</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>

Naziv rubnog uvjeta	Rubni uvjet		
	$k$	$\text{nut}(\nu_t)$	$\text{omega}(\omega)$
ulaz	<i>freestream</i>	<i>calculated</i>	<i>freestream</i>
periodička_g	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
periodička_d	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>	<i>cyclic</i>
lopatica	<i>kqRWallFunction</i>	<i>nutUSpaldingWallFunction</i>	<i>omegaWallFunction</i>
konfuzor_gornja	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
konfuzor_donja	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>zeroGradient</i>
izlaz	<i>freestream</i>	<i>freestream</i>	<i>freestream</i>
bottomEmptyFaces	<i>empty</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>
topEmptyFaces	<i>empty</i>	<i>empty</i>	<i>empty</i>

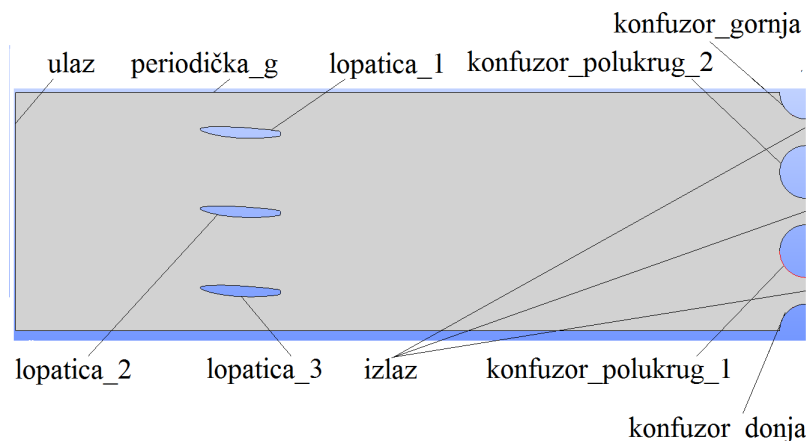
Tablica 1: Vrste granica i rubni uvjeti u programskom paketu *OpenFOAM*



Slika 4.11: Prikaz rubnih uvjeta za jednu lopaticu

Tablica 2: Rubni uvjeti za tri lopatice

Naziv rubnog uvjeta	Fizikalno svojstvo rubnog uvjeta
ulaz	patch
periodička_d	cyclic
periodička_g	cyclic
lopatica_1	wall
lopatica_2	wall
lopatica_3	wall
konfuzor_gornja	wall
konfuzor_donja	wall
konfuzor_polukrug_1	wall
konfuzor_polukrug_2	wall
izlaz_1	patch
izlaz_2	patch
izlaz_3	patch
bottomEmptyFaces	empty
topEmptyFaces	empty



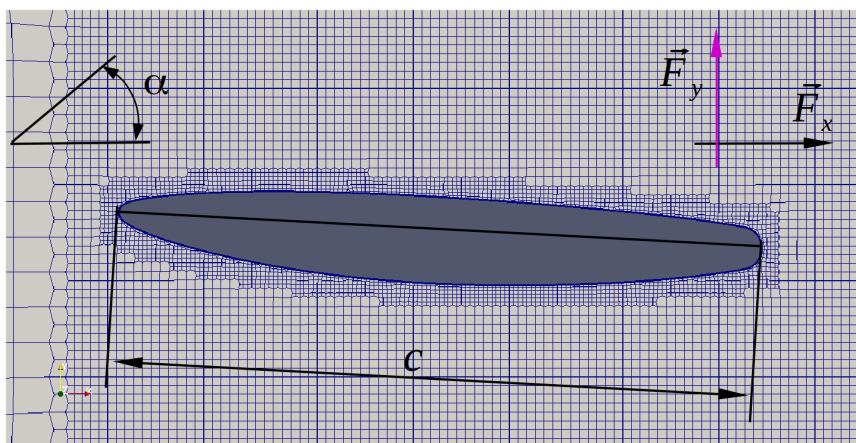
Slika 4.12: Prikaz rubnih uvjeta za tri lopatice

Rubni uvjeti za kinetičku energiju turbulencije  $k$ , specifičnu disipaciju kinetičke energije turbulencije  $\omega$ , i turbulentnu viskoznost  $\nu_t$  koje su navedene u gornjim tablicama, a primjenjuju se na čvrste nepropusne zidove, osiguravaju ispravnu primjenu zidnih funkcija. Povoljno svojstvo  $k - \omega SST$  modela turbulencije da je prirodno prilagođen strujanjima u graničnom sloju za slučaj smještaja prvog rubnog volumena na različite visine, u paketu OpenFOAM osigurano je odabirom upravo ovakvih rubnih uvjeta kako su navdani u gornjim tablicama. Kako pokazuje slika 4.10, posebna pažnja je posvećena tome da se ovaj model turbulencije primjenjuje u režimu ni-

skog Reynoldsovog broja, te se očekuje da je ovime primjena ovog modela turbulencije dovela do najtočnijeg rješenja za pojave mjesta separacije strujanja u okviru računalnih resursa koji su bili dostupni prilikom izrade ovog rada.

Rubni uvjet brzine na ulazu kod svih je proračuna bio oblika fiksne vrijednosti, u obliku konstantne raspodjele brzine apsolutnog iznosa  $v_\infty = 376$  m/s, dok su se pojedine komponente mijenjale sukladno kutu  $\alpha$ , ovisno o proučavanom slučaju, kako je prikazano na slici 4.13. Na toj slici se također vide i smjerovi djelovanja sila  $F_x$  i  $F_y$  koju se prikazane u tablici 3 te referentna površina  $A = c \cdot 1$ . Vrijednosti kuta  $\alpha$  za koje ćemo računati su  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ . U ovome se radu razmatra nestlačivo strujanje, pa su stoga rubni za polje tlaka  $p$  na svim granicama propisani kao Neumannovi (u tablicama zadano rječju zeroGradient).

Kako bi se izbjegla singularnost matrice algebarskih jednadžbi za polje tlaka, vrijednost tlaka u problemu je fiksirana zadanom vrijednošću u točki pri samoj ulaznoj granici (imena ulaz).



Slika 4.13: Prikaz ulaznog kuta fluida te smjera djelovanja sila

Izrazi za koeficijente sila koje ćemo prikazivati u dijagramima u rezultatima:

$$C_x = \frac{F_x}{1/2\rho v^2 A} \quad (4.1)$$

$$C_y = \frac{F_y}{1/2\rho v^2 A} \quad (4.2)$$

Na taj način je moguće izbjeći probleme stabilnosti rješenja uslijed pogrešnih ili nedovoljno preciznih inicijalnih pretpostavki strujanja. Kao što je poznato, za rješavanje jednadžbe tlaka je

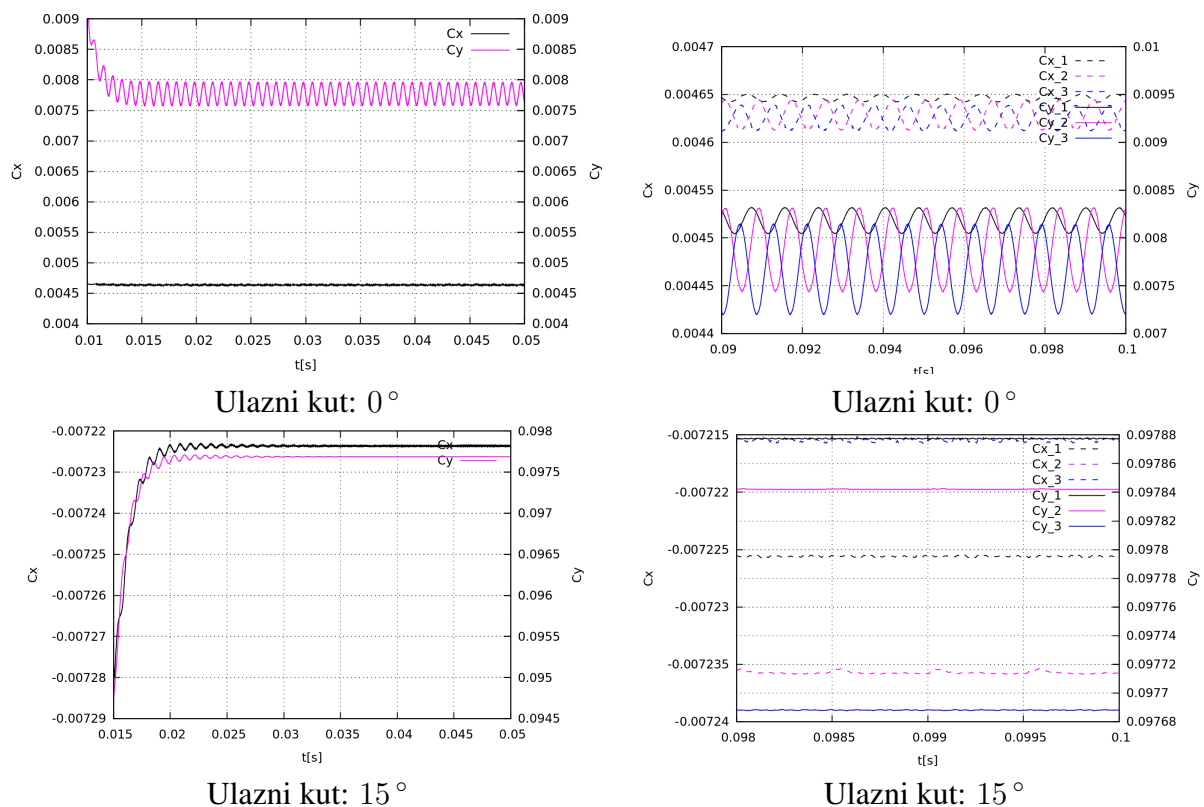
potrebno i više od 80% računalnog vremena pa će ubrzavanje rješavača linearnih algebarskih jednadžbi (u daljnjem tekstu: linearnog rješavača) jednadžbe tlaka imati puno veći utjecaj na sveukupno vrijeme računanja nego ubrzavanje linearnog rješavača jednadžbe brzine. Jednadžbu tlaka smo rješavali pomoću algebarskog višemrežnog rješavača linearnih algebarskih jednadžbi (GAMG implementacija u paketu OpenFOAM) dok su sve preostale jednadžbe rješavane pomoću simetričnog Gauss-Seidel postupka. GAMG rješavač koristi princip traženja brzog rješenja na malom broju ćelija, projekcijom tog rješenja na finiju mrežu i korištenja tog rješenja kao početnog pokušaja za finiju mrežu. Njegov cilj je biti brži od ostalih metoda tako da prvo rješava grublje mreže. Prebacivanje s grublje na finiju mrežu je odrađeno aglomeracijom ćelija.

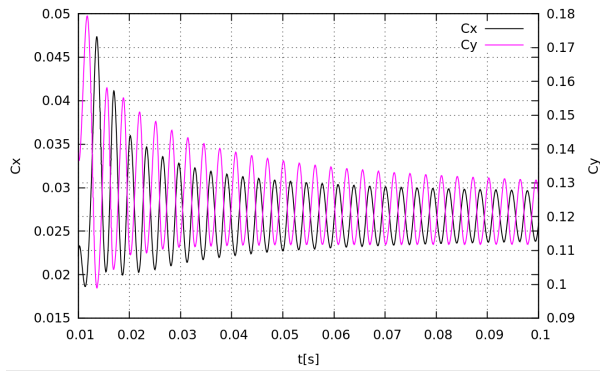
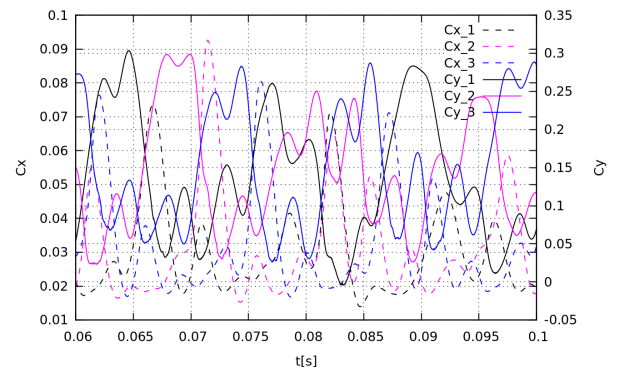
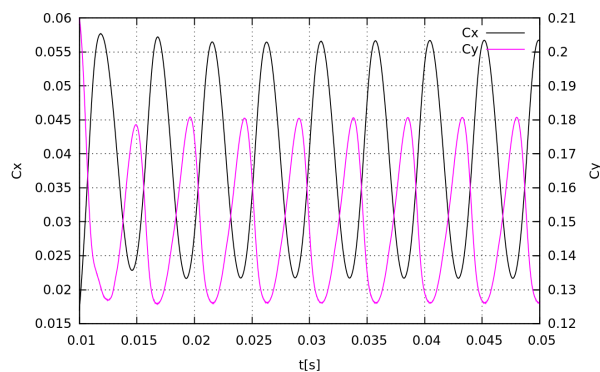
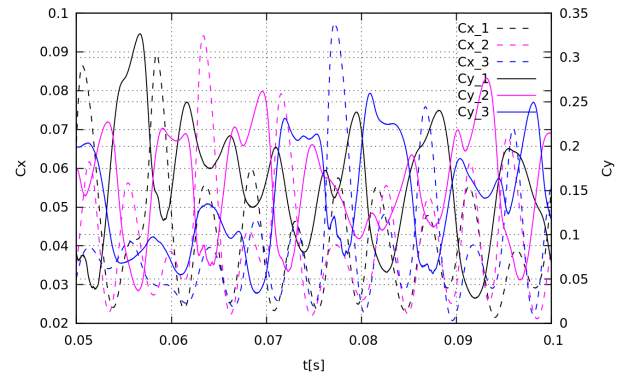
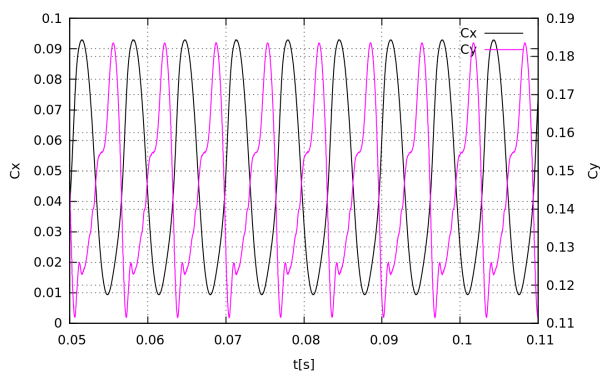
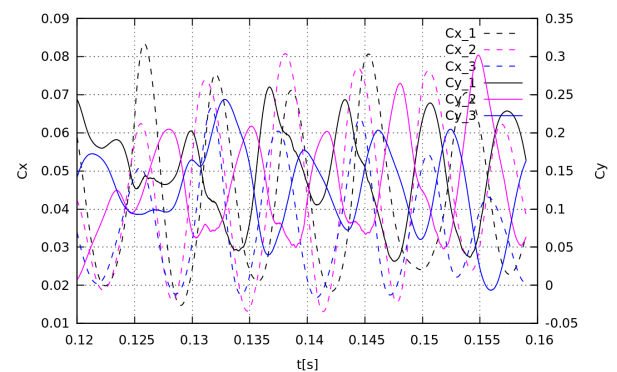
## 5 Rezultati

Kako je navedeno u poglavlju 4.1 zahtjevi za promjenom izlazne snage stacionarnih plinskih turbina uzrokuje promjenu ulaznog kuta ispušnih plinova te time i reparaciju strujanja na lopaticama ispušnog dijela kućišta koje su optimirane i aerodinamički oblikovane za rad pri kutu nastrujavanja od približno  $0^\circ$  mijenja brzina rada plinskih turbina što uzrokuje promjenu ulaznog kuta ispušnih plinova te time i otkidanje držača koji su optimirani i aerodinamički oblikovani za rad na  $0^\circ$ . Stoga su proračuni provedeni za ulazne kutove  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ .

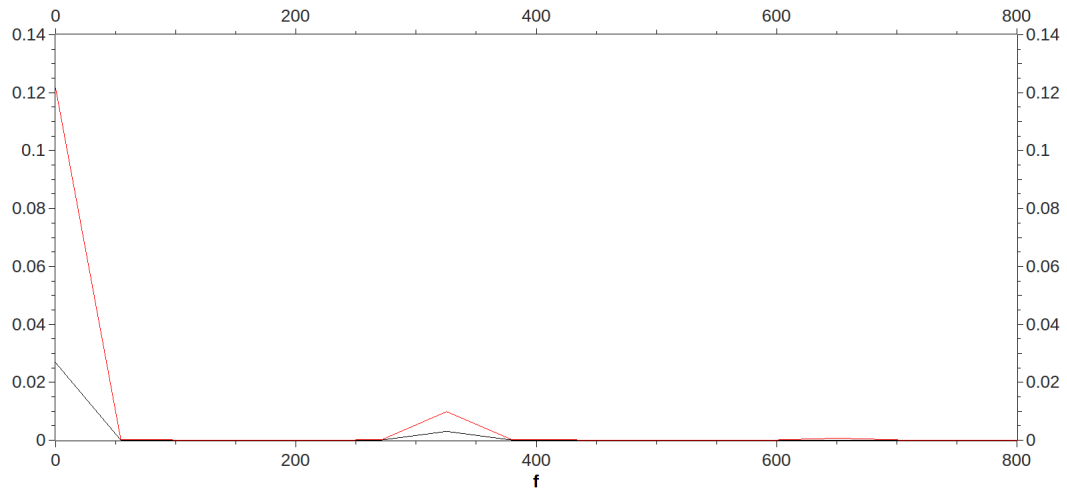
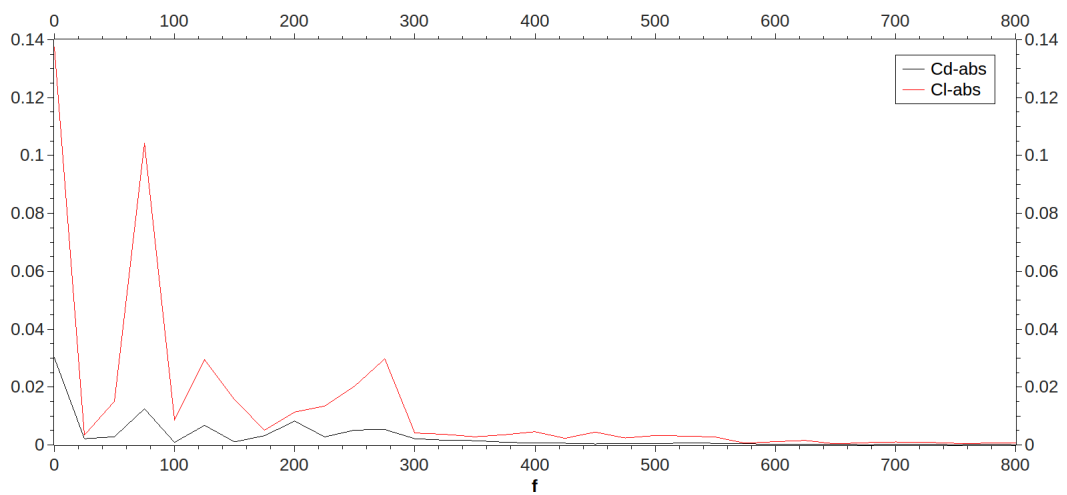
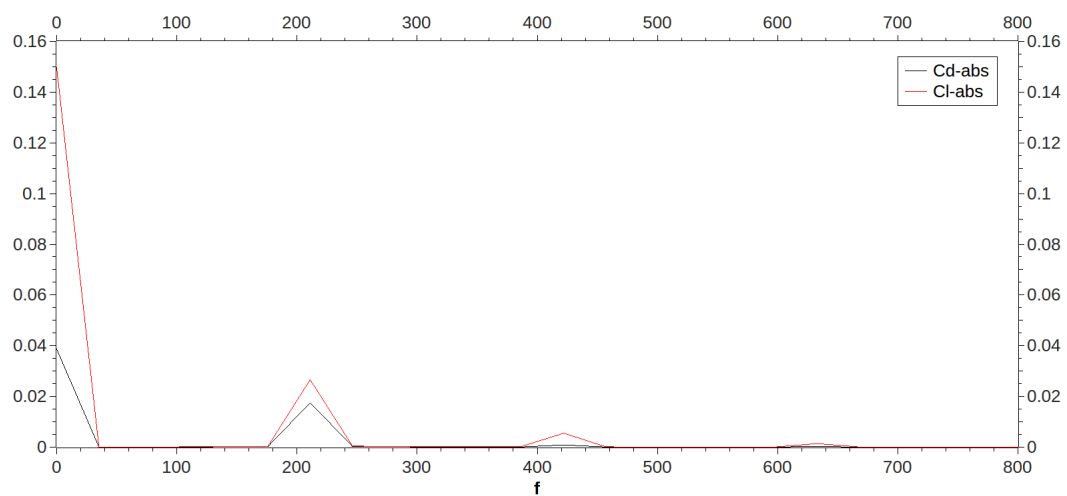
Tablica 3 prikazuje vremenske promjene koeficijenta sila po komponentama, za slučajeve ulaznih kutova  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ . Prikazi su dani usporedno: lijevo za model s jednom lopaticom i desno za model s tri lopatice. Vidljivo je da se za slučaj malih kuteva nastrujavanja na ulazu ( $\alpha = 0^\circ$  i  $\alpha = 15^\circ$ ) rješenja dobivena za ova dva modela uvelike poklapaju. Pri većim kutevima nastrujavanja ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  i  $\alpha = 60^\circ$ ) to nije slučaj.

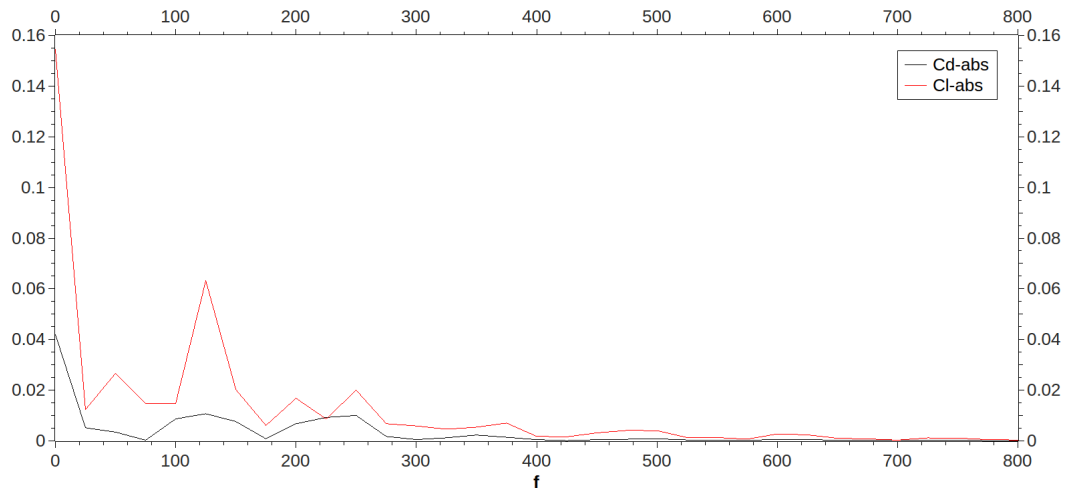
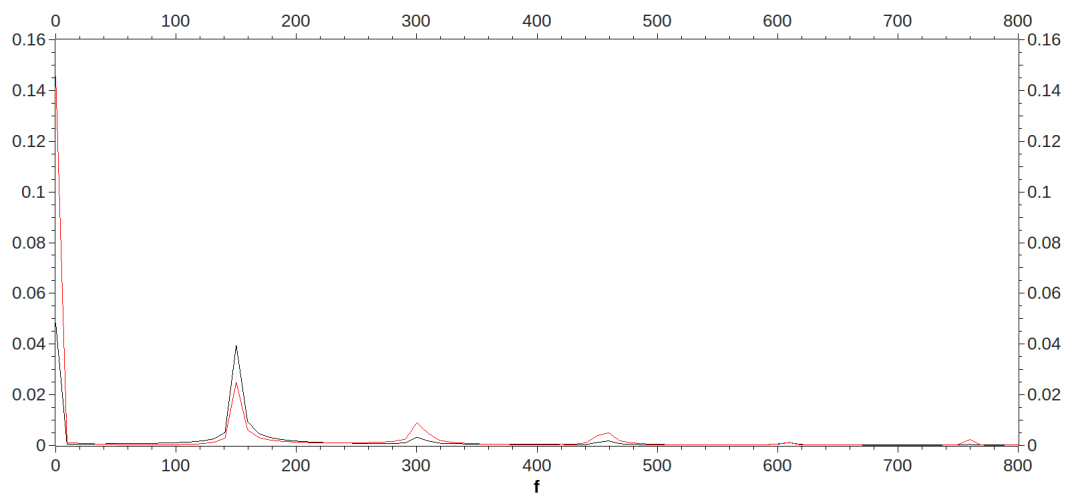
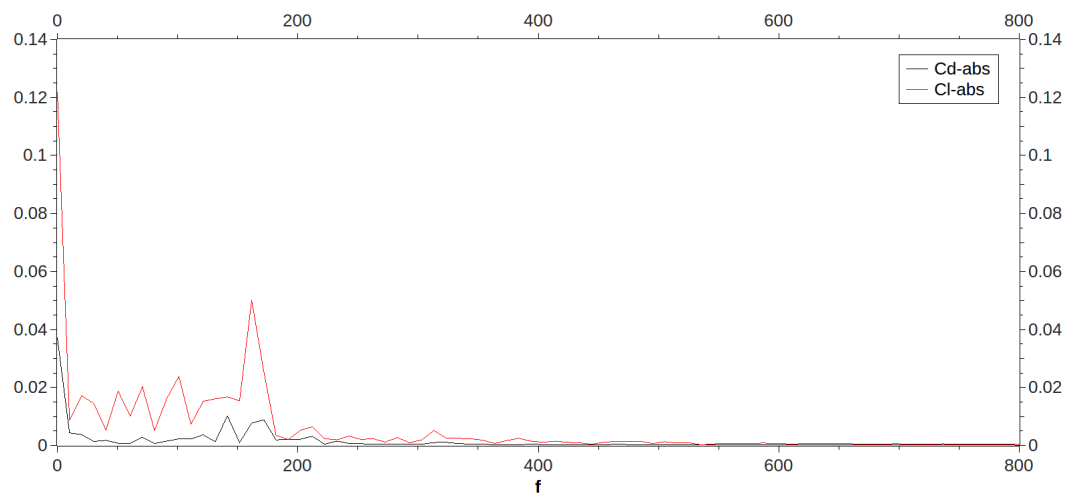
Tablica 3: Tablica koeficijenta sile u smjeru osi  $x$  i osi  $y$  za različite ulazne kutove fluida  
**Proračun s jednom lopaticom** **Proračun s tri lopatice**



Ulazni kut:  $30^\circ$ Ulazni kut:  $30^\circ$ Ulazni kut:  $45^\circ$ Ulazni kut:  $45^\circ$ Ulazni kut:  $60^\circ$ Ulazni kut:  $60^\circ$ 

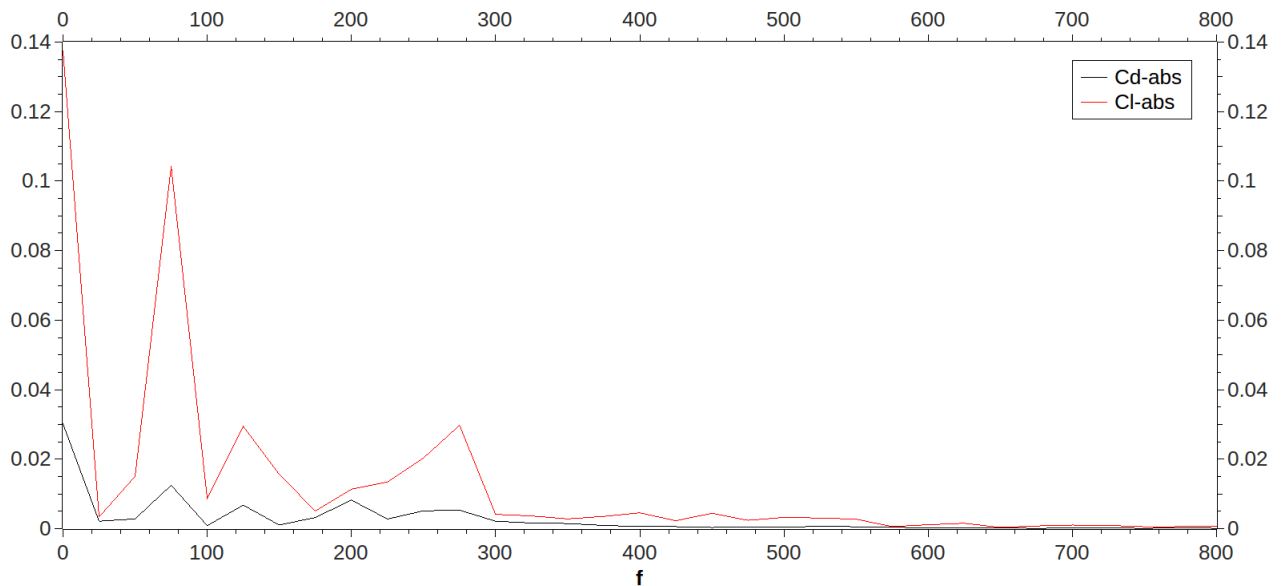
Pri većim kutevima nastrojavanja, može se primijetiti porast srednjih vrijednosti koeficijenta, kao i pojava oscilacija većih amplituda, te znatna razlika među rješenjima dobivenim modelom s jednom i s tri lopatice. Stoga je provedena Fourierova analiza za koeficijente  $x$  i  $y$  komponente sile, za koju su raspodjele amplituda koeficijenata u frekvencijskom području prikazane na slikama 5.1 do 5.6, samo za ulazne kutove na kojima su oscilacije izraženije:  $\alpha=30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ .

Slika 5.1: Ulazni kut  $30^\circ$  modela s jednom lopaticomSlika 5.2: Ulazni kut  $30^\circ$  modela s tri lopaticeSlika 5.3: Ulazni kut  $45^\circ$  modela s jednom lopaticom

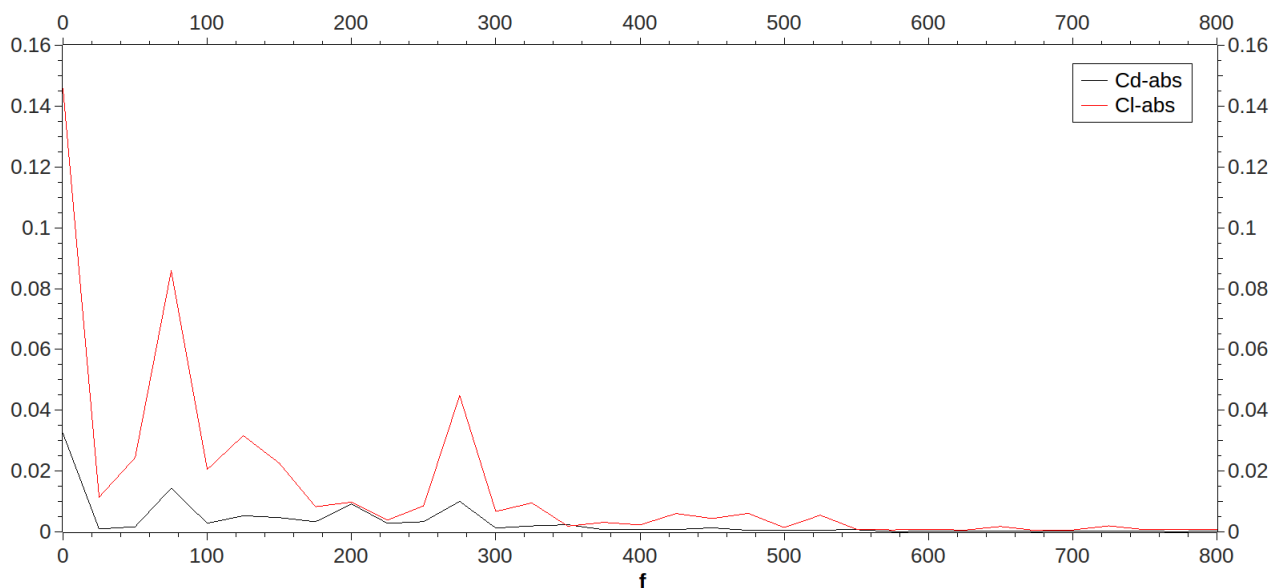
Slika 5.4: Ulazni kut  $45^\circ$  modela s tri lopaticeSlika 5.5: Ulazni kut  $60^\circ$  modela s jednom lopaticomSlika 5.6: Ulazni kut  $60^\circ$  modela s tri lopatice



Sa slika 5.7 i 5.8 vidimo da su frekvencije iste za svaku od lopatica u modelu s tri lopatice, pri istom kutu nastrojavanja, a iz vremenskog područja (kako već i sada stoji), da su pomaknute u fazi.



Slika 5.7: Ulazni kut  $30^\circ$  i lopatica 1



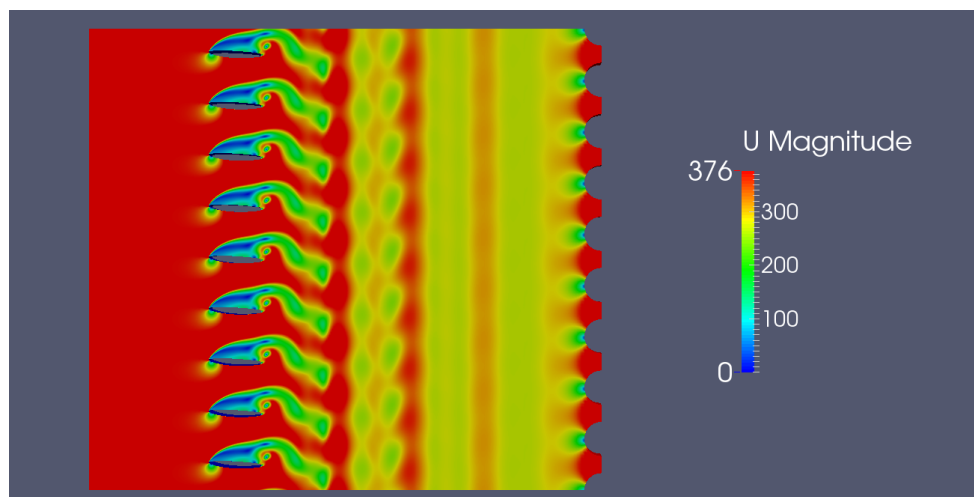
Slika 5.8: Ulazni kut  $30^\circ$  i lopatica 3

Pregledom frekvencijskog prikaza amplituda koeficijenata se može primijetiti da se dominantne frekvencije pulsacija smanjuju s porastom kuta nastrojavanja. Također zaključujemo da dominantna frekvencija za slučaj modela s jednom i modela s tri lopatice pri istom kutu nastrojavanja nije ista. Iz dijagrama se vidi da pri kutu nastrojavanja  $\alpha=30^\circ$  za model s jednom lopaticom iznosi

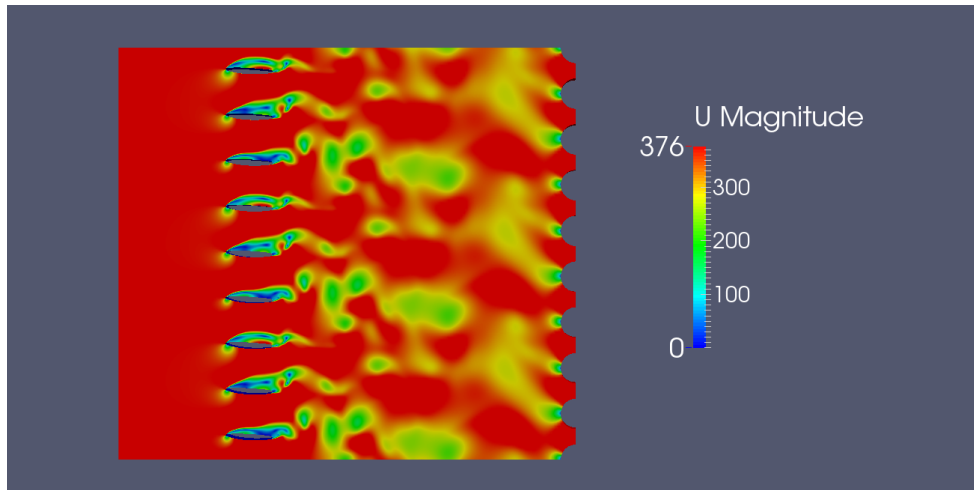
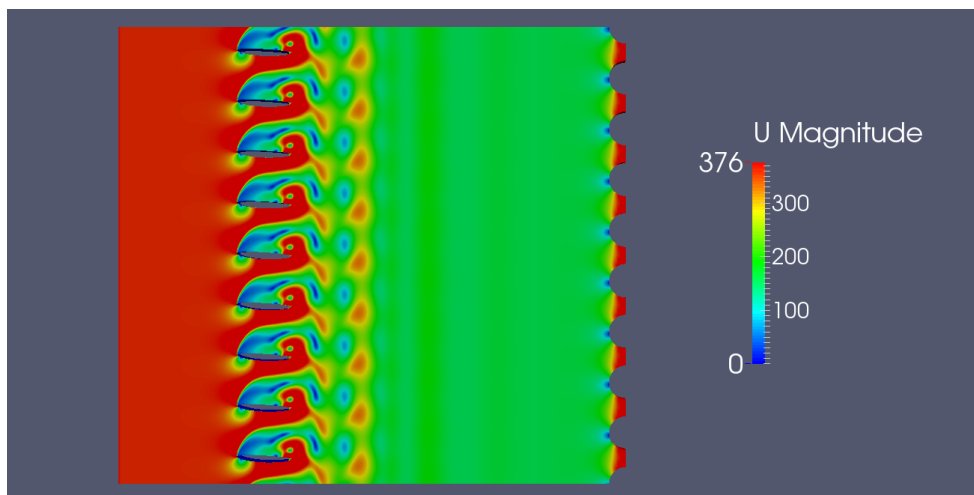
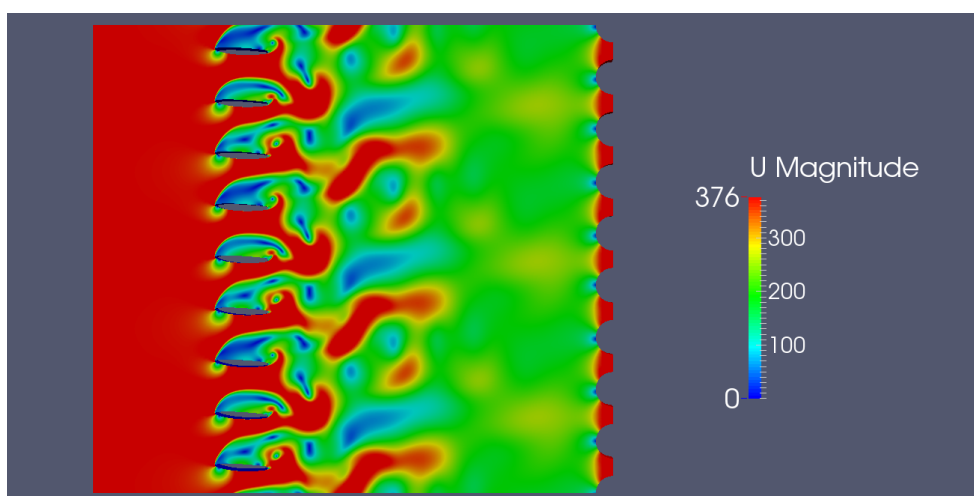
približno 260 Hz a za model s tri lopatice iznosi približno 75 HZ. Za slučajeve kuta nastrojavanja  $\alpha=45^\circ$  i  $60^\circ$  primjećujemo slične razlike u dominantnoj frekvenciji kako je prikazano u tablici 4. Također se može zaključiti da u slučaju modela s tri lopatice dolazi do pojave dodatnih značajnih frekvencija, koje nisu prisutne u modelu s jednom lopaticom, a usporedbom sa odgovarajućim prikazima iznosa koeficijenata u vramenskom području vidljivo je i da dolazi do faznog pomaka po lopaticama u modelu s tri lopatice.

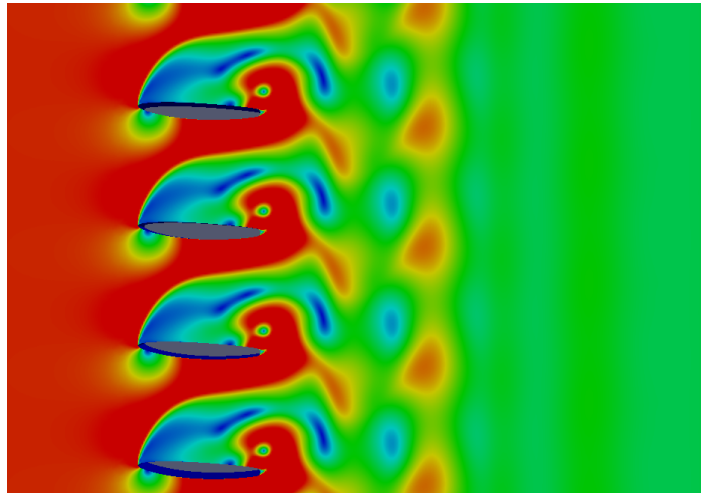
Uzrok za ovakvo ponašanje sila u modelu s tri lopatice najbolje se može objasniti usporednim prikazom strujnog polja kakvo se pojavljuje u ova dva modela.

Slike 5.9 do 5.14 prikazuju raspodjelu polja apsolutne vrijednosti brzine u odabranim vremenskim trenucima za oba modela proračuna. Radi jasnijeg prikaza, slike su u skladu s zadanim periodičkim granicama u modelima, također ponovljene više puta. Kod modela s jednom lopaticom 9 puta, a modela s tri lopatice 3 puta.

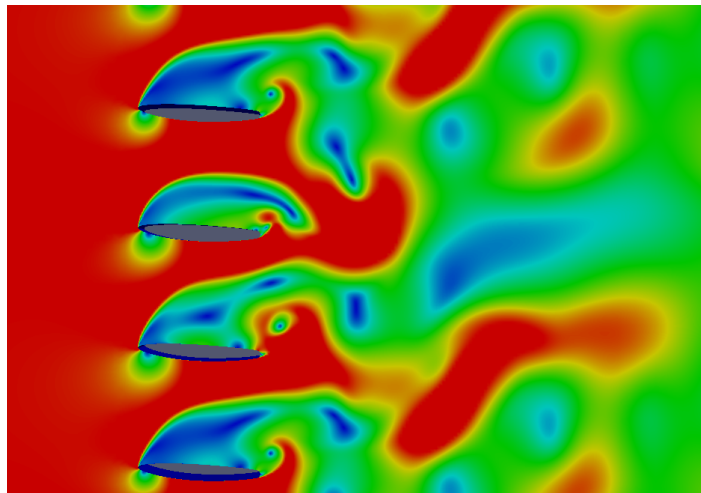


Slika 5.9: Slika za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut  $30^\circ$

Slika 5.10: Slika za slučaj s tri lopaticei ulazni kut  $30^\circ$ Slika 5.11: Slika za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut  $60^\circ$ Slika 5.12: Slika za slučaj s tri lopatice i ulazni kut  $60^\circ$



Slika 5.13: Slika područja oko lopatica za slučaj s jednom lopaticom i ulazni kut  $60^\circ$



Slika 5.14: Slika područja oko lopatica za slučaj s tri lopatice i ulazni kut  $60^\circ$

Izravnom usporedbom prikazanih polja u modelu s jednom i modelu s tri lopatice za isti kut nastrojavanja, u sva je tri slučaja zamjetna znatna interakcija vrtložnih tragova međusobno susjednih lopatica u modelu s tri lopatice. Uslijed ovoga, dolazi i do ranije spomenutog pomaka u fazi kod modela s tri lopatice i izlučivanja novih značajnih frekvencija.

Ovime se zaključuje da je prilikom modeliranja ovakvih pojava potreban poseban oprez pri zadavanju uvjeta periodičnosti. Kako je do sada prikazano, ukoliko se uvjeti periodičnosti zadaju u isuviše malom koraku (primjer modela s jednom lopaticom naspram onog s tri), izgledno je da se računalnom simulacijom neće otkriti sve pojave od interesa ( u ovome slučaju iznosi sila, u što potpunijem vremenskom zapisu). U ovome je radu zorno prikazan takav slučaj, te se preporučuje u

budućim istraživanjima maksimalno koristiti dostupne računalne resurse, posebno uvođenjem pretpostavke o prostornoj periodičnosti problema što većeg iznosa (u ovome slučaju dvodimenzijskog modela preporuka bi odgovarala proračunu na punom modelu, koji uključuje cjelokupni vijenac od svih 9 lopatica).

Iako su u okviru računalnih resursa koji su bili dostupni tijekom izrade ovog rada, usvojeni modeli nužno bili dvodimenzijski uz primjenu nestlačivog modela strujanja, izgledno je da su dobiveni rezultati korisni sa stajališta određivanja približne frekvencije pojave sila i reda veličine njihova iznosa koji se mogu pojaviti na stvarnom, punom trodimenzijском modelu. Ovdje se iznova naglašava da se zaključak o nametanju periodičnosti koji je dobiven u dvodimenzijским modelima može protegnuti kao preporuka i pri usvajanju trodimenzijskog modela, gdje bi također trebalo pretpostavku o pojavi periodičnosti proširiti na što veći broj lopatica, ili po mogućnosti usvojiti puni model.

U svjetlu rečenog, slijedi ilustracija iznosa srednje vrijednosti  $y$  komponente aerodinamičke sile, koja bi se mogla pojaviti na lopatici punog modela izlaznog dijela kućišta plinske turbine:

Za gustoću fluida  $\rho = 0.457 \text{ kg/m}^3$  (vrući dimni plinovi na  $500^\circ\text{C}$ ) i srednji iznos koeficijenta sile 0.175, očitnog za 1 lopaticu i kut nastrojavanja  $\alpha=60^\circ$  iz tablice 3, te već prije definirane iznose brzine i relevantne površine, iznos  $y$  komponente sile je

$$F_y = C_y \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 A = (0.175 \pm 0.125) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.457 \cdot 376^2 \cdot 0.917845 = 5.1888 \pm 3.7603 \text{ kN/m} \quad (5.1)$$

Prema priloženom primjeru, može se zaključiti da je aerodinamička sila koja nastaje uslijed odvajanja strujanja sa lopaticom u izlaznom dijelu kućišta stacionarnih plinskih turbina jedan od glavnih uzroka zamora materijala zaštitne oplata i njenog oštećenja.

## 6 Zaključak

U ovome su radu provedene računalne simulacije kućišta izlaznog dijela turbine zbog loma oplata kada turbina ne radi pri optimalnom opterećenju pa dimni plinovi na izlazu ulaze pod drugačijim kutom od predviđenog.

Proračuni su provedeni primjenom dva modela, modela s jednom lopaticom i modela s tri lopatice, različitih mreža svaki sa po 5 kutova nastrojavanja.

Geometrijski model izrađen je u programskom paketu Salome, diskretizacija prostora obavljena paketom cfMesh a proračuni provedeni paketom OpenFoam. Za ove su proračune priloženi rezultati u obliku tablica, dijagrama, silka i prikaza polja brzine.

Temeljem dobivenih rezultata, zaključuje se da pri većim kutevima nastrojavanja dolazi do porasta srednjih vrijednosti koeficijenta, kao i pojava oscilacija većih amplituda, te znatna razilka među rješenjima dobivenim modelom s jednom i s tri lopatice. Iako su u okviru računalnih resursa koji su bili dostupni tijekom izrade ovog rada, usvojeni modeli nužno bili dvodimenzijски uz primjenu nestlačivog modela strujanja, izgledno je da su dobiveni rezultati korisni sa stajališta određivanja približne frekvencije pojave sila i reda veličine njihova iznosa koji se mogu pojaviti na stvarnom, punom trodimenzijском modelu.

Također da je prilikom modeliranja ovakvih pojava potreban poseban oprez pri zadavanju uvjeta periodičnosti. Kako je do sada prikazano, ukoliko se uvjeti periodičnosti zadaju u isuviše malom koraku (primjer modela s jednom lopaticom naspram onog s tri), izgledno je da se računalnom simulacijom neće otkriti sve pojave od interesa. U ovome je radu zorno prikazan takav slučaj, te se preporučuje u budućim istraživanjima maksimalno koristiti dostupne računalne resurse, posebno uvođenjem pretpostavke o prostornoj periodičnosti problema što većeg iznosa.

## Literatura

- [1] Virag, Z. i Džijan, I: *Računalna dinamika fluida*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [2] Virag, Z.: *Mehanika fluida II*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
- [3] Sorić, J.: *Uvod u numeričke metode u strojarstvu*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [4] Menter, F. R.: *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*, AIAA Journal, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605, August 1994.
- [5] OpenFOAM UserGuide, 2015.
- [6] Juretić F.: *CfMesh User Guide*, Zagreb, 2015.
- [7] Salome version 7.6.0 , Public realese annoucement, 2015.
- [8] CFD Online, <http://www.cfd-online.com/Wiki>
- [9] Kraut, B.: *Strojarski priručnik*, Sajema d.o.o., Zagreb, 2009.

## **Prilozi**

- I. CD-R disc