

# Proračun steznog sustava limova energetskog transformatora pri savijanju

---

**Zoričić, Filip**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:015271>

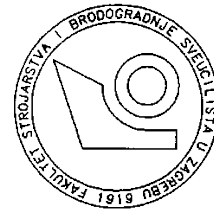
*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



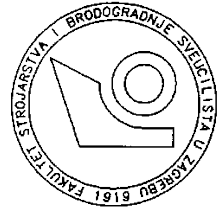


SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Filip Zoričić**

Zagreb, 8. srpnja 2015.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

---

## Proračun horizontalnog savijanja steznika

---

Mentori:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.

Student:

Filip Zoričić

Zagreb, 8. srpnja 2015.

## IZJAVA I ZAHVALA

Izjavljujem da sam rad radio samostalno koristeći se stečenim znanjem na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, te navedenom literaturom.

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Igoru Karšaju na nesebičnoj pomoći, dostupnosti, te stručnom usmjeravanju i ugodnoj suradnji u izradi ovog rada.

Zahvaljujem se dipl.ing. Hrvoje Draškoviću i dipl.ing. Robertu Kranjčecu koji su omogućili izradu ovog diplomskog rada.

Posebno se zahvaljujem dipl.ing. Hrvoju Draškoviću na svom dosadašnjem uloženom trudu, vremenu i povjerenju, kao i na susretljivosti i korisnim savjetima tijekom izrade ovog rada.

Veliku zahvalu također dugujem prof.dr.sc Zdravku Viragu, pro.dr.sc. Hinku Wolfu, mag.ing. Lani Virag, doc.dr.sc Tomislavu Buriću, bacc.ing. Damjanu Čakamku i mag.ing. Borisu Jalušiću, na svim zanimljivim i korisnim diskusijama koje su mi mnogo pomogle u razumijevanju i rješavanju problema koji su se javljali tijekom izrade ovog rada, posebno u programskom paketu Matlab.

Zahvaljujem na svim korištenim materijalima koje je ustupila tvrtka Končar Energetski transformatori d.d., na čemu im iskreno zahvaljujem,

Zahvaljujem na podršci, korisnim razgovorima i prijateljskoj podršci svim kolegama s FSB-a, koji su mi pomogli u izradi ovog rada.

Također zahvaljujem roditeljima i svojoj djevojci na bezuvjetnoj podršci koju su mi pružili tijekom studija.

Filip Zoričić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Filip Zoričić**

Mat. br.: 0035179077

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun steznog sustava limova energetskog transformatora pri savijanju**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of the power transformers clamping system due to bending**

Opis zadatka:

Energetski transformatori proizvode se s izvedbom steznog sustava u obliku ravne ploče. Svrha steznog sustava je osigurati tlak između limova jezgre. Tlak se osigurava pomoću svornjaka i/ili steznih traka. Proračun steznog spoja na savijanje radi se pomoću relativno jednostavnog, ali konzervativnog analitičkog proračuna. Kako je plan u budućnosti navedeni problem standardno rješavati metodom konačnih elemenata, potrebno je napraviti proračun nekoliko različitih izvedbi steznog spoja pomoću grednog i trodimenzijskog modela.

U okviru diplomskog rada potrebno je napraviti proračun nekih standardnih slučajeva izvedbe steznih sustava s unaprijed definiranim rubnim uvjetima. Proračun je potrebno kontrolirati analitički te provjeriti numerički primjenom metode konačnih elemenata. Jednodimenzijski model predstavlja Euler-Bernoullijevu gredu na nelinearno-elastičnom osloncu s unaprijed definiranim svojstvima. Osim toga, potrebno je napraviti usporedbu rezultata korištenjem grednih (1-D) i trodimenzijskih elemenata. Trodimenzijski proračun potrebno je napraviti na jednom odabranom primjeru iz prethodno proračunatog 1-D modela. Svi crteži, sastavnice, rubni uvjeti kao i ostale informacije bit će dostavljene od strane mentora.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

7. svibnja 2015.

Zadatak zadao:

Doc.dr.sc. Igor Karšaj

Rok predaje rada:

9. srpnja 2015.

Predviđeni datumi obrane:

15., 16. i 17. srpnja 2015.

Predsjednica Povjerenstva:

Tj- Jurčević Lulić  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. Opis problema .....	1
1.2. Glavni dijelovi transformatora .....	3
2. Stezni sustav limova transformatora.....	5
2.1. Općenito o steznom sustavu limova transformatora .....	5
2.2. Nelinearno ponašanje podloge limova transformatora .....	8
3. Teorija konstrukcija na elastičnoj podlozi.....	9
3.1. Proračun krutosti pojedinih nelinearnih opruga.....	14
4. Metoda konačnih elementa .....	16
4.1. Primijenjeni konačni elementi .....	16
4.2. Prostorni gredni konačni element – BEAM188 K.E.....	16
4.3. Konačni element nelinearne opruge – COMBIN39 K.E. ....	18
4.4. Prizmastični konačni elementi za 3D mreže – SOLID186 K.E. ....	18
4.5. Implementacija elastične krutosti podloge u FEM programske pakete .....	19
5. Nelinearna analiza .....	21
5.1. Newton-Raphson iterativna metoda (metoda tangente).....	24
6. Verifikacije .....	26
6.1. PRIMJER I – Konzola opterećena kontinuiranim opterećenjem.....	26
6.1.1. Konzola na elastičnoj podlozi opterećena kontinuiranim opterećenjem .....	31
6.2. PRIMJER II – Nelinearna opruga opterećenja definiranim progibom .....	34
6.3. PRIMJER III – Greda s uklonjenom podlogom – čisto savijanje.....	36
6.3.1. Analitičko rješenje .....	36
6.3.2. Numeričko rješenje u programskom paketu ANSYS 14.0 .....	38
6.4. PRIMJER IV– Greda konačne duljine na elastičnoj podlozi.....	40
6.4.1. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi s onemogućenim pomacima na krajevima .....	40
6.4.2. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi .....	43

6.4.3.	Rješenje metodom konačnih elemenata – EFS parametar .....	47
6.4.4.	Rješenje metodom konačnih elemenata – numerički model s oprugama .....	49
6.4.5.	Usporedba svih rezultata – Primjer IV .....	53
6.5.	PRIMJER V – Greda konačne duljine na oprugama s nelinearnom karakteristikom krutosti .....	53
7.	Numerički 1D modeli horizontalnog savijanja steznika.....	55
7.1.	Jezgra 1/2: .....	55
7.1.1.	Opterećenje s bandažama.....	55
7.1.2.	Opterećenje s vijcima.....	64
7.2.	Jezgra 2/0 .....	70
7.2.1.	Opterećenje s bandažama.....	70
7.2.2.	Opterećenje s vijcima:.....	78
7.3.	Rezultati numeričkih analiza svih 11 slučajeva opterećenja.....	84
8.	Numerički 3D modeli horizontalnog savijanja steznog sustava.....	85
8.1.	Jezgra 2/0 3D model s nelinearnim oprugama.....	85
8.1.1.	Rezultati ANSYS 3D modela s nelinearnim oprugama:.....	86
9.	ZAKLJUČAK.....	89

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Primjer steznog sustava limova transformatora .....	2
Slika 2. Tipični dijelovi transformatora [4].....	4
Slika 3. Stegnuta metalna jezgra transformatora od tankih limova [8] .....	5
Slika 4. Poprečni presjek jezgre transformatora [9] .....	6
Slika 5. Dijelovi gornjeg dijela steznog sustava [2].....	7
Slika 6. Nelinearna karakteristika krutosti jezgre .....	8
Slika 7. Diskretizacija ploče na kontinuiranoj podlozi s gredom na oprugama [37] .....	10
Slika 8. Greda na elastičnoj podlozi [12] .....	10
Slika 9. Određivanje modula podloge pomoću hidrauličke naprave [37].....	11
Slika 10. Eksponencijalno trigonometrijske funkcije [12].....	12
Slika 11. Greda koja se nalazi na podlozi koju zamjenjuje serija opruga [39] .....	12
Slika 12. Diskretizacija grede na nelinearnoj elastičnoj podlozi s promjenjivom krutosti pod duljini grede [35] .....	14
Slika 13. Primjer promjenjivih rubnih uvjeta uslijed opterećenja [25] .....	14
Slika 14. Diskretizirani pristup proračuna grede na elastičnoj podlozi [38] .....	15
Slika 15. BEAM188 linearni prostorni jednodimenzijski konačni element [55].....	17
Slika 16. a) COMBIN39 Nelinearni opružni element, b) Nelinearna karakteristika opruge [56] .....	18
Slika 17. SOLID186 3D Konačni element [55] .....	19
4) Slika 18. SURF 153 1D-konačni element [55].....	20
Slika 19. Promjenjivi rubni uvjeti – nelinearni problem kontakta [25] .....	22
Slika 20. Ponašanje materijala: a) linearno elastično, b) nelinearno elastično (hiperelastično), c) plastično [25].....	22
Slika 21. Horizontalna greda ukliještena na oba kraja opterećena poprečnom silom u sredini [23] .....	23
Slika 22. Vitki štap opterećen poprečnom silom (a), opterećen poprečnom i uzdužnom vlačnom silom (b), te opterećen poprečnom i uzdužnom tlačnom silom (c) [29] .....	23
Slika 23. Newton-Raphson iterativni postupak [24] .....	25



Slika 24. Konzola opterećena kontinuiranim opterećenjem [19] .....	26
Slika 25. Usporedba raspodjele progiba Galerkinovom metodom i točnog rješenja ( <i>Matlab</i> )	29
Slika 26. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i vertikalnog progiba (plavo) po duljini konzole za najgušću mrežu K.E. (20 K.E.) .....	29
Slika 27. Ekvivalentna naprezanja 3D modela konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem .....	30
Slika 28. Konvergencija progiba - konzola .....	30
Slika 29. Konvergencija Von-Mises naprezanja- konzola .....	30
Slika 30. Konzola na elastičnoj podlozi opterećena kontinuiranim opterećenjem .....	31
Slika 31. Progib konzole na elastičnoj podlozi .....	32
Slika 32. Usporedba raspodjele progiba za konzolu bez i s podlogom .....	32
Slika 33. Konzola na elastičnoj podlozi – 1-D ANSYS model .....	33
Slika 34. Raspodjela progiba konzole na elastičnoj podlozi .....	33
Slika 35. Raspodjela naprezanja konzole na elastičnoj podlozi .....	33
Slika 36. Nelinearna opruga opterećena definiranim progibom u smjeru Y-osi .....	34
Slika 37. Sila u opruzi uslijed progiba (nelinearna karakteristika opruge) – ANSYS 14.0 .....	34
Slika 38. Sila u opruzi uslijed progiba (nelinearna karakteristika opruge) – ABAQUS CAE 6.10. ....	35
Slika 39. Pojednostavljeni analitički proračun grede (Jezgra $\frac{1}{2}$ ) .....	36
Slika 40. Momenti dijagram .....	37
Slika 41. Dijagram naprezanja uslijed savijanja .....	37
Slika 42. Progib grede .....	38
Slika 43. Relativni progib grede .....	38
Slika 44. Čisto savijanje grede - 1D model (Jezgra $\frac{1}{2}$ ) .....	38
Slika 45. Progib u smjeru osi Y .....	39
Slika 46. Naprezanje uslijed savijanja .....	39
Slika 47. Rubni uvjeti i opterećenje 2D modela čistog savijanja grede .....	39
Slika 48. Raspodjela naprezanja 2D modela čistog savijanja grede .....	39
Slika 49. Greda na elastičnoj podlozi s onemogućenim pomacima na krajevima [49] .....	41

Slika 50. Raspodjela progiba [mm].....	41
Slika 51. Momenti dijagram [kNm] .....	41
Slika 52. Dijagram poprečnih sila [kN] .....	41
Slika 53. Kut nagiba uslijed progiba [°].....	41
Slika 54. 1-D (gredni) ANSYS model s linearnim oprugama i zglobnim osloncima na rubovima (najgušća mreža od 50 K.E.) .....	42
Slika 55. Raspodjela progiba.....	43
Slika 56. Raspodjela savojnog naprezanja .....	43
Slika 57. Konvergencija progiba i savojnog naprezanja za 1-D ANSYS model .....	43
Slika 58. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi s razmakom [34] .....	44
Slika 59. Raspodjela progiba u blizini mjesta opterećenja.....	44
Slika 60. Raspodjela momenta u blizini mjesta opterećenja.....	45
Slika 61. Raspodjela poprečnih sila u blizini mjesta opterećenja .....	46
Slika 62. 3D Numerički model grede na elastičnoj podlozi – ANSYS 14.0 .....	47
Slika 63. Raspodjela progiba za primjer IV – ANSYS.....	48
Slika 64. Raspodjela naprezanja za primjer IV - ANSYS .....	48
Slika 65. Konvergencija progiba - ANSYS .....	48
Slika 66. Konvergencija naprezanja - ANSYS .....	48
Slika 67. Primjer IV - 1-D ANSYS model s linearnim oprugama.....	49
Slika 68. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo) – 1- D ANSYS model s oprugama .....	50
Slika 69. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja 1-D ANSYS model s oprugama.....	50
Slika 70. Numerički model s linearnim oprugama (najgušća mreža K.E.) - ANSYS .....	51
Slika 71. Progib - primjer IV s linearnim oprugama.....	52
Slika 72. Naprezanje u smjeru X-osi uslijed savijanja - primjer IV s linearnim oprugama.....	52
Slika 73. Greda koja leži na nelinearnoj podlozi i opterećena silom $F$ [53] .....	54
Slika 74. ANSYS 1D model grede na nelinearnoj podlozi.....	54
Slika 75. Raspodjela progiba – Primjer V .....	54

Slika 76. Raspodjela momenta savijanja- Primjer V.....	54
Slika 77. Jezgra 1/2 s bandažama.....	55
Slika 78. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 1/2 s bandažama ..	57
Slika 79. Dijagram sile reziduala i broja iteracija – Jezgra 1/2.....	58
Slika 80. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo) – Jezgra 1/2 s bandažama .....	59
Slika 81. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 1/2 s bandažama.....	59
Slika 82. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 1/2 s bandažama .....	60
Slika 83. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 1/2 s bandažama .....	60
Slika 84. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 1/2 s bandažama.....	60
Slika 85. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2.....	62
Slika 86. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2.....	63
Slika 87. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 .....	63
Slika 88. Jezgra 1/2 s vijcima.....	64
Slika 89. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 1/2 s vijcima.....	65
Slika 90. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)- Jezgra 1/2 s vijcima .....	65
Slika 91. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 1/2 s vijcima .....	66
Slika 92. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 1/2 s vijcima.....	66
Slika 93. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 1/2 s vijcima .....	67
Slika 94. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 1/2 s vijcima.....	67
Slika 95. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima .....	68
Slika 96. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima .....	68
Slika 97. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima....	69
Slika 98. Jezgra 2/0 s bandažama.....	70

Slika 99. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - 1D model Jezgra 2/0 s bandażama .....	71
Slika 100. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)- 1D model Jezgra 2/0 s bandażama .....	72
Slika 101. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 2/0 s bandażama .....	72
Slika 102. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 2/0 s bandażama .....	73
Slika 103. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 2/0 s bandażama .....	73
Slika 104. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 2/0 s bandażama.....	73
Slika 105. 2D ANYSY model Jezgra 2/0 s bandażama .....	75
Slika 106. Raspodjela vertikalnog progiba 2D modela u smjeru Y-osi → Jezgra 2/0.....	75
Slika 107. Raspodjela normalnih naprezanja 2D modela u smjeru X-osi → Jezgra 2/0 .....	76
Slika 108. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0.....	76
Slika 109. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0.....	77
Slika 110. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 .....	77
Slika 111. Jezgra 2/0 s vijcima.....	78
Slika 112. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 2/0 s vijcima.....	79
Slika 113. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)- Jezgra 2/0 s vijcima .....	80
Slika 114. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 2/0 s vijcima .....	80
Slika 115. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 2/0 s vijcima.....	81
Slika 116. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 2/0 s vijcima .....	81
Slika 117. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 2/0 s vijcima.....	81
Slika 118. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 s vijcima .....	82
Slika 119. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 s vijcima .....	83
Slika 120. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 s vijcima ...	83
Slika 121. 3D ANYSY model Jezgra 2/0 s bandażama .....	85

Slika 122. Raspodjela vertikalnog progiba 3D modela u smjeru Y-osi → Jezgra 2/0.....	86
Slika 123. Raspodjela normalnih naprezanja 3D modela u smjeru X-osi → Jezgra 2/0 .....	86
Slika 124. Usporedba savojnog naprezanja 1D, 2D, 3D i KPT modela .....	87
Slika 125. Usporedba vertikalnog progiba 1D, 2D, 3D i KPT modela.....	87
Slika 126. Usporedba vertikalnog progiba 1D, 2D, 3D i KPT modela.....	88

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Rezultati konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem .....	30
Tablica 2. Rezultati čistog savijanja grede (Jezgra $\frac{1}{2}$ ) .....	40
Tablica 3. Rezultati konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem .....	53
Tablica 4. Zadani parametri – Jezgra $\frac{1}{2}$ s bandažama.....	56
Tablica 5. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra $\frac{1}{2}$ s bandažama.....	61
Tablica 6. Zadani parametri – Jezgra $\frac{1}{2}$ s vijcima.....	64
Tablica 7. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra $\frac{1}{2}$ s vijcima.....	67
Tablica 8. Zadani parametri – Jezgra $\frac{2}{0}$ s bandažama.....	70
Tablica 9. Rezultati ekstremnih vrijednosti– 1D model Jezgra $\frac{2}{0}$ s bandažama.....	74
Tablica 10. Zadani parametri – Jezgra $\frac{2}{0}$ s vijcima.....	78
Tablica 11. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra $\frac{2}{0}$ s vijcima.....	82
Tablica 12. Maksimalne vrijednosti progiba, savojnog naprezanja i tlaka 11 slučaja opterećenja .....	84

## POPIS OZNAKA

## Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$d$	mm	Promjer kružnog poprečnog presjeka
$E$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Youngov modul (modul elastičnosti)
$E_{rel}$	%	Relativna greška ( $E_{rel} = (x_{NUM}/x_{REF, ANLT} - 1) \cdot 100$ )
$\mathbf{F}$	-	Gradijent deformiranja
$f_{Fep}$	/	Faktor punjenja paketa limova
$\mathbf{F}_i$	N	Vektor unutarnjih sila
$F_{x, y, z}$	N	Sila u smjerovima osi x, y, z
$G$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Modul smicanja ( $G = E/(2 \cdot (1 + \nu))$ )
$I_{1,2}$	-	Invarijanta tenzora deformacije
$I_p$	mm <sup>4</sup>	Polarni moment tromosti presjeka
$I_{x, y, z}$	mm <sup>4</sup>	Aksijalni moment tromosti presjeka oko osi x, y, z
$\mathbf{J}$	-	Jacobijeva matrica
$K$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Volumenski modul elastičnosti (modul kompresibilnosti)
$\mathbf{K}_T, \mathbf{k}_T$	N/m	Globalna, lokalna tangencijalna matrica krutosti štapa
$L_n, l_n$	m	Duljina
$m$	kg	Masa
$p$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Pritisak (opterećenje) proračunskog modela ( $p \equiv \sigma$ )
$\mathbf{R}_e$	N	Vektor vanjskog opterećenja
$\mathbf{R}_i$	N	Vektor unutarnjeg opterećenja
$u, v, w$	m	Pomak u smjerovima osi x, y, z
$\mathbf{V}$	m, rad	Globalni vektor pomaka
$\mathbf{v}$	m, rad	Lokalni vektor pomaka
$w(t)$	m	Pomak ovisan o vremenu
$X, Y, Z, x, y, z$	-	Globalne, lokalne Kartezijeve koordinate
$M$	Nmm	Moment Savijanja
$K_0$	N/mm <sup>3</sup>	Modul podloge
$EI$	Nmm <sup>2</sup>	Fleksijska krutost
$q$	Nmm	Kontinuirano opterećenje
$C_i$	/	Konstante integracije
$q_{yS}$	N/mm <sup>2</sup>	Reakcijski pritisak podloge u smjeru normale na površinu
$BJ_{min}$	mm	Širina najmanjeg paketa limova transformatora
$BJ$	mm	Širina najvećeg paketa limova transformatora
$K_S$	N/mm <sup>2</sup>	Krutost podloge po jedinici širine grede
$k$	N/mm	Krutost pojedine podloge

$b$	mm	Širina grede
$A$	mm <sup>2</sup>	Površina poprečnog presjeka
$R$	N	Vektor reziduala (razlika unutarnjih i vanjskih sila)
$W$	mm <sup>3</sup>	Moment otpora

## Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha$	rad	Kut
$\beta$	/	Faktor podloge
$\delta$	m	Pomak
$\varepsilon$	%	Stvarna deformacija ( $\varepsilon = \ln(l/l_0)$ ), dopuštena num. greška
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\pi$	-	Ludolfovo broje ( $\pi = 3,14159$ ) □
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća
$\sigma_{ekv}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Ekvivalentno naprezanje prema Von Misesu
$\sigma_{x,y,z}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Stvarno naprezanje u smjerovima osi x, y, z

## Skraćenice, indeksi

Oznaka	Pravo značenje
1D	jednodimenzijnsko
2D	dvodimenzijnsko
3D	trodimenzijnsko
ANLT	analitički
APDL	<i>Ansyes Parametric Design Language</i>
CAD	<i>Computer Aided Design/Drafting</i> (konstruiranje pomoću računala)
CAD	<i>Computer Aided Design/Drafting</i> (konstruiranje pomoću računala)
EFS	Elastic foundation stiffness (modul podloge $K_0$ )
EKV	ekvivalentno
EL	element
FEM	<i>Finite Element Method</i> (metoda konačnih elemenata)
I	<i>internal</i> (interni, unutarnji)
KE	konačni element
MKE	metoda konačnih elemenata
PU	početni uvjet ( <i>start condition</i> )
RU	rubni uvjet ( <i>boundary condition</i> )



## SAŽETAK

U radu je provedena numerička analiza steznog sustava limova transformatora pri savijanju. Nosivi okvir steznog sustava omogućuje stezanje limova jezgre transformatora čime se postiže kompaktni oblik jezgre transformatora. Tijekom operacije montaže steznog sustava preko bandaža i/ili vijaka, okvir mora podnijeti statičko opterećenje koje se javlja tijekom stezanja limova jezgre transformatora.

Cilj rada je izrada numeričkog modela prema metodi konačnih elemenata u programskom paketu ANSYS kojim će se verificirati trenutni analitički proračun steznog sustava limova transformatora od strane tvrtke Končar Energetski Transformatori (KPT). Iz tog razloga, potrebno je napraviti detaljnu analizu i verifikaciju primijenjenog pristupa izrade numeričkog modela. Takav model omogućuje veću fleksibilnost prilikom simuliranja mehaničkog odziva raznih tipova opterećenja i nosive konstrukcije.

Rad je podijeljen u devet cjelina. U uvodnom dijelu, ukratko je objašnjena problematika koja će se analizirati te su objašnjeni glavni dijelovi transformatora. U drugom dijelu, opisana je funkcija steznog sustava limova transformatora te nelinearno ponašanje jezgre transformatora. U trećem dijelu, objašnjena je teorija konstrukcija na elastičnoj podlozi, koja će se primjenjivati u izradi numeričkog modela. U četvrtom dijelu, ukratko je opisana metoda konačnih elemenata te su opisani 1D, 2D i 3D konačni elementi korišteni u radu. U petom dijelu, opisana je korištena inkrementalno-iterativna metoda za izračun nelinearnih analiza. U šestom dijelu, kroz pet primjera verificirani su korišteni konačni elementi te metodologija greda koje se nalaze na linearnim, odnosno nelinearnim elastičnim podlogama. U sedmom dijelu, opisan je način izrade numeričkog modela te su prikazani rezultati numeričke analize dva odabrana primjera. Preostale slučajeve opterećenje moguće je vidjeti u dokumentu u prilogu V. U osmom dijelu, prikazan je analogan numerički model, ali s primjenom 3D konačnih elemenata. Na kraju, u devetom poglavlju, izveden je zaključak o dobivenim rezultatima numeričkog modela.

Ključne riječi: numerička analiza, ANSYS, nelinearna elastična podloga, nelinearna analiza.

**SUMMARY**

In this paper numerical analysis of the transformer sheet metal clamping system was implemented. Load bearing frame of clamping system allows clamping of sheet transformer core plates resulting in a compact form the core of the transformer. During the operation of the clamping mounting system via flange and / or screws, the frame must submit a static load that occurs during clamping plates transformer cores.

Aim of this paper is the development of numerical finite element method model in ANSYS software package that will verify the current analytic calculation of the clamping system of transformer core sheets by the company Končar Power Transformers (KPT). For this reason, it is necessary to make a detailed analysis and verification approach applied in the preparation of the numerical model. Such a model will enable better flexibility when simulating the mechanical responses of various types of loads and load-bearing structures.

The work is divided into nine sections. In the introduction, analyzed problems and main parts of the transformer are shortly explained. In the second part, function of the clamping system sheets transformers and nonlinear behavior of transformer cores is described. In the third part, theory of structures on elastic foundation, which will be applied in the development of numerical model is explained. The fourth part briefly describes the finite element method and 1D, 2D and 3D finite elements used in the work. In the fifth part, used incremental-iterative method for the calculation of non-linear analysis is described. In the sixth part, with five examples used finite elements and methodology of beams resting on linear or nonlinear elastic foundations are verified. In the seventh part, way of making the numerical model is described and results of numerical analysis of two selected examples are shown. The remaining load cases can be seen in the document attachment V. In the eighth part, analogous numerical model is shown, but with the application of 3D finite element. Finally, in the ninth chapter, a conclusion on the results of the numerical model is made.

Key words: numerical analysis, ANSYS, nonlinear elastic foundation, nonlinear analysis.

## 1. UVOD

Na današnjem globalnom tržištu, ukoliko proizvodne tvrtke imaju cilj poslovati dugoročno, moraju konstantno ulagati u razvoj postojećih proizvoda i tehničkih rješenja. Zbog toga je radi održivosti poslovanja potrebno konstantno provoditi proces optimizacije postojećih proizvoda. Preduvjet za to jest teorijsko znanje iz područja primijenjene mehanike, numeričkih i analitičkih proračuna, kao i bitnog empirijskog znanja dobivenog kroz godine poslovanja tvrtke.

Kako je električna energija danas traženija nego ikada, što je uvjetovano ne samo globalizacijom, već i porastom broja stanovnika, potreba tržišta za detaljno proračunatim i kvalitetno proizvedenim energetskim transformatorima je sve veća. Električnu energiju je potrebno dovesti od proizvođača (elektrana) do potrošača (industrije, kućanstva) uz što manje gubitke, a za to nužna transformacija postiže se uz pomoć transformatora [1].

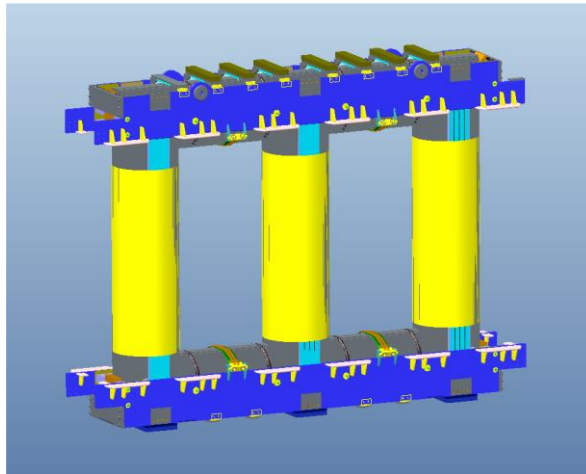
Izrada inženjerskog proračuna nije samo proces i način postavljanja inženjerskog zadatka već i alat koji pomaže u donošenju odluka u najširem smislu. Inženjeri su oduvijek pokušavali intuitivnim putem proračunavati mehaničko ponašanje konstrukcija, no takav način je vrlo subjektivan i podložan greškama. Danas je uz odgovarajuće algoritme, programske alate i uz primjenu računala moguće transformirati subjektivnošću opterećene empirijske proračune mehaničkih konstrukcija u proračun temeljen na računalnoj simulaciji fizičkih modela, koji svojom definicijom u potpunosti mogu zamijeniti objekt projektiranja.

### 1.1. Opis problema

Zbog današnje izrazite konkurencije kod proizvođača energetskih transformatora potrebno je da transformator bude što je moguće lakši i jeftiniji. Iz toga razloga potrebno je optimiranje svih dijelova transformatora.

Tijekom pogona transformatora u namotima se javljaju velike elektromagnetske sile koje opterećuju namote i jezgru. Da bi jezgra transformatora mogla funkcionirati te da bi se ostvario kompaktni sklop koji se može transportirati, namote i limove jezgre potrebno je stlačiti i učvrstiti. Stlačivanje namota i limova vrši se pomoću steznog sustava koji je najčešće izveden od čeličnih ploča [2].

Energetski transformatori proizvode se s izvedbom steznog sustava limova transformatora u obliku ravne ploče. Primjer jednog tipičnog takvog steznog sustava prikazan je na slici 1. Proračun steznog spoja na savijanje moguće je izvesti pomoću relativno jednostavnog, ali konzervativnog analitičkog proračuna. Međutim, takav oblik proračuna ima velika ograničenja, pogotovo kada je u pitanju optimizacija konstrukcije na temelju mehaničkog odziva uslijed raznih tipova opterećenja.



**Slika 1. Primjer steznog sustava limova transformatora**

Cilj ovog rada je analizirati i izraditi proračun na temelju metode konačnih elemenata. Time bi se u budućnosti navedeni problem mogao standardno rješavati metodom konačnih elemenata. Potrebno je napraviti proračun nekoliko različitih izvedbi steznog spoja pomoću grednog i trodimenzijskog modela s unaprijed definiranim rubnim uvjetima<sup>1</sup>. Proračun je potrebno kontrolirati analitički te provjeriti numerički primjenom metode konačnih elemenata.

Ususret tom izazovu danas mnoge kompanije izbacuju komercijalne programske pakete koji se temelje na metodi konačnih elemenata, poput *ANSYS*, *ABAQUS*, *Nastran*, *Catia Analysis*, *Creo Simulate*, itd. U ovom radu za izradu numeričkog proračuna metodom konačnih elemenata izabran je programski paket *ANSYS 14.0*.

Postupci numeričkih proračuna primjenjuju se u cijelom nizu linearnih i nelinearnih problema, takvi su i problemi proračuna mehaničkih konstrukcija u koje spada i stezni sustav limova transformatora.

---

<sup>1</sup> Geometrijski rubni uvjeti proizlaze na temelju iskustva i eksperimentalnih mjerenja.

## 1.2. Glavni dijelovi transformatora

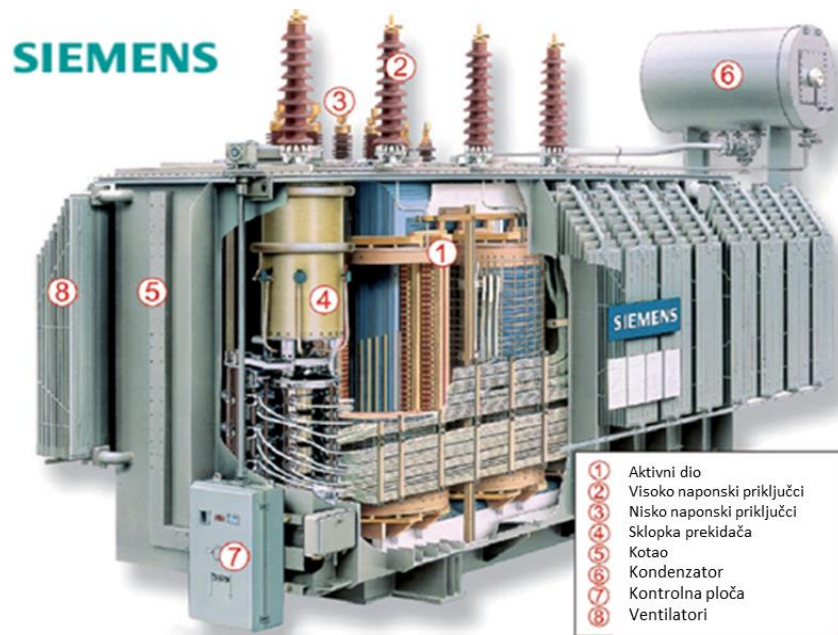
Transformator je statički elektromagnetski uređaj u kojemu se električna energija iz jednog ili više izmjeničnih krugova, koji napajaju primarne namote transformatora, posredstvom magnetskog toka u jezgri prenosi u jedan ili više izmjeničnih krugova napajanih iz sekundarnih namota transformatora s izmijenjenim iznosima struje i napona te uz nepromijenjenu frekvenciju [7].

Transformatori se ubrajaju među najraširenije elektromagnetske uređaje i obavljaju različite zadaće. Najznačajnija zadaća u elektroenergetskom sustavu je prijenos i razdioba električne energije, gdje na svaki 1 kVA instalirane električne snage u elektrani dolazi približno 7 kVA instalirane snage transformatora.

Osnovni dijelovi konstrukcije transformatora su kućište, jezgra, namoti i ulje:

- a) Kotao – kućište transformatora u koje se ulaže jezgra s namotima i svi ostali dijelovi. Stjenke kotla napravljene su od čeličnog lima kojem se krutost povećava navarivanjem ojačanja. Kotao mora biti hermetički zatvoren zbog ulja koje se u njemu nalazi.
- b) Jezgra – danas, hladno valjani orijentirani magnetski lim debljine (0,18) 0,23 mm do 0,35 mm – mali gubici u željezu; u starim transformatorima toplo valjani lim s većim gubicima u željezu. Jezgra se nakon slaganja tlači i učvršćuje između donjeg i gornjeg jarma pomoću čeličnih letvica visoke čvrstoće. Završna kompaktnost jezgre dobiva se zatezanjem pomoću bandaža od staklastog materijala koji se tijekom zagrijavanja polimerizira i tako dobiva konačna svojstva koja su potrebna da bi jezgra bila učvršćena.
- c) Namoti (svitci) – postoji više vrsta namota: NN (nisko naponski), VN (visokonaponski), RN (regulacijski). Unutrašnji namot je obično visoko naponski, slijedeći je nisko naponski pa grubo regulacijski i fino regulacijski. Regulacijski namoti služe regulaciji struje i napona u transformatoru. Namoti su od bakrene žice izolirane papirnatom izolacijom kod transformatora većih snaga dok je kod transformatora manjih snaga dovoljna izolacija lakom. Između slojeva namota stavljanu se letvice da bi se stvorili procjepi kojima kasnije prolazi ulje koje hladi namote.

d) Ulje – koristi se za hlađenje transformatora i izolaciju. Ispunjava cijelu unutrašnjost kotla. Puni se tako da se prvo iz cijelog kotla izvuče zrak tj. napravi se vakuum i tada ulje ulazi u sve najuže procjepe i u cijelosti popunjava prostor jer nema zračnih mjehurića koji bi to onemogućavali.



**Slika 2. Tipični dijelovi transformatora [4]**

Željezna jezgra ostvaruje zatvoreni magnetski krug, a oko jezgre postavljaju se međusobno izolirani namoti. Jezgra i namot čine aktivne dijelove transformatora koji direktno sudjeluju u procesu transformacije.

Izvedba ostalih dijelova transformatora obično ovisi o njegovoj veličini, namjeni i načinu hlađenja. Rashladno sredstvo za hlađenje transformatora su sintetičke tekućine, razne vrste ulja te zrak i voda. Pri tome, strujanje rashladnog sredstva može biti prirodno ili prisilno.

## **2. Stezni sustav limova transformatora**

### **2.1. Općenito o steznom sustavu limova transformatora**

U ovom poglavlju spomenute su bitne stavke koje utječu na konstrukciju steznog sustava limova transformatora, odnosno interakciju jezgre sa stajališta čvrstoće u odnosu na ostale dijelove steznog sustava.

Nosivi okvir steznog sustava mora podnijeti statičko opterećenje transformatora (masa jezgre i namotaja) tijekom prijevoza, opterećenja tijekom montaže i ručnog rukovanja tijekom raznih operacija, kao što su: mirovanje, pričvršćivanje i stabilizacija naprezanja namotaja tijekom proizvodnje. Tijekom pojave kratkog spoja u transformatoru, aksijalne sile u namotaju i mehanički šokovi djeluju na okvir i ploče steznog sustava, čime su ti elementi pod visokim naprezanjima s tendencijom da se destabilizira čitava mehanička konstrukcija [5]. Nosiva konstrukcija transformatora mora biti dizajnirana na takav način da izdrži visoke sile koje se razvijaju tijekom kratkog spoja, bez da dođe do pojave izobličenja ili oštećenja [6]. Radi dobre kontrole mehaničkog ponašanja konstrukcije steznog sustava, potrebno je pravilno dimenzioniranje cjelokupne metalne strukture koja je proračunata na sile stezanja i statičko opterećenje, kao i na dinamička naprezanja kratkog spoja.

Jezgra transformatora se sastavlja iz transformatorskih limova, koji moraju biti međusobno izolirani. U konačnom izgledu jezgra transformatora sastoji se iz stupova koji nose namote, i iz jarmova koji povezuju stupove (Slika 3).

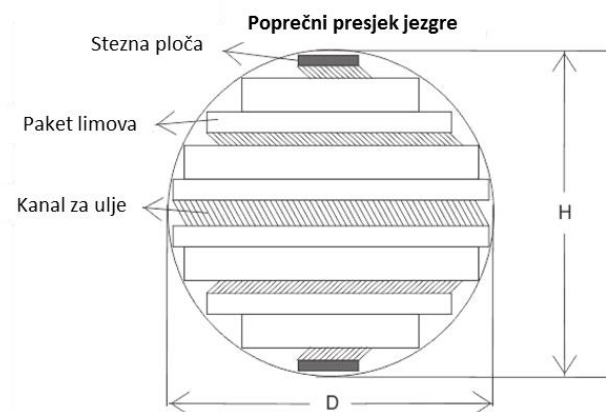


**Slika 3. Stegnuta metalna jezgra transformatora od tankih limova [8]**

Stavljanje izolacije na limove, nejednolika debljina lima te hrapavost površine lima, koja ne može biti apsolutno glatka, uzrokuju smanjenje površine aktivnog presjeka jezgre, što se izražava faktorom punjenja paketa  $f_{Fep}$ . Što je veći faktor punjenja stupa to je manja srednja duljina zavoja, odnosno manja potrošnja bakra [7]. Pošto su kod energetskih transformator faktori punjenja jako veliki ( $f_{Fep} = 0,85 - 0,98$ ), u mehaničkim proračunima se uzima jezgra kao potpuno ispunjen materijal ( $f_{Fep} \approx 1$ ), što je dobra aproksimacija. Uključivanje izolacije i hrapavosti površine između limova u numeričke proračune je iznimno komplicirano, s dobivanjem malo na točnosti rezultata.

Povećanjem presjeka jezgre raste veličina napona po zavoju, te se javlja opasnost oštećenja ili proboja izolacije lima, što bi dozvolilo zatvaranje električnog kruga vrtložnim strujama [7]. Iz toga je očito da povećanjem presjeka jezgre, sve je kompliciranija električna izvedba transformatora, a da ne dođe do topljenja željeza uslijed prevelikih vrtložnih struja. Također vrijedi pravilo, što je veća jezgra, to su s mehaničkog stajališta potrebne sve veće sile tlačenja u steznom sustavu, pa opasnost od mehaničkog sloma konstrukcije raste.

Idealni oblik jezgre je kružni (Slika 4). Međutim, izrada savršenog kruga zahtijeva da je svaki uzastopni čelični lim potrebno rezati na različite dimenzije i veličine. To je apsolutno neekonomično za praktičnu proizvodnju. U stvarnosti, proizvođači koriste različite skupine paketa s unaprijed definiranim brojem istih dimenzija limova (vidi na slici 4 paket limova).

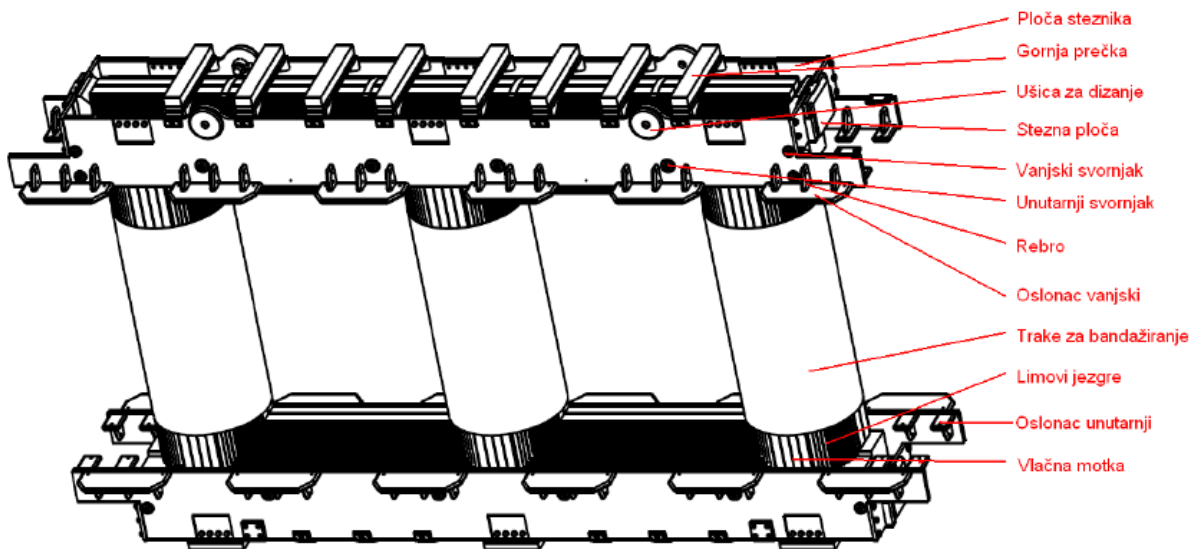


**Slika 4. Poprečni presjek jezgre transformatora [9]**

Veliko tlačno opterećenje vanjskog steznog sustava se prenosi na jezgru preko stezne ploče (Slika 4), pa zato te ploče moraju biti pravilno proračunate da podnesu velika naprezanja. Za tu potrebu se radi poseban proračun, koji nije dio ovog rada.



Svrha steznog sustava je osigurati tlak između limova jezgre. Tlak se osigurava pomoću svornjaka i/ili steznih traka (bandaža). Njegova zadaća je osiguravanje kompaktnosti limova jezgre. Navedeni stezni sustav je ponajviše opterećen silama tlačenja namota koji se stavljaju između gornjih i donjih steznih ploča. Pretpostavlja se da kritični slučaj opterećenja steznih ploča predstavlja transport aktivnog dijela koji se vrši pomoću ušica za dizanje [2]. Tipični stezni sustav i njegovi dijelovi prikazani su na slici 5.



Slika 5. Dijelovi gornjeg dijela steznog sustava [2]

Glavni dijelovi gornjeg dijela steznog sustava su naznačeni prema slici 5:

1. Ploča steznika	7. Rebro
2. Gornja prečka	8. Oslonjac vanjski
3. Ušica za dizanje	9. Trake za bandažiranje
4. Stezna ploča	10. Limovi jezgre
5. Vanjski svornjak	11. Oslonjac unutarnji
6. Unutarnji svornjak	12. Vlačna motka

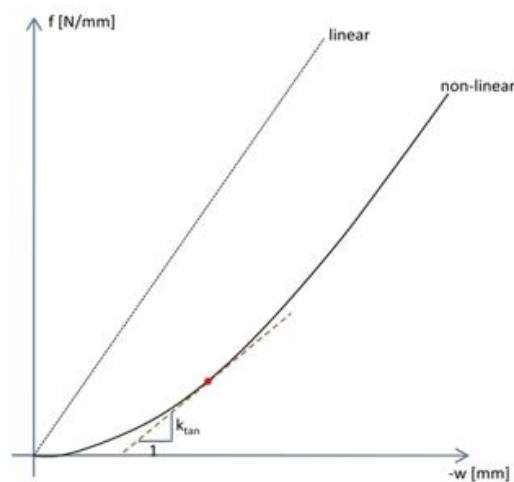
Preko ploča steznika ostvaruje se propisani pritisak među limovima jezgre koji bi približno trebao iznositi 0,15 MPa [7] u srednjem paketu limova. Do te vrijednosti se došlo empirijskim razmatranjem u svrhu ostvarenja što boljih elektromagnetskih svojstava transformatora i što većeg smanjenja buke. Ploče steznika stežu unutarnji i vanjski svornjaci

koji su pritegnuti određenim iznosom momenta. Nakon stezanja svornjacima, ploče steznika se opet pritežu gornjim prečkama koje su napravljene 8 mm kraće od nazivnog razmaka između ploča steznika. Na kraju se sustav osigurava dodatnom steznom pločom u svrhu sprečavanja pomaka (osiguravanje konstantnog pritiska) u smjeru tlačenja limova [2].

## 2.2. Nelinearno ponašanje podloge limova transformatora

Jedna od najvećih specifičnosti ovog rada jest nelinearno svojstvo podloge, tj. limova transformatora na kojima se stezni sustav nalazi. Točnije rečeno, krutost ovakve podloge nije konstantna, kakva se kod klasičnih jednostavnijih proračuna obično pretpostavlja, već je u ovom slučaju značajno nelinearna. Uzevši to u obzir, limovi jezgre predstavljaju najkompleksniji dio s obzirom na matematički model kojim bi se opisivale mehaničke karakteristike.

Nakon što je jezgra načinjena od slaganja čeličnih limova, prvi pristup je opisati mehanički odziv jezgre uzevši u obzir jezgru kao jedno kruto tijelo s jednakim svojstvima čelika. Međutim, takav pristup nije ispravan. Upravo jer je jezgra napravljena slaganjem limova, ona se ponaša vrlo mekano prilikom manjih opterećenja, ali se približno isto kao čelik pod velikim tlakom opterećenja (Slika 6).



Slika 6. Nelinearna karakteristika krutosti jezgre

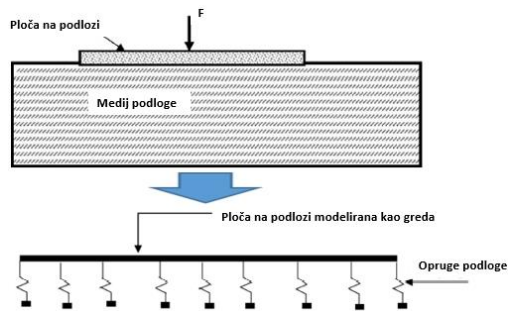
### **3. Teorija konstrukcija na elastičnoj podlozi**

Elastičnu podlogu na kojoj se nalazi konstrukcija moguće je definirati na dva načina. Jedan način je modelirati podlogu kao diskretiziranu seriju opruga, ili drugi način je modelirati podlogu kao kontinuum na temelju empirijskih spoznaja i analitičkih jednadžbi [42]. Iz razloga što ne postoji analitički izrazi za modeliranje podloge u obliku limova transformatora, jedini pristup je izrada numeričkog modela s oprugama ili na temelju iskustvenih podataka. Modeliranje sa serijom opruga ima svoje prednosti, jer je ponašanje opruga predvidljivo i jednostavno se definira karakteristikom krutosti opruga.

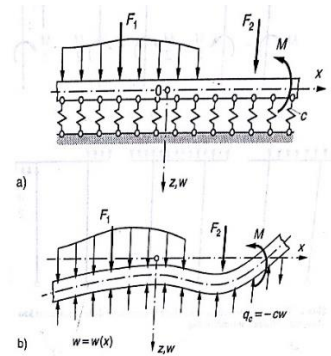
Rješenja za konstrukcije i grede koje se nalaze na elastičnoj podlozi često puta nalaze svoju primjenu u praksi, kao npr. konstruiranje temelja i grednih konstrukcija, zakopani sustav plinskih cijevi te dizajn tračnica za vlakove, itd. [45]. Međutim, iako u trenutno dostupnoj znanstvenoj literaturi i časopisima [33]-[46] nema puno analize krutih metalnih podloga koje se smatraju kao elastične podloge, principi su isti te se mogu primijeniti i u ovom slučaju analize stezne konstrukcije na nelinearnoj podlozi metalnih snopova limova.

Greda koja se nalazi na elastičnoj podlozi je statički neodređeni problem mehanike [33], [45]. U ovom radu, analizirati će se grede koje se nalaze jednim djelom na elastičnoj podlozi, a manjim dijelom na rubovima imamo slobodne krajeve. Ne mogu se svi problemi riješiti teorijskim pristupom (ili je teorijski pristup jako kompliciran). Kod takvih kompliciranih problema, metoda konačnih elemenata (MKE, eng. FEM) može biti uspješno primijenjena [38].

S teorijskog stajališta, problem konstrukcija na elastičnoj podlozi se analizira već preko 100 godina, a jedan od najpoznatijih i najstarijih modela je Winklerov model (1867 g.), koji se zbog svoje praktičnosti i jednostavnosti zadržao i dan danas. Winklerov model se odnosi na probleme gdje je moguće podlogu zamijeniti paralelnim sustavom neovisnih linearnih opruga (Slika 7). Osnove takve diskretizacije se mogu naći u [12] (Slika 8).



Slika 7. Diskretizacija ploče na kontinuiranoj podlozi s gredom na oprugama [37]



Slika 8. Greda na elastičnoj podlozi [12]

Prema metodologiji Winklera, podloga se idealizira sa sustavom identičnih ali neovisnih opruga, međusobno malo udaljene, zadane karakteristike krutosti. Prema toj idealizaciji, deformacija podloge uslijed vanjskog opterećenja se prenosi jedino na mjestu opterećenja, što je jedan od najvećih nedostataka ovog modela. Za ovaj slučaj, jednadžba opterećenja i progiba se može zapisati kao [38], [41], [44], [46]:

$$p = K_0 \cdot w \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right], \quad (1)$$

gdje je:  $p$  = vanjsko kontinuirano opterećenje  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$ ,

$$K_0 = \text{modul podloge} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right],$$

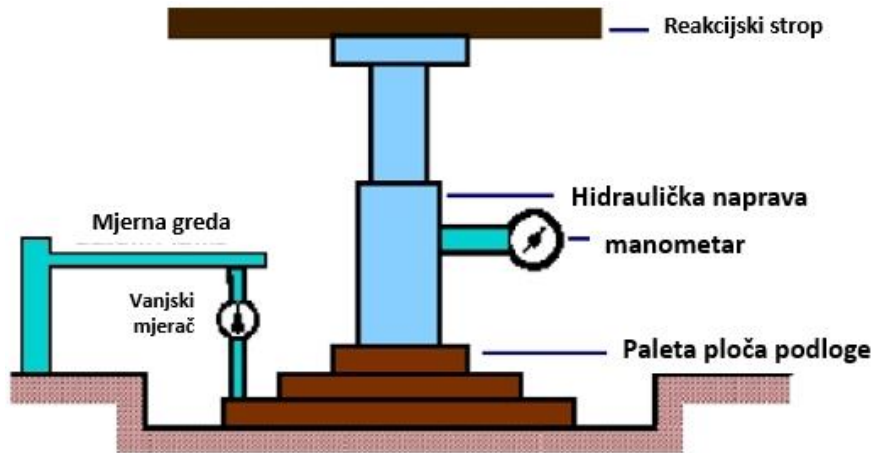
$$w = \text{progib [mm]}$$

Na temelju izraza (1) može se zaključiti da modul podloge  $K_0$  predstavlja tlak opterećenja na mjestu kontakta grede i podloge, koji se javlja za nominalnu jedinicu progiba  $w$  od jednog mm:

$$K_0 = \frac{p}{w} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right] \quad (2)$$

Najveći problem koje se javlja kod diskretizacije podloge s oprugama jest izračunati krutost pojedine opruge, što je objašnjeno detaljnije u odjeljku 3.1. Način mjerenja modula podloge  $K_0$  je iznimno kompliciran. Iako nema samo jednog načina, u praksi se najčešće mjeri pomoću ploče standardnih mjera koja se nalazi na podlozi. Na temelju poznatog opterećenja i izmjerenog progiba se zatim može odrediti  $K_0$ . Jedan od pristupa mjerenju

prikazan je na slici 9. Problem koji se tu javlja je savijanje paleta ploča ako nisu dovoljno krute, što dovodi do nejednolike raspodjele progiba po širini ploče. Iz tog razloga se uzimaju prosječne vrijednosti progiba za određeno narinuto opterećenje hidrauličkog uređaja [48].



Slika 9. Određivanje modula podloge pomoću hidrauličke naprave [37]

Postoje još mnogi kompliciraniji modeli koji su razvijeni tijekom vremena, ali oni neće biti razmatrani u ovom radu. Jedni od novijih kompliciranijih modela su: dvoparametarski elastični model, Filanenko Borodich model, Hetenys model, Pasternak model [37].

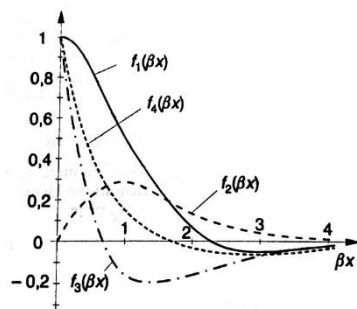
Diferencijalna jednadžba savijanja grede na elastičnoj podlozi (Slika 8) glasi [45]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{K_0}{EI} w = \frac{q}{EI} \quad (3)$$

U nekim literaturama izraz  $\frac{K_0}{EI}$  se zna zamijeniti faktorom podloge  $\beta$  koji ovisi o materijalu, geometriji grede i modulu podloge:

$$\frac{K_0}{EI} = 4\beta^4 \rightarrow \beta = \sqrt[4]{\frac{K_0}{4EI}} \quad (4)$$

Diferencijalna jednadžba (3) analogna je diferencijalnoj jednadžbi savijanja cilindrične ljuske [14] pa su i postupci rješavanja slični. Postupak rješavanja u tom slučaju se temelji na pretpostavljenim trigonometrijskim-eksponencijalnim funkcijama (kasnije u odjeljku 6.4.2 riješen je jedan primjer), koje glase (jednadžbe (5) i slika 10):



Slika 10. Eksponencijalno trigonometrijske funkcije [12]

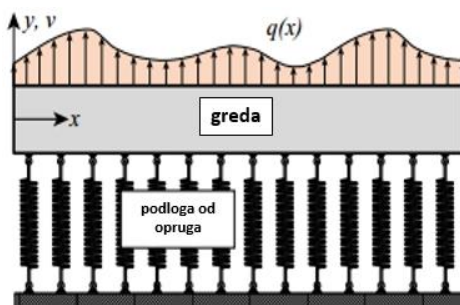
$$\begin{aligned}
 f_1(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \\
 f_2(\beta x) &= e^{-\beta x} \sin \beta x, \\
 f_3(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \\
 f_4(\beta x) &= e^{-\beta x} \cos \beta x.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Uvrštavanjem funkcija (5) moguće je odrediti opće rješenje jednadžbe (3) kao [34], [40]:

$$w_h = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x), \tag{6}$$

gdje su  $C_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , konstante integracije koje je potrebno odrediti na temelju rubnih uvjeta [47]. Ovaj pristup je ograničen na samo mali broj primjera, što znači da kompliciranije probleme nije moguće riješiti ovim pristupom.

Kao što je spomenuto i na početku ovog poglavlja, u ovom radu problemu se pristupa izradom numeričkog modela na temelju metode konačnih elemenata gdje je snop limova transformatora zamijenjen paralelnim sustavom nezavisnih opruga (Slika 11) čija karakteristika je dobivena eksperimentalnim mjerenjima (Slika 9).



Slika 11. Greda koja se nalazi na podlozi koju zamjenjuje serija opruga [39]

Prije same izrade numeričkog modela, potrebno je definirati nelinearnu krutost elastične podloge. Upravo ta podloga s nelinearnom karakteristikom predstavlja najveću specifičnost ovog tipa proračuna horizontalnog steznog sustava, u usporedbi s proračunima gdje se podloge konstrukcija smatraju idealno krutima, što u ovom slučaju nikako nije moguće pretpostaviti.

Prema danim podacima od tvrtke Končar Energetski transformatori moguće je odrediti reakcijsko nelinearno opterećenje podloge  $q_y = q_y(v) \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$ , koje je funkcija progiba  $v$  u smjeru koordinatne osi  $y$ . Zbog poslovne tajne i zaštite intelektualnog vlasništva, u ovom radu nije detaljno objašnjen način dobivanja podataka  $q_y(v)$ . S poznatim  $q_y(v)$ , moguće je izračunati krutost podloge po jedinici širine grede  $K_s \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$  na temelju sljedećeg izraza [33],[34], [36]:

$$q_y \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] = -K_s \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \cdot v [\text{mm}] , \quad (7)$$

pa prema tome vrijedi

$$K_s = -\frac{q_y(v)}{v} . \quad (8)$$

Također, na temelju poznavanja reakcije podloge  $q_y(v) \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$ , moguće je odrediti reakcijski pritisak  $q_{ys}(v)$  po površini grede i modul elastične podloge  $K_0$  po jedinici površine prema sljedećim izrazima [45]:

$$q_{ys}(v) = \frac{q_y(v)}{BJ_{\min}} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] , \quad (9)$$

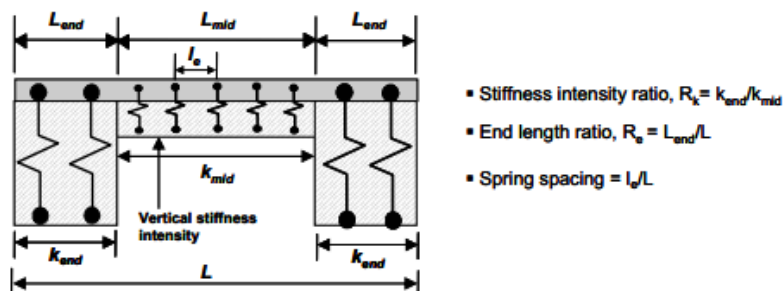
$$K_0 = \frac{q_{ys}(v)}{v} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right] \quad (10)$$

gdje  $BJ_{\min} \equiv b$  predstavlja širinu najmanjeg paketa jarma [mm].

#### Napomene vezane uz proračun konstrukcija na elastičnoj podlozi:

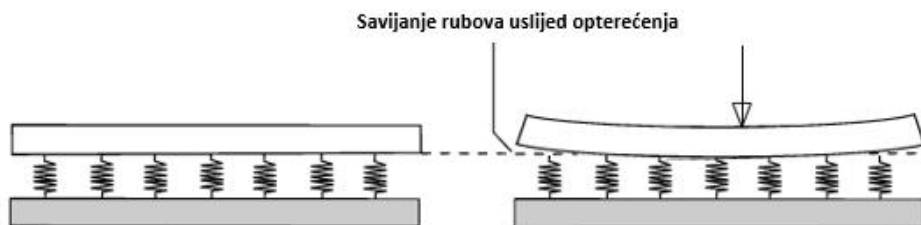
- Potrebno je napomenuti da u realnom slučaju konstrukcije na elastičnoj podlozi, krutost podloge nije konstantna po dužini, već se mijenja. To znači da će konstrukcija podloge imati različitu vrijednost krutosti na rubu i u sredini konstrukcije. Takvi proračuni su precizniji, ali mnogo kompleksniji, te su predmet intenzivnih istraživanja [35] (Slika 12). Takva situacija u realnom slučaju je česta kod geotehnički proračuna temelja na nehomogenoj podlozi. Unatoč tome, znanstveni radovi pokazuju da i kod relativno podatljivih podloga, utjecaj rubne krutosti ima mali utjecaj, pa je u ovom radu

zanemaren. Stoga ispravno je uvesti aproksimaciju o konstantnoj krutosti podloge po duljini grede.



Slika 12. Diskretizacija grede na nelinearnoj elastičnoj podlozi s promjenjivom krutosti pod duljini grede [35]

- Druga napomena vezana je uz rubne uvjete. Linearno područje vrijedi samo uz konstantne rubne uvjete, te ukoliko se rubni uvjeti mijenjaju ovisno o opterećenju, to postaje nelinearni problem kontakta. Slika 13 prikazuje primjer gdje se rubni uvjeti kontakta grede i podloge mijenjaju s iznosom opterećenja, tj. s sve većim opterećenjem zona kontakta je manja. U ovom radu je zanemaren taj problem u numeričkom modelu, jer se to u realnosti izbjegava na način da se stezanjem s dodatnim vijcima na rubu horizontalnog steznog sustava umanjuje taj problem savijanja rubova.



Slika 13. Primjer promjenjivih rubnih uvjeta uslijed opterećenja [25]

### 3.1. Proračun krutosti pojedinih nelinearnih opruga

Modul elastične podloge  $K_0$  se u programskom paketu ANSYS unosi kao prethodno spomenut  $EFS$ , pa prema tome vrijedi:  $EFS \equiv K_0$  [43]. Uspoređujući izraze (7), (9) i (10) dolazi se do slijedeće relacije:

$$q_{yS}(v) = -K_0(v) \cdot v = -\frac{K_S(v)}{BJ_{\min}} \cdot v = \frac{q_y(v)}{BJ_{\min}}, \quad (11)$$



odnosno vrijedi:

$$K_0 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right] \rightarrow K_s = K_0 \cdot b \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \rightarrow k = K_s \cdot l \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right], \quad (12)$$

gdje je:

$l$  = razmak između opruga,

$b$  = širina grede (vidi (43))

Na temelju prethodnog izraza (12), vidi se da se u proračunima grede na elastičnoj podlozi spominju tri izraza za krutost. Radi razumijevanja, još jednom spomenuti izrazi za krutost [52], [40]:

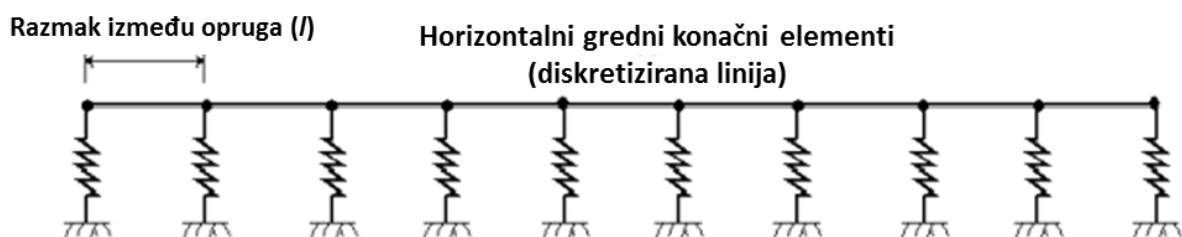
- $k$  = krutost pojedine opruge u cijelom paralelnom sustavu opruga koje opisuju podlogu,
- $K_s$  = krutost podloge po jedinici širine grede,
- $K_0$  = modul elastičnosti podloge ili krutost podloge po jedinici površine

Sila na gredu od strane opruge s progibom  $v$  iznosi  $F = k \cdot v$ , prema tome ako je razmak između opruga  $l$ , onda je odgovarajuća sila opruga za svaki razmak  $l$  jednaka  $F = k \cdot v$ . Stoga, hipotetsko kontinuirano opterećenje na gredu od strane opruga je  $k \cdot v / l$ . To znači da je kontinuirano opterećenje podloge na gredu jednako kontinuiranom opterećenju serija opruga:

$$K_s \cdot v = \frac{k \cdot v}{l} . \quad (13)$$

Konačno, izraz za krutost pojedinih opruga u svakom čvoru konačnog elementa s međusobnim razmakom  $l$  glasi [52], [40], [38] (Slika 14):

$$k(v) = K_s(v) \cdot l = K_0(v) \cdot b \cdot l \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \quad (14)$$



Slika 14. Diskretizirani pristup proračuna grede na elastičnoj podlozi [38]

## **4. Metoda konačnih elementa**

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima. Danas postoji velik broj računalnih programa temeljenih na ovoj metodi, koji omogućuju analizu konstrukcija bez razmatranja složene teorije koja opisuje fizikalno ponašanje konstrukcije. Budući da je metoda konačnih elemenata numerička metoda sva dobivena rješenja su približna, odnosno realnim vrijednostima može se samo približiti uz pravilan odabir proračunskog modela i uz pravilno odabrane tipove konačnih elemenata. Zbog toga je naročito važno poznavati fizikalno ponašanje konstrukcije koja se analizira te poznavati teorijske osnove konačnih elemenata [14].

### **4.1. Primijenjeni konačni elementi**

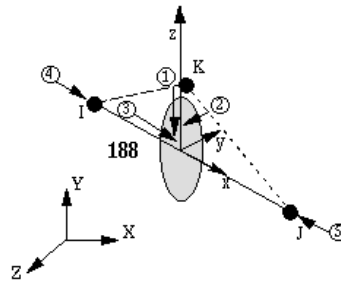
U ovom poglavlju je napravljen kratki opis testiranih elemenata u kontekstu kreiranja korektnog proračunskog modela. Kombiniranjem više vrsta konačnih elemenata te prikladnog odabira konačnih elementa, moguće je aproksimirati proračunski model. Korištenjem provjerenih analitičkih metoda i poznatih podataka iz referentne literature će se u odjeljku 6. *Verifikacije* provjeriti ispravnost korištenih konačnih elemenata..

Za izradu jednostavnijih 1D numeričkih modela u programskom paketu *ANSYS 14.0*, korišteni su BEAM188, COMBIN 139 i SOLID186 konačni elementi.

### **4.2. Prostorni gredni konačni element – BEAM188 K.E.**

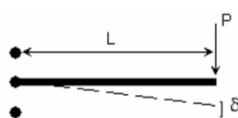
Gredni elementi su linijski konačni elementi koji se koriste kod numeričkih modela gdje odgovara primijeniti jedno-dimenzijску idealizaciju 3D strukture. Oni su mnogo efikasniji što se tiče korištenja računalnih resursa, pa se iz tog razloga intenzivno koriste u praksi. BEAM188 je linearni K.E. koji spada u najzastupljenije 1D konačne elemente u programskom paketu *ANSYS*. Postoje još i mnogi 1D K.E., poput BEAM189 koji predstavlja kvadratni prostorni 1D K.E [55], [56].

BEAM188 je linearni (2 čvora) element u 3D prostoru sa šest stupnjeva slobode u svakom čvoru (Slika 15). Stupnjevi slobode u čvorovima odnose se na translacije u x, y i z smjerovima, te rotacijama oko x, y, i z osi. Ovi gredni elementi su pogodni za linearne proračune, velike rotacije, i/ili velike deformacije.



Slika 15. BEAM188 linearni prostorni jednodimenzijski konačni element [55]

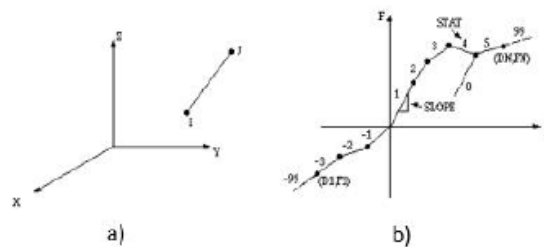
BEAM188 konačni element je baziran na Timoshenkovoj teoriji greda, što je teorija prvog reda smičnih deformacija: smična naprezanja su konstantna po presjeku, tj. presjeci ostaju ravni (ali ne okomiti) i nedeformirani nakon izobličenja. Time su za razliku od Euler-Bernoulli uključene smične deformacije presjeka. Zbog ograničenja teorije prvog reda deformacije, samo umjereno „debele“ grede mogu biti analizirane. Omjer vitkosti strukture:  $\frac{G \cdot A \cdot L^2}{E \cdot I}$  može poslužiti u ocjeni primjenjivosti elemenata, gdje je:  $G$  = modul smicanja,  $A$  = površina poprečnog presjeka,  $L$  = duljina poprečnog presjeka,  $EI$  = savojna krutost. Prema preporuci, taj omjer mora biti veći od 30 [56]. Proračunavajući sve konstrukcije u nastavku, može se zaključiti da 11 slučajeva koji će se analizirati u radu jako prelaze preporučeni omjer vitkosti 30, pa ovi elementi odgovaraju analiziranim slučajevima u radu. Utjecaj smičnih deformacija su često značajni u vertikalnom progibu kratkih greda. Značaj se smanjuje kako omjer vitkosti povećava:



Omjer vitkosti	( $GAL^2/(EI)$ )	$\delta$ Timoshenko / $\delta$ Euler-Bernoulli
25		1.120
50		1.060
100		1.030
1000		1.003

#### 4.3. Konačni element nelinearne opruge – COMBIN39 K.E.

COMBIN39 je jednosmjerni opružni element koji omogućuje opis nelinearne karakteristike krutosti. Ovaj element ima uključenu uzdužnu sposobnost (jednosmjerna kompresija) da se opire vanjskom opterećenju s do tri stupnja slobode u svakom čvoru: translacije u smjeru x, y, i z osi. Savijanje i torzija nisu uključeni u proračun [55], [56].



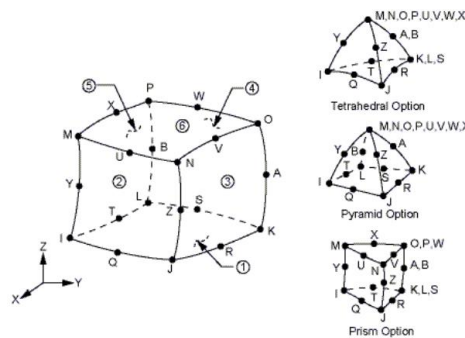
Slika 16. a) COMBIN39 Nelinearni opružni element, b) Nelinearna karakteristika opruge [56]

S ovim opružnim elementom biti će moguće jednostavno opisati Winklerov-u elastičnu podlogu na temelju jednog parametara (modula podloge  $K_0$ ) s različitim vrijednostima dobivenih iz nagiba krivulje zadanog dijagrama opterećenje-progib, što zapravo predstavlja poboljšani model linearnog opružnog elementa COMBIN14. Krivulja opterećenje-progib treba biti definirana pomoću APDL programskog jezika, tako da se progibi povećavaju od trećeg (kompresija) kvadranta prema prvom (vlačnom) kvadrantu. Posljednji unos uvijek mora biti pozitivan. Ako se prekorači krivulja sila-progiba, posljednji nagib (krutost) krivulje se zadržava. Iz razloga što je u ovo slučaju tlačno područje eksplicitno definirano, a u vlaklu ne bi smjelo biti otpora podloge, onda se barem jedna točka u prvom kvadrantu mora definirati (0,0 i 1,0).

#### 4.4. Prizmatični konačni elementi za 3D mreže – SOLID186 K.E.

SOLID186 je 3D konačni element višeg (drugog) reda koji time omogućuje kvadratni prikaz progiba. Element je definiran s 20 čvorova s tri stupnjeva slobode po čvoru: translacije u x, y i z smjeru. Element podržava plastičnost, hiperelastičnost, puzanje, velike progibe i velike deformacije. Ovaj konačni element se pokazao dobrim prilikom izrade mreže konačnih

elemenata gdje je u pitanju komplicirana geometrija (kao kod raznih CAD sustava). Postoji više verzija ovog elementa u ANSYS programskom paketu, što je prikazano na slici 17 [55].



Slika 17. SOLID186 3D Konačni element [55]

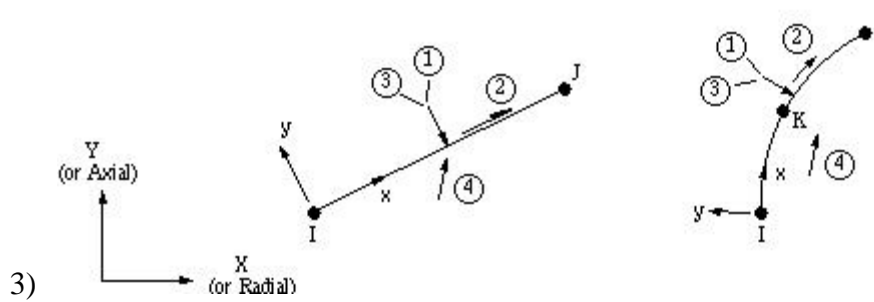
#### 4.5. Implementacija elastične krutosti podloge u FEM programske pakete

Krutost se definira kao otpornost tijela prema deformiranju. Na promjenu krutosti strukture može utjecati promjena napreznja i vanjska sila. Povećanje krutosti uzrokovano napreznjem javlja se kad se krutost strukture mijenja promjenom njenog progiba. S obzirom da krutost strukture mora biti poznata prije izračuna progiba, a u ovom slučaju jest, da bi se izračunala krutost potrebno je poznavati progib, jer problem je nelinearan u ovisnosti o progibu.

Jedan od načina da definiranja krutosti podloge jest direktno unošenje modula podloge  $K_0$  koji se ANSYS terminologiji [55], [56] još naziva kao tzv. *Elastična krutost podloge* ili *EFS* (eng. *Elastic Foundation Stiffness*<sup>2</sup>). *EFS* je način definiranja krutosti podloge po jedinici površine koja djeluje samo u smjeru normale na površinu elementa [43]. Može se definirati na dva načina, ovisno sučelju programa u kojemu se radi:

- 1) U ANSYS Mechanical APDL (MAPDL), *EFS* se definira na jednodimenzijским konačnim elementima SURF153 ili SURF154, koji u sebi imaju ugrađenu sposobnost definiranja elastične krutosti podloge,
- 2) U ANSYS Workbench (WB) Mechanical. *EFS* se definira kao „Elastic Support“ i može se definirati na bilo kojoj površini nekog 3D modela.

<sup>2</sup> ANSYS Help: // Theory Reference // 14. Element Library // 14.154. SURF154 - 3-D Structural Surface Effect



4) Slika 18. SURF 153 1D-konačni element [55]

$EFS \equiv K_0$  je dio matrice krutosti  $K_e^f$  koja je definirana prema slijedećem izrazu [57]:

$$[K_e^f] = K_0 \cdot \int_A \{N_z\} \cdot \{N_z\}^T dA, \quad (15)$$

gdje je:

$K_0$  = modul podloge (ulazna vrijednost kao  $EFS \equiv K_0$  u programu),

$A$  = površina elementa,

$\{N_z\}$  = vektor funkcije oblika koji definira pomake u smjeru normale na površinu.

Kada je površina ravna (slučaj koji nas zanima), tada opterećenje djeluje u smjeru normalne na površinu, pa je očekivani pomak na mjestu definiranog  $EFS$  jednostavan za izračunati [43]:

$$x_{efs} = \frac{F}{k_{efs}} = \frac{F}{EFS \cdot A}. \quad (16)$$

Elastična krutost podloge ( $EFS$ ) se može objasniti kao tlak koji je potreban da se na podlozi napravi jedinični progib u smjeru normale na površinu. Elastična krutost podloge je zanemarena ukoliko je  $EFS$  manji ili jednak nula. Tako npr. za krutost podloge  $K_0 = 0,00684 \frac{N}{mm^3}$  i površinu  $A = 3010 \cdot 397 = 1194970 \text{ mm}^2$ , vrijednost  $k_{efs}$  na mjestu opterećenja je slijedeća:

$$k_{efs} = EFS \cdot A = 8173,595 \frac{N}{mm}, \quad (17)$$

pa je očekivani progib za opterećenje silom  $F = 55350,4 \text{ N}$  :

$$x_{efs} = \frac{F}{k_{efs}} = 1,223 \text{ mm}. \quad (18)$$

## 5. Nelinearna analiza

Rješavanje linearnih problema mehanike krutih tijela pomoć MKE-a je s vremenom postao standardni posao koji konstruktori sve više primjenjuju u praksi. S druge strane, nelinearni problemi su kompleksniji te se moraju riješiti iterativnim putem i rješenje je postignuto ukoliko je konvergencija postignuta. Prema tome, ovisno kako se postave početni uvjeti i uvjeti konvergencije, mogu se dobiti različita rješenja, pa je bitno razumjeti osnove pozadine rješenja nelinearnih analiza. Bitno je poznavati granice do kojih u pravilu vrijedi linearna analiza. U općem slučaju, linearna analiza provodi se uz sljedeće pretpostavke [13],[14],[16]:

- ponašanje materijala je linearno elastično (vrijedi Hookeov zakon),
- pomaci su maleni, ravnoteža se promatra na nedeformiranom obliku, a opterećenje ne mijenja smjer (konzervativan sustav),
- nehomogenosti i anizotropija u materijalu nisu funkcija opterećenja.

Izrazi za mala naprezanja, deformacije i pomake vrijede uz ograničenja [17],[18]:

- visina štapa/grede  $h$  malena je u usporedbi s duljinom  $l$  te treba biti ispunjen uvjet  $h/l \leq 1/5$  do  $1/4$  uz grešku u granicama oko 2 %,
- maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju  $\alpha_{\max}$  je malen, tj. nalazi se u granicama  $\alpha_{\max} \leq 0,05$  do  $0,1$  rad. (tj.  $\sim 2^\circ$  do  $5^\circ$ ),
- omjer maksimalnog pomaka i raspona je malen, tj.  $w_{\max}/l \leq 0,01$  do  $0,02$ .

Kod nelinearne formulacije vrijedi da [16]:

- ne postoji linearna eksplicitna veza između krutosti i opterećenja
- ne vrijedi zakon superpozicije. To znači da ukoliko problem sadržava kombinaciju više vrsta nelinearnosti, tada pomaci nisu više direktno proporcionalni opterećenju te ne vrijedi superpozicija. Time više ne vrijedi izraz (19) u nastavku.

Mnogi realni inženjerski problemi u praksi su u svojoj suštini nelinearni, iako se mnogi mogu približnim metodama relativno precizno linearizirati. U tom slučaju, osnovna relacija metode konačnih elemenata za linearnu analizu glasi [15]:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R}, \quad (19)$$

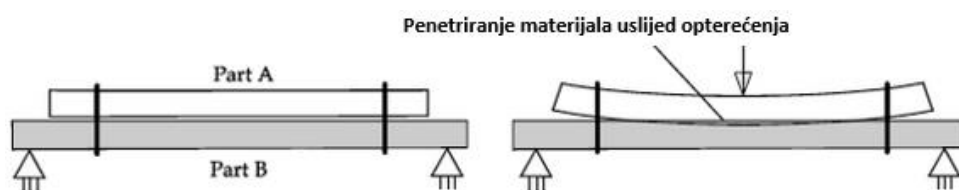
gdje je:  $\mathbf{K}$  konstantna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  je vektor pomaka u čvorovima, a  $\mathbf{R}$  je vektor čvornih sila. Međutim, postoje mnogi problemi gdje aproksimacija nije dovoljno točna, i u takvim slučajevima, to iziskuje nelinearnu analizu, što znači da je potrebno definirati nelinearnu relaciju konačnog elementa koja općenito glasi [16]:

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \mathbf{R}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R}, \quad (20)$$

gdje je sada krutost  $\mathbf{K}$  funkcija trenutnog stanja pomaka  $\mathbf{V}$  i opterećenja  $\mathbf{R}$ .

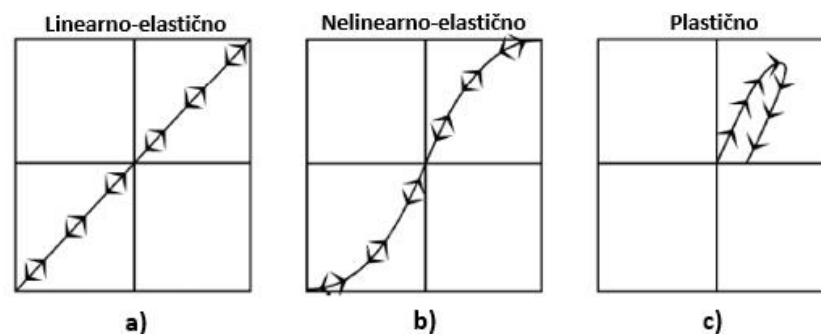
Nelinearnosti se mogu podijeliti u tri kategorije [28], [29]:

- Promjenjivi rubni uvjeti – mnoge značajke konstrukcija uključuju nelinearno ponašanje koje je ovisno o stanju u kojemu se nalazi, npr. kabel koji je napet ili popušten; valjak koji je ili nije u kontaktu. Ovakvi problemi spadaju u skupinu nelinearnog kontakta koji je izvor jedne od nelinearnosti. Primjer su dvije grede u kontaktu gdje su na dva mjesta stegnute čeličnim žicama, što prikazuje slika 19. Ovdje uslijed opterećenja dolazi do izrazite deformacije u sredini na mjestu opterećenja, dok se rubovi gornje grede odvajaju (promjene kontakta).<sup>3</sup>



Slika 19. Promjenjivi rubni uvjeti – nelinearni problem kontakta [25]

- Materijalna nelinearnost - slučajevi kada se Hookov zakon ne može primijeniti, a uključuju slučajeve u kojima se javlja plastičnost, nelinearna elastičnost, hiperelastičnost ili puzanje materijala.



Slika 20. Ponašanje materijala: a) linearno elastično, b) nelinearno elastično (hiperelastično), c) plastično [25]

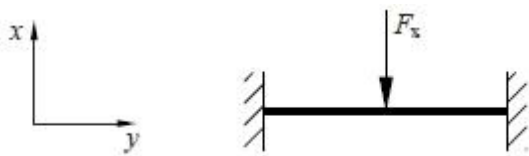
- Geometrijska nelinearnost – uzrokovana je velikim progibima koji mijenjaju prirodu problema a što, uz slučajeve velikih progiba, uključuje i povećanje

<sup>3</sup> U metodi konačnih elemenata, kod ovakvih slučajeva, postoji tendencija da dijelovi ulaze (penetriraju) jedni u druge (eng. *pass through*). Iz razloga što ovakvi slučajevi stvaraju nelinearnu ovisnost opterećenja i progiba, linearna metoda neće moći riješiti ovaj problem.

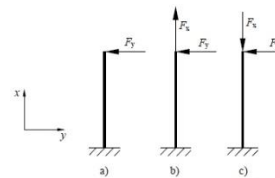


krutosti uzrokovano naprezanjem i velike deformacije. Nelinearnosti uzrokovane velikim deformacijama moraju se uzeti u obzir ako su dovele do značajne promjene geometrije. Povećanje krutosti uzrokovano naprezanjem javlja se kada je krutost strukture ovisna o progibu.

Klasičan primjer geometrijske nelinearnosti, odnosno povećanja krutosti zbog naprezanja, predstavlja horizontalna greda ukliještena na oba kraja i opterećena poprečnom silom na sredini kako je prikazano na slici 21. U ovom slučaju, porastom sile raste i vertikalni progib, ali rastom progiba dolazi do produljenja grede što uzrokuje povećanje uzdužne sile u gredi. Naprezanje uzrokovano uzdužnom deformacijom grede izaziva povećanje krutosti grede. Kako krutost ovisi o progibu, potrebno je provesti nelinearnu analizu a to zahtijeva iterativnu metodu rješavanja



**Slika 21. Horizontalna greda ukliještena na oba kraja opterećena poprečnom silom u sredini [23]**



**Slika 22. Vitki štap opterećen poprečnom silom (a), opterećen poprečnom i uzdužnom vlačnom silom (b), te opterećen poprečnom i uzdužnom tlačnom silom (c) [29]**

Drugi primjer geometrijske nelinearnosti jest konzolna greda opterećena na slobodnom kraju poprečnom silom  $F_y$ . Ako na slobodnom kraju konzole, kako je prikazano na slici 22 b, djeluju istovremeno velika uzdužna vlačna sila  $F_x$  i poprečna sila  $F_y$ , djelovanje sile  $F_y$  uzrokuje progib slobodnog kraja dok djelovanje uzdužne vlačne sile  $F_x$  povećava otpor porastu progiba. Progib je manji nego kad ne djeluje sila  $F_x$  jer je došlo do tzv. povećanja krutosti zbog djelovanja uzdužne vlačne sile [23]. Ako bi na konzolnu gredu, uz poprečnu, djelovala i velika tlačna sila slici 22 c, progib izazvan poprečnom silom  $F_y$  postaje krak uzdužne sile  $F_x$  i uzrokuje moment koji dodatno povećava progib konzolne grede. U slučaju prikazanom na slici 22 c se, dakle, zbog djelovanja uzdužne tlačne sile i poprečne sile, krutost konzolne grede smanjila [29].

Uvjet ravnoteže u nelinearnoj formulaciji nalaže da unutarnje sile moraju biti jednake vanjskom opterećenju. Taj uvjet je opisan implicitnom relacijom [16]:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_i \quad (21)$$

Da bi se spomenut inkrementalni postupak mogao provesti, potrebno je primjenom Taylorova reda definirati eksplicitnu jednadžbu krutosti za inkrementalni pomak [15],[16],[35]:

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}})\Delta\mathbf{V} = \mathbf{R}_e - \mathbf{R}_i \quad (22)$$

gdje je  $\mathbf{K}_T$  tangencijalna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  osnovno i poznato ravnotežno stanje,  $\Delta\mathbf{V}$  vektor inkrementalnih pomaka,  $\mathbf{R}_e$  vektor vanjskog opterećenja i  $\mathbf{R}_i$  vektor unutarnjih sila. Ravnoteža je postignuta kada je [16]:

$$\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_i = 0, \text{ odnosno } \bar{\mathbf{V}} = 0.^4 \quad (23)$$

### 5.1. Newton-Raphson iterativna metoda (metoda tangente)

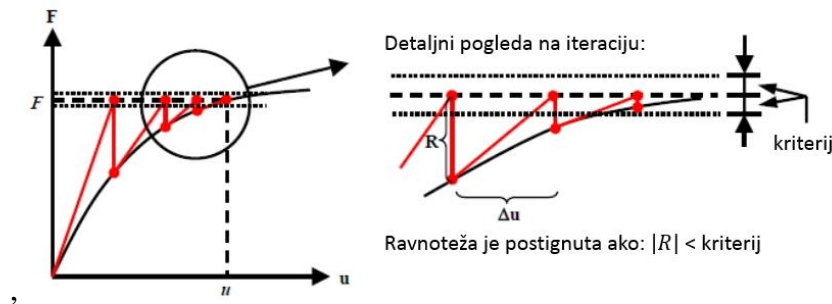
Postoji mnogo iterativnih metoda koje su razvijene za traženje rješenja u nelinearnim analizama. Najpoznatiji su Newton-Rapson i Risk-Wemper-Wessels („Arc-length“) iteracijski postupak. U programskom paketu ANSYS implementirana je Newton-Raphson metoda za rješavanje nelinearnih problema [32], [55], [56]. Osim klasične Newton-Raphson metode koju ANSYS primjenjuje, postoje i dvije modificirane metode za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi: Modificirana Newton-Raphson metoda i Quasi Newton Metoda [26].<sup>5</sup>

U svakoj Newton-Raphson iteracijskom koraku se mijenja tangencijalna (Jacobijeva) matrica krutosti  $\mathbf{K}_T$  koja predstavlja nagib krivulje u dijagramu sila/progib osnovnog stanja iz kojeg polazi iteracijski korak (Slika 23). U svakom koraku je izračunat inkrement progiba/rotacije  $\Delta\mathbf{u} \equiv \Delta\mathbf{V}$  sve dok se neravnoteža sila (rezidual)  $\mathbf{R}$  ne smanji na zadovoljavajuće malu vrijednost. Grubo rečeno, struktura je ravnoteži jedino ako rezidualne sile/momenti potpuno iščeznu [24].

---

<sup>4</sup> Kako numerički nulu nikada nije moguće postići, potrebno je postaviti kriterij dozvoljene greške  $\varepsilon \approx 0$ .

<sup>5</sup> Modificirani N.R. → za sve korake koristi identičnu prvu tangentu do posljednje iteracije, čime se postiže velika preciznost, ali sporija konvergencija rješenju (potrebno mnogo iteracija); Quasi Newton → koristi aproksimaciju Hesse matrice s čime se postiže dobra konvergencija s malom upotrebom računanih resursa (međutim, ponekada računanje aproksimacije zna biti komplicirano).



Slika 23. Newton-Raphson iterativni postupak [24]

Kako je prema N-R metodi matrica krutosti  $\mathbf{K}_T$  funkcija progiba vrijedi izraz (22). Prema tom izrazu, desna strana jednadžbe, tj. rezidual mora biti manji od 0,1 %, primijenjenog vanjskog opterećenja odnosno za *ANSYS 14.0* kriterij konvergencije je slijedeći [32]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_e - \mathbf{R}_i < 0,001 \cdot \mathbf{R}_e \quad (24)$$

Algoritam ugrađen u *ANSYS* za rješavanje nelinearnog matričnog sustava jednadžbi se sastoji od slijedećih koraka [32]:

- 1) Tijekom iteracije i zadovoljavanja uvjeta ravnoteže, *ANSYS* traži rješenje za prvo pogađanje  $\Delta \mathbf{V}_i$ , gdje je  $i$  = broj iteracije,
- 2) Proračunava se lijeva strana jednadžbe (22), tj.  $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}}) \cdot \Delta \mathbf{V}$ , pri čemu bi idealno to trebalo iznositi  $\mathbf{R}_e$ . Međutim, u stvarnosti će se pojaviti unutarnja sila  $\mathbf{R}_i$  koja će dovesti jednadžbu u stanje neravnoteže. Napomena: ukoliko tangencijalna matrica krutosti  $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}})$  poprima velike vrijednosti, tada se dobivaju jako velika odstupanja od rješenja za pogrešno pogođeni inicijalni pomak  $\Delta \mathbf{V}$ .
- 3) Preostali rezidualni neravnotežni vektor sile  $\mathbf{R}$  izračunat je i uspoređen s kriterijem konvergencije (24)
- 4) U slijedećoj iteraciji,  $\Delta \mathbf{V}_i$  se podešava te se ponovno ponavljaju koraci 2 i 3.
- 5) Proces iteracija se nastavlja sve dok se ne postigne uvjet konvergencije (24).

<sup>6</sup> Prema *ANSYS* terminologiji, prethodni rezidualni neravnotežni vektor sile se još naziva eng. *Force Convergence Value*.

## 6. Verifikacije

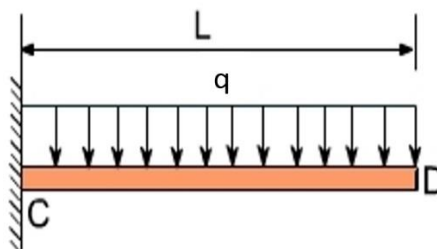
U ovom poglavlju, numerički je riješeno pet primjera. Cilj je verificirati prikladnost korištenih konačnih elemenata, modela s elastičnom podlogom, nametnutih rubnih uvjeta te općenito metodologije rješavanja problema kako bi se sa sigurnošću moglo pristupiti kompleksnijoj nelinearnoj analizi proračuna horizontalnog steznog sustava.

U ovom radu korišten je programski paket *ANSYS Workbench* i *APDL (Parametric Design Language)*. To nisu dva zasebna programa, već dva različita moda u kojima je moguće provoditi numeričke analize. *ANSYS APDL* se laički često još i naziva *ANSYS Classic*.

U prvom primjeru je napravljen klasični benchmark ukliještene konzole bez i sa elastičnom podlogom. Primjer dva pokazuje ispravno definiranje nelinearne krutosti podloge. Primjer tri pokazuje usporedbu analitičkog i numeričkog čistog savijanja grede (bez podloge); te primjer četiri pokazuje isti slučaj savijanja grede na elastičnoj podlozi. Na kraju, primjer pet pokazuje savijanje grede na podlozi s nelinearnom karakteristikom krutosti.

### 6.1. PRIMJER I – Konzola opterećena kontinuiranim opterećenjem

S prvim primjerom će se verificirati BEAM188 1D i SOLID186 3D končani elementi. To su 1D i 3D elementi koji služe za opisivanje 1D, odnosno 3D problema opterećenja grede. Zadani ulazni parametri numeričkog modela konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem su:



Slika 24. Konzola opterećena kontinuiranim opterećenjem [19]

Zadano:

$q = 1 \text{ N/mm}$ ,  $L = 200 \text{ mm}$ ,  $h = b = 10 \text{ mm}$  (kvadratni poprečni presjek),  $E = 200000 \text{ MPa}$ .

Analitičko rješenje za ovaj slučaj opterećenja se izvodi na temelju diferencijalne jednačbe 4.reda uz odgovarajuće rubne uvjete [1], [12]:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q; \quad , \quad (25)$$

$$\text{P.U.: } w(0) = 0, \frac{dw}{dx}(0) = 0, \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = -q \frac{L^2}{2}, \frac{d^3 w}{dx^3}(0) = qL \quad (26)$$

$$w(x) = \frac{q \cdot x^2 \cdot (x^2 - 4 \cdot l \cdot x + 6 \cdot l^2)}{24EI}, \quad (27)$$

te je prema tome maksimalni progib na kraju konzole jednak:

$$w_{\max}(x=L) = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = 1,2 \text{ mm} . \quad (28)$$

Maksimalno naprezanje na mjestu uklještenja iznosi [12]:

$$\sigma = \frac{q \cdot l^2}{2 \cdot I} \cdot \frac{h}{2} = 120 \text{ MPa} . \quad (29)$$

Rezultati (28) i (29) su također potvrđeni programskim paketom *FlexBeam 1.0.2.Lite* [63]. Korištenjem matematičkog programskog paketa *MatLabR2015a*, napravljen je kod pomoću kojeg je moguće računati maksimalni progib i Von-Mises naprezanje konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem (vidi Prilog I). Također, napravljen je programski kod koji numerički rješava diferencijalnu jednadžbu 4. reda konzole (vidi Prilog II), koja je prije izvedena analitičkim putem (vidi (25) i (27)). Kod u prilogu II koristi `ode45`<sup>7</sup> koji na principu rastavljanja diferencijalne jednadžbe 4. reda na četiri prvog reda, pomoću P.U.-a (26), rješava jednadžbu (25) koristeći modificiranu Runge-Kutta-Fehlberg metodu [31].

Također, izvedeno je analitičko rješenje pomoću B.G. Galerkinove metode na kojoj se zasniva metoda konačnih elemenata. Ta metoda spada u skupinu metoda težinskog reziduala [14]. Princip metode se zasniva na ispravnom odabiru približne (aproksimativne) funkcije pomaka (eng. *trial function*) koja mora biti derivabilna te zadovoljava geometrijske rubne

---

<sup>7</sup> `ode45` koristi Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) metodu. To je metoda slična Runge-Kutta 4, jedino je razlika u tome što je pomoću ove metode moguće definirati točnost rješenja, tj. Grešku. Prema tome, ova metode će iterirati sve dok se ne ispuni uvjet da je razlika između dva rješenja iteracija  $\leq \varepsilon$ . Više o tome vidjeti [31].

uvjete [20], [21]. Za zadani slučaj konzole geometrijski rubni uvjeti su:  $w(0) = 0$ ,  $\frac{\delta w}{\delta x}(0) = 0$ ,

$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}(0) = 0$ ,  $\frac{\delta^3 w}{\delta x^3}(0) = 0$ , te za ove uvjete postoje dvije odgovarajuće funkcije:

$$1) f_i = x^{i+1}, i = 1, 2, \dots, n; [14] \quad (30)$$

$$2) f_i = x^2(L - x^2)^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n. [22] \quad (31)$$

Obje prethodne funkcije zadovoljavaju geometrijske rubne uvjete i pomoću obje moguće je dobiti analogna rješenja, ali radi svoje jednostavnosti odabrana je funkcija (30). U tom slučaju, rješenje jednodimenzijske diferencijalne jednadžbe moguće je zapisati u obliku:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^4 f_i(x) a_i = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5. \quad (32)$$

gdje je :

$f_i$  = početna zadana funkcija,

$a_i$  = nepoznati parametri koje je potrebno naći.

Može se uočiti da je izraz za progib (32) sadrži članove višeg reda. Za dobivanje približno točnih rješenja progiba dovoljan je inače kvadratni član, ali za dobivanje veće točnosti rješenja Galerkinovom metodom, poželjno je dodati članove višeg reda. To pravilo posebno vrijedi za poprečnu silu [14].

Budući da je za  $x = 0$ ,  $f_i = \frac{df_i}{dx} = 0$ , a  $q \equiv q_0$ , prema Galerkinovom pravilu izraz (25)

se može zapisati kao:

$$\int_0^l \left( EI \cdot \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} - q_0 f_i \right) dx = 0, i = 1, 2, 3, 4. \quad (33)$$

Na temelju pretpostavljene funkcije (30) i pomaka (32) imamo:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = 2, \frac{d^2 f_2}{dx^2} = 6x, \frac{d^2 f_3}{dx^2} = 12x^2, \frac{d^2 f_4}{dx^2} = 20x^3, \quad (34)$$

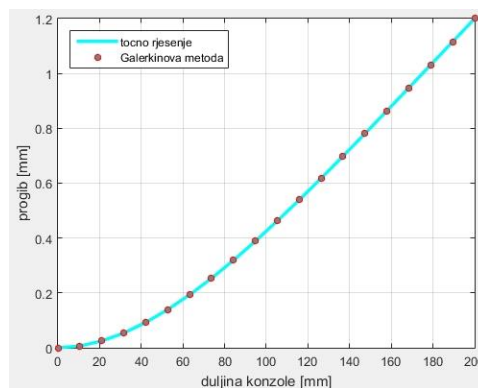
$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = 2 \cdot a_1 + 6 \cdot x \cdot a_2 + 12 \cdot x^2 \cdot a_3 + 20 \cdot x^3 \cdot a_4.$$

pa je izraz (33) moguće transformirati u četiri jednadžbe s četiri nepoznate konstante  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Integriranjem i rješavanjem tog algebarskog sustava jednadžbi dobivaju se

vrijednosti za nepoznate konstante. Kod je napravljen u programskom paketu MATLAB (vidi Prilog III). Dobiveni izraz za progib po duljini konzole nakon integriranja i uvrštavanja izračunatih konstanti u izraz (32) glasi:

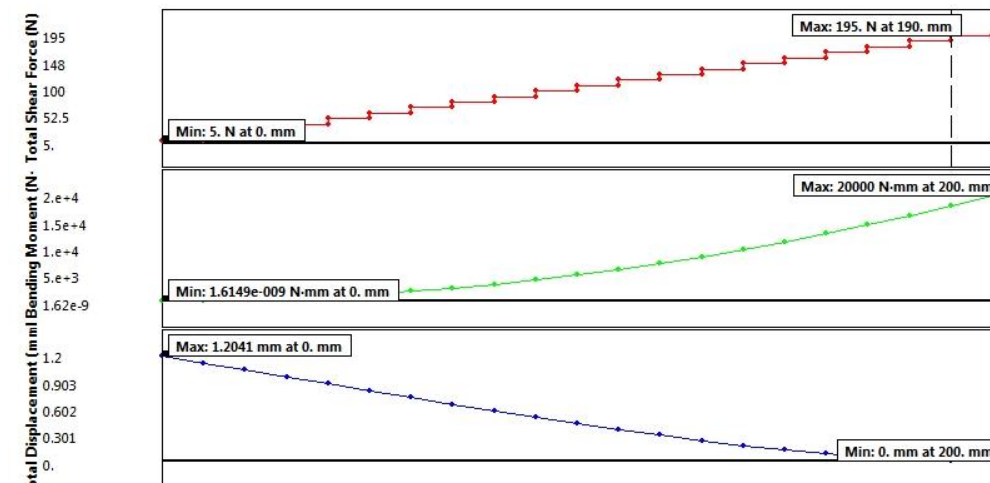
$$\bar{w} = \frac{qx^2}{EI} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{l \cdot x}{6} + \frac{x^2}{6} \right), \quad (35)$$

Što je u potpunosti analogno izrazu (27) koji je dobiven metodom direktnog integriranja diferencijalne jednadžbe elastične linije (Slika 25).



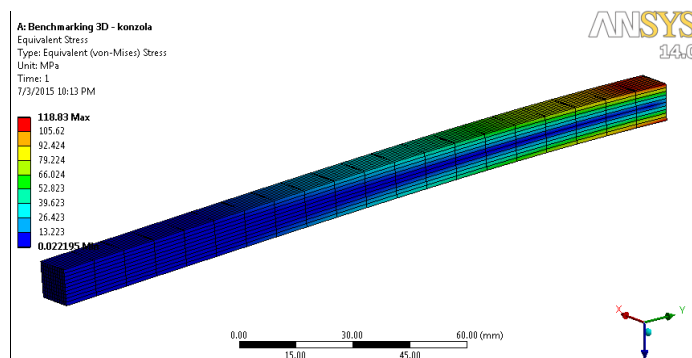
Slika 25. Usporedba raspodjele progiba Galerkinovom metodom i točnog rješenja (Matlab)

U programskom paketu ANSYS napravljena je numerička analiza konzole (Slika 24). Rezultati numeričke analize su prikazani na slijedećoj slici -26:



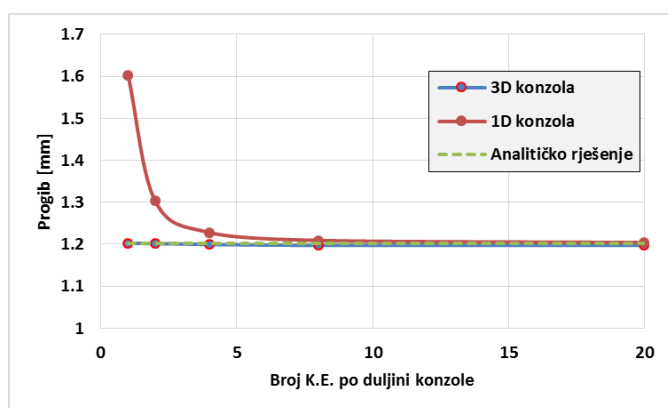
Slika 26. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i vertikalnog progiba (plavo) po duljini konzole za najgušću mrežu K.E. (20 K.E.)

Da bi se vidjela raspodjela tlačnih i vlačnih naprezanja po poprečnom presjeku konzole, napravljena je analogna analiza konzole s 3D konačnim elementima SOLID186. Rezultati maksimalnih naprezanja kod 3D modela su prikazani na slici 27. Jasno je vidljivo da su naprezanja najveća na gornjem i donjem rubu konzole, te da su jednaka nuli u sredini poprečnog presjeka.

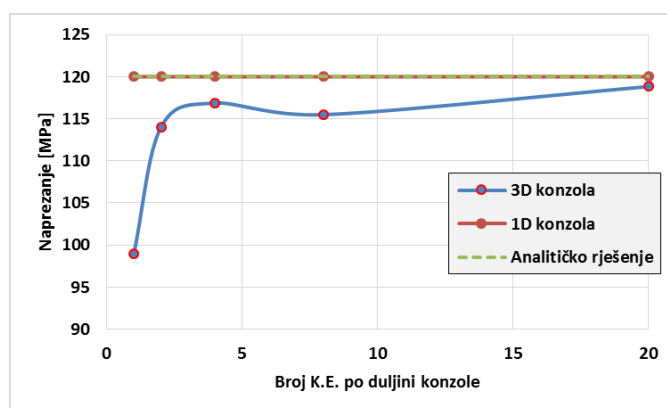


Slika 27. Ekvivalentna naprezanja 3D modela konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem

Usporedbom rezultata dobivenih u programskom paketu ANSYS i analitičkog rješenja, uočljivo je da numerička rješenja brzo konvergiraju (Slika 28 i 29) i da konačna rješenja ne odstupaju od analitičkog rješenja (Tablica 1), tj. relativna greška je jako malena. To znači da su BEAM188 i SOLID186 konačni elementi koji su ispravni za korištenje prilikom izrade 1D i 3D numeričkih modela.



Slika 28. Konvergencija progiba - konzola



Slika 29. Konvergencija Von-Mises naprezanja-konzola

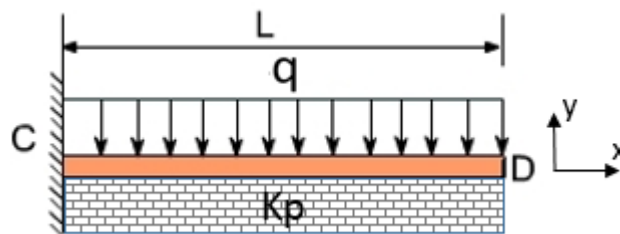
Tablica 1. Rezultati konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem

$W_{analitički} =$	1,2	mm	$\sigma_{analitički} =$	120	MPa
$W_{galerkin} =$	1,2	mm	$\sigma_{galerkin} =$	120	MPa
$W_{1D} =$	1,2041	mm	$\sigma_{1D} =$	120	MPa
$W_{3D} =$	1,1976	mm	$\sigma_{3D} =$	118.83	MPa



### 6.1.1. Konzola na elastičnoj podlozi opterećena kontinuiranim opterećenjem

U prethodnom poglavlju je analiziran klasičan problem konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem, dok je u ovom poglavlju situacija slična, ali je dodana linearna elastična podloga modula podloge  $K_p = 1 \text{ [N/mm}^3\text{]}$  s donje strane konzole (Slika 30). To znači da će prilikom opterećenja doći do reakcije ne samo na mjestu uklještenja, već po cijeloj duljini konzole. Za očekivati je da će sila reakcije podloge biti najveća na krajnjem vrhu konzole gdje će doći do maksimalnog progiba, te će se postepeno smanjivati do nule kako se približavamo uklještenju.



**Slika 30. Konzola na elastičnoj podlozi opterećena kontinuiranim opterećenjem**

Za razliku od jednostavnog klasičnog slučaja konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem (Slika 24), s elastičnom podlogom (Slika 30) problem postaje kompleksniji. Diferencijalna jednačina elastične linije tada glasi:

$$EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) + f(v); \quad (36)$$

gdje  $f(v)$  predstavlja reakciju elastične podloge, tj. kontinuirano opterećenje suprotno narinutom opterećenju  $g$ , koje je ovisno o progibu  $v$ , prema slijedećem izrazu:  $f(v) = K_0 \cdot b \cdot v = 10 \cdot v \text{ [N/mm]}$  (vidi (11)). Iz tog razloga, ovaj problem nije moguće riješiti klasičnim putem integriranja diferencijalne jednačine kao u prethodnom poglavlju 6.1. zbog dodatnog nelinearnog člana.

Drugi problem koji se tu javlja jest definiranje početnih uvjeta. Konzolu bez podloge je moguće riješiti definiranjem četiri početna uvjeta (26) na mjestu uklještenja, te na temelju toga odrediti raspodjelu progiba po čitavoj gredi, ali u ovom slučaju to nije moguće jer se iznos

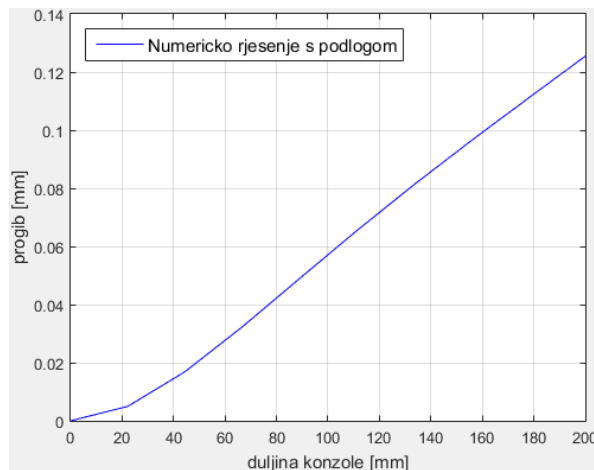
momenta i poprečne sile ovisno o članu  $f(v)$ . Zbog toga funkcije koje koriste metodologiju početnih uvjeta `dsolve` i `ode45`, koje su implementirane u Matlab-u, ne dolaze u obzir.

Međutim, prema metodologiji rubnih uvjeta moguće je postaviti slijedeća četiri rubna uvjeta (dva u uklještenju  $x=0$  i dva na kraju  $x=l$ ):

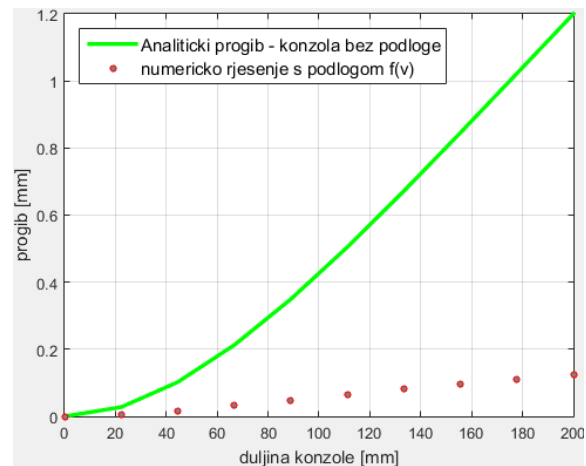
$$\text{R. U.: } w(0) = 0, \frac{dw}{dx}(0) = 0, \frac{d^2w}{d^2x}(l) = 0, \frac{d^3w}{d^3x}(l) = 0 . \quad (37)$$

Prema izrazu (37) moguće je diferencijalnu jednačbu 4.reda rastaviti na četiri jednačbe prvog reda i prema principu rubnih uvjeta numerički riješiti problem. MATLAB za takav tip problema ima implementiranu funkciju `bvp4c` koja na temelju definiranih rubnih uvjeta (`@moj_mat4ode`), rastavljenih diferencijalnih jednačbi (`@moj_mat4bc`) rješava diferencijalnu jednačbu (36). Problem rubnih uvjeta rješava tako da metodom pogađanja iterativno pretvori problem rubnih uvjeta u problem početnih uvjeta, za čije rješavanje je moguće primijeniti poznatu Runge-Kutta metodu [61]. U prilogu IV napravljen je programski kod koji rješava problem konzole na elastičnoj podlozi preko `bvp4c`.

Izračunati rezultati prema numeričkom principu u MATLAB-u prikazani su u nastavku (Slika 31 i 32). Kao što se i moglo očekivati, razlika u rješenju progiba između konzole koja se ne nalazi i koja se nalazi na elastičnoj podlozi je velika.



Slika 31. Progib konzole na elastičnoj podlozi



Slika 32. Usporedba raspodjele progiba za konzolu bez i s podlogom

Na temelju numeričkog proračuna diferencijalne jednačbe 4.reda u MATLAB-u, konačan progib na kraju konzole iznosi:  $v_{MATLAB} = 0,1255 \text{ mm}$ . Identičan rezultat maksimalnog progiba dobije se prema analitičkom rješenju [50] uvrštavajući

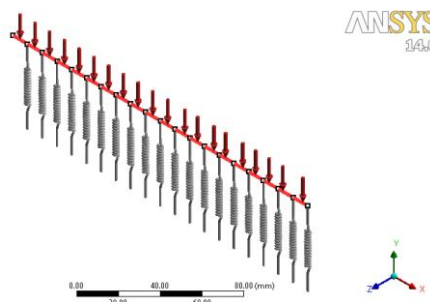
$K_s = K_0 \cdot b = 10 \left[ \text{N/mm}^2 \right]$ . Prema tom proračunu, naprezanje u uklještenju uslijed savijanja iznosi:  $\sigma_{anal.max} = 23,687 \text{ MPa}$ .

### 6.1.1.1. Konzola na elastičnoj podlozi – rješenje u ANSYS 14.0

Na temelju modula krutosti elastične podloge, napravljen je numerički model u programskom paketu ANSYS 14.0. Krutost podloge je definirana s serijom međusobnih paralelnih 20 opruga, čija krutost se izračunava na sljedeći način:

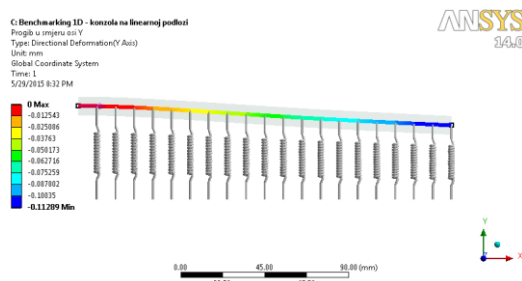
$$k = K_0 \cdot b \cdot l = 1 \cdot 10 \cdot \frac{200}{20} = 100 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \quad (38)$$

Konačan izgled 1-D ANSYS modela konzole duljine  $l = 200 \text{ mm}$  s definiranim rubnim uvjetom uklještenja i kontinuiranog opterećenja  $q = 1 \text{ N/mm}$  prikazan je na slici 33.

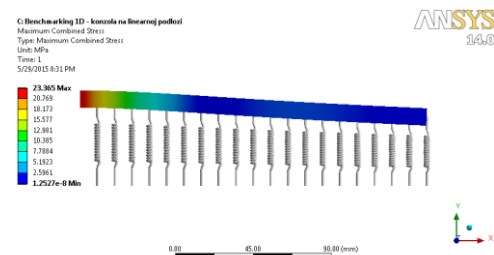


Slika 33. Konzola na elastičnoj podlozi – 1-D ANSYS model

Raspodjela progiba i naprezanja uslijed savijanja po duljini konzole prikazana je na slikama 34 i 35.



Slika 34. Raspodjela progiba konzole na elastičnoj podlozi



Slika 35. Raspodjela naprezanja konzole na elastičnoj podlozi

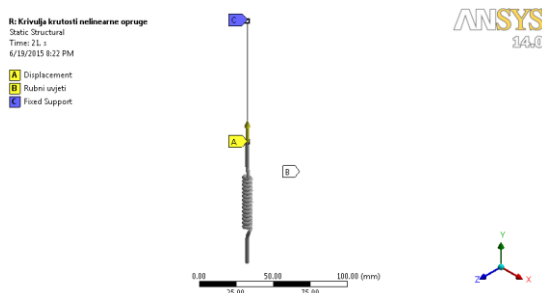
Najveća vrijednost progiba je  $w_{Ansys}(200) = 0.11289$  mm, te maksimalnog napreznja  $\sigma_{Ansys}(0) = 23,365$  MPa. Na temelju usporedbe rezultata progiba u MATLAB-u i ANSYS-u, te analitičkog napreznja i napreznja u ANSYS-u, može se zaključiti da se rješenja dobro poklapaju. Razlika u rezultatu progiba se može objasniti greškom diskretizacije FEM modela.

$$\varepsilon_w = \left| \frac{w_{Ansys}(200)}{w_{Matlab}(200)} - 1 \right| \cdot 100 = 10 \%, \quad \varepsilon_\sigma = \left| \frac{\sigma_{Ansys}(0)}{\sigma_{analit.}(0)} - 1 \right| \cdot 100 = 1,36 \%. \quad (39)$$

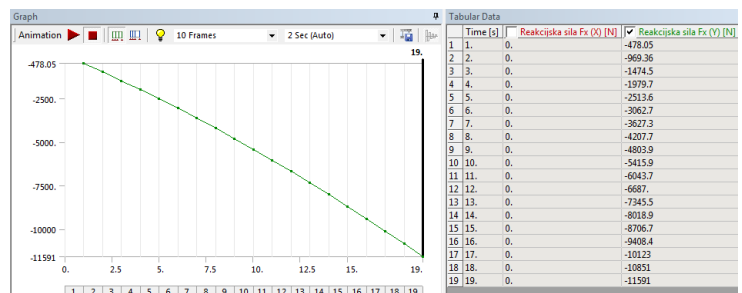
## 6.2. PRIMJER II – Nelinearna opruga opterećenja definiranim progibom

Ovim primjerom će se pokazati da je moguće modelirati oprugu s nelinearnom karakteristikom krutosti koristeći komercijalne programske pakete ANSYS i ABAQUS, čime će se dobiti na sigurnosti ispravnog definiranja opruge nelinearne krutosti.

Numerički model za verifikaciju je namjerno jako jednostavan, sa samo jednom oprugom i krutim tijelom koje ovdje postoji samo radi definiranja pomaka krutog tijela i uopće se ne razmatra. Definirani rubni uvjet progiba krutog tijela u smjeru globalne Y osi iznosi 1.9 mm, u inkrementima od 0.1 mm. Također, progib krutog tijela je ograničen od svih preostalih translacija i rotacija (*Remote Displacement*), što je prikazano na slici 36.



Slika 36. Nelinearna opruga opterećena definiranim progibom u smjeru Y-osi



Slika 37. Sila u opruzi uslijed progiba (nelinearna karakteristika opruge) – ANSYS 14.0

Nelinearne opruge su po standardu postavljene prvo kao linearne, odnosno kao COMBIN14 konačni elementi. Zatim je COMBIN14 konačni element zamijenjen s COMBIN39 konačnim elementom (vidi poglavlje 4.3) koristeći *APDL command*:

```

! Definiranje krutosti nelinearne opruge
et,_sid,COMBIN39,0,0,2,,1 ! Zamjena standardnog elementa COMBIN14 u COMBIN39 (nelinearna opruga)

! Keyopt(1) --> 0 - Unload along same loading curve

! Keyopt(2) --> 0 - Compressive loading follows defined compressive curve (or reflected tensile curve
if not defined)after buckling (zero or negative stiffness)

! Keyopt(3) --> 2 - UY (Displacement along nodal Y axes)

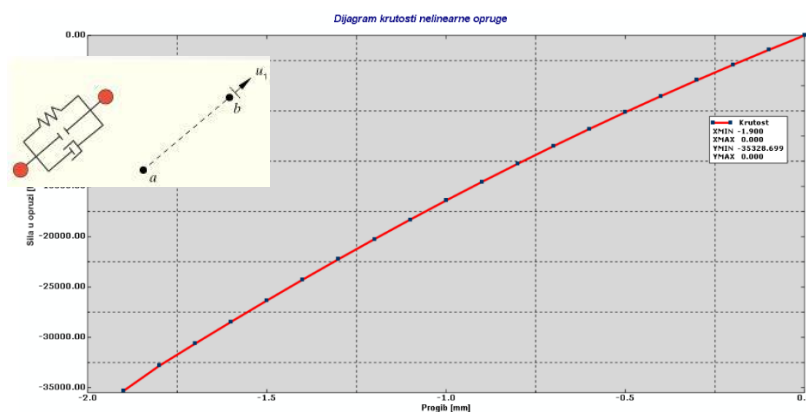
! Keyopt(6) --> 1 - Also print force-deflection table for each element (only at first iteration of problem)!

! Definiranje realnih konstanti opruge (eng. Define Real Constants):
r,_sid, ,,,, ,,,, ,,,, ,,,,
rmore, 0.0,0.0, 1.0,0.0,

```

Bitno je za napomenuti da *ANSYS* po početnim postavkama prepoznaje progib opruge samo u smjeru X-osi, te mu je potrebno napomenuti s *Keyopt(3)-2* da se progib dešava u smjeru Y globalne koordinante osi. Prikaz dobivenog dijagrama krutosti opruge s nelinearnom karakteristikom su prikazani na slici 37.

Također, napravljen je analogni postupak definiranja nelinearne opruge u programskom paketu *ABAQUS CAE 6.10*. U ovom slučaju, pristup definiranja je malo drugačiji. U *ABAQUS*-u je to moguće modelirati koristeći *Connector Bulder* i *Connection Type: Axial*, zajedno s nelinearno definiranim *Connector Section* (tu se upisuje karakteristika opruge). Konačan dijagram krutosti nelinearne opruge treba biti analogan onome dobivenom u *ANSYS*-u. (Slika 37), što je i dobiveno (Slika 38). Jedina razlika je u tome, što su progibi u *ABAQUS*-u definirani realno u negativnom području, dok su u *ANSYS*-u definirani kao apsolutne vrijednosti, ali sam oblik krivulje i iznosi sila za određene pomake su isti.

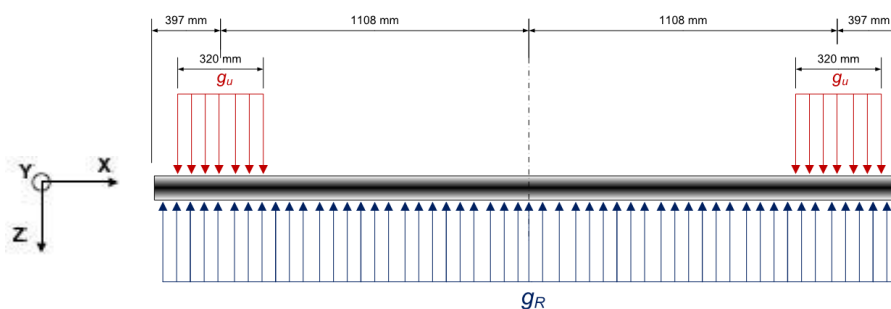


**Slika 38.** Sila u opruzi uslijed progiba (nelinearna karakteristika opruge) – *ABAQUS CAE 6.10*.

### 6.3. PRIMJER III – Greda s uklonjenom podlogom – čisto savijanje

#### 6.3.1. Analitičko rješenje

Prije izrade samog numeričkog modela, radi boljeg razumijevanja i usporedbe rezultata, napravljen je analitički pojednostavljeni proračun grede koja je opterećena na čisto savijanje. Takvo opterećenje se dobije ukoliko se ukloni podloga i zamijeni reakcijskim kontinuirani opterećenjem u suprotnom smjeru po čitavoj duljini grede  $q_R$  koja je u doticaju s podlogom (Slika 39). Dimenzije su uzete prema tablici 4.



Slika 39. Pojednostavljeni analitički proračun grede (Jezgra  $\frac{1}{2}$ )

Iznos reakcije podloge po cijeloj duljini grede uz opterećenje  $q_u = 172,97 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ , izračuna se iz uvjeta ravnoteže sila u vertikalnom smjeru:

$$\sum F_z = 0: 3010 \cdot q_R = 320 \cdot q_u + 320 \cdot q_u = 2 \cdot 320 \cdot 172,97, \quad (40)$$

pa je prema tome

$$q_R = 36,78 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (41)$$

Dimenzije poprečnog presjeka, tj. visina i širina grede su određene prema slijedećim izrazima:

$$\frac{I_y}{W} = \frac{b \cdot h^3}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{h}{2} \rightarrow h = 2 \cdot \frac{I_y}{W}, \quad (42)$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \rightarrow b = \frac{12 \cdot I_y}{h^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{W^3}{I_y^2}. \quad (43)$$

Za slučaj Jezgra 1/2 (Tablica 4, str. 36) dobijemo:  $b = 300$  mm i  $h = 44.45$  mm (pravokutni poprečni presjek). Izračunavajući posmične sile i momente dobiju se dijagrami posmičnih sila i momenata. Za tu svrhu korišteni su *Excell* s dodatkom *MitCalc beams*. Ekstremna vrijednost momenata je:

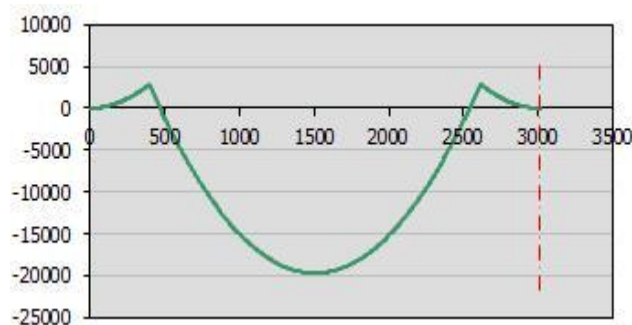
$$M_{\max} = \frac{q_R \cdot (L_{12} + L_{13})^2}{8} - \left( \frac{q_u \cdot L_{b1} \cdot (L_{12} + L_{13})}{2} - q_u \cdot L_{b1} \cdot L_{12} \right), \quad (44)$$

$$M_{\max} = -19677,435 \text{ Nm.}$$

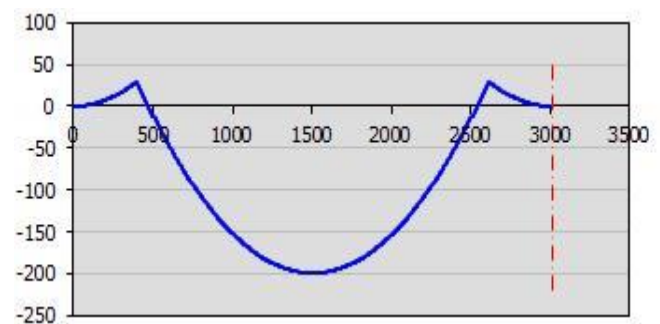
Na osnovu maksimalnog momenta, izračunava se maksimalno naprezanje:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{-19677435,925}{98790} = -199,185 \text{ MPa} . \quad (45)$$

Na temelju rezultata naprezanja (45), može se zaključiti da su naprezanja iznimno velikog iznosa, ali to je i bilo za očekivati, iz razloga što je ovdje razmatran i analiziran slučaj čistog savijanja bez elastične podloge, što dovodi do pojave velikih momenata, odnosno naprezanja uslijed savijanja. Rezultirajući momentni dijagram (Slika 40) i dijagram savojnog naprezanja (Slika 41) su prikazani u nastavku:



Slika 40. Momentni dijagram



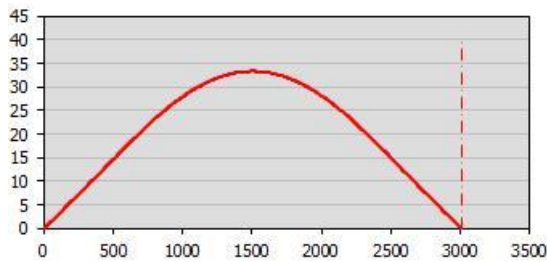
Slika 41. Dijagram naprezanja uslijed savijanja

Iz prethodnih slika uočljivo je da su momenti, odnosno naprezanja najvećeg iznosa na središtu grede, pa je prema tome i za očekivati da su pomaci u smjeru osi Y najveći također na tom dijelu. Maksimalni progib i relativni progib u središtu grede iznose [1], [12]:

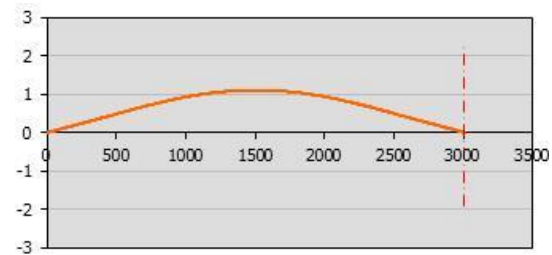
$$w_{\max} = w_{q_R} - w_{q_u} = \left[ \frac{5}{384} \cdot \frac{q_R \cdot L^4}{EI_y} \right] - \left[ \frac{q_u \cdot L_{b1} \cdot L_{13}}{6 \cdot EI_y} (3 \cdot L \cdot x - 3 \cdot x^2 - a^2) \right]_{x=\frac{L}{2}}, \quad (46)$$

$$w_{\max} = 33,327 \text{ mm}, w' = 1,107 \%$$

Analički progib grede je prikazan na slici 42, a relativni progib u odnosu na duljinu grede je prikazan na slici 43.



Slika 42. Progib grede



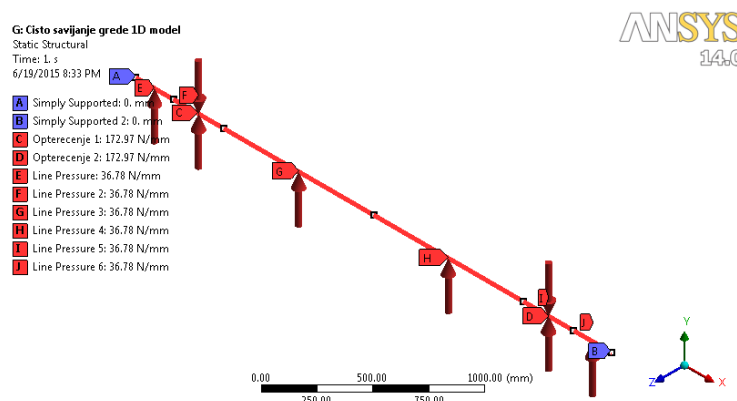
Slika 43. Relativni progib grede

### 6.3.2. Numeričko rješenje u programskom paketu ANSYS 14.0

U programskom paketu ANSYS napravljen je numerički model analogno prema ulaznim parametrima kao kod analitičkog rješenja. Za očekivati je da će se rezultati poklapati s minimalnom relativnom razlikom. Krajevi grede su slobodno oslonjeni. Numerički model čistog savijanja grede uslijed zadanog opterećenja  $q_u = 172,97 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$  i reakcije podloge

$q_R = 36,78 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$  je prikazan na slici 44. Duljina i ostali parametri geometrije su uzeti za slučaj

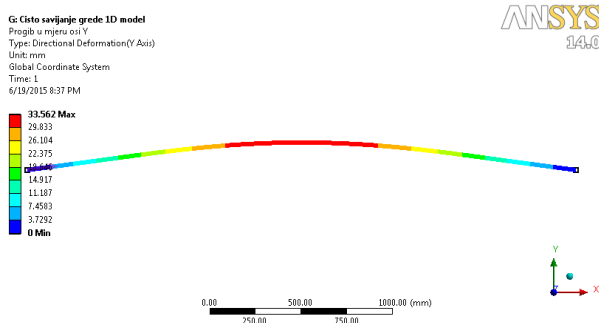
Jezgra 1/2 (Tablica 4, str. 36). Dimenzije poprečnog presjeka prema izrazima (42) i (43) su  $b = 300 \text{ mm}$  i  $h = 44.45 \text{ mm}$ . Mreža konačnih elemenata se sastoji od 302 BEAM188 konačnih elemenata.



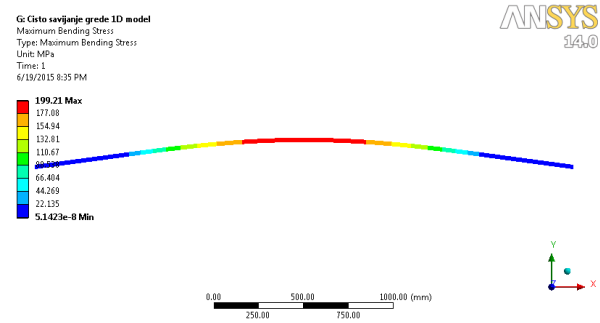
Slika 44. Čisto savijanje grede - 1D model (Jezgra 1/2 )



Raspodjela vertikalnog progiba u smjeru osi Y i naprezanja uslijed savijanja po duljini grede, prikazana je na slikama 45. i 46.

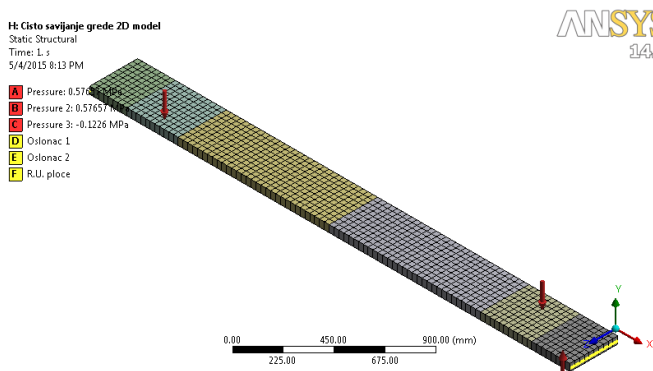


Slika 45. Progib u smjeru osi Y

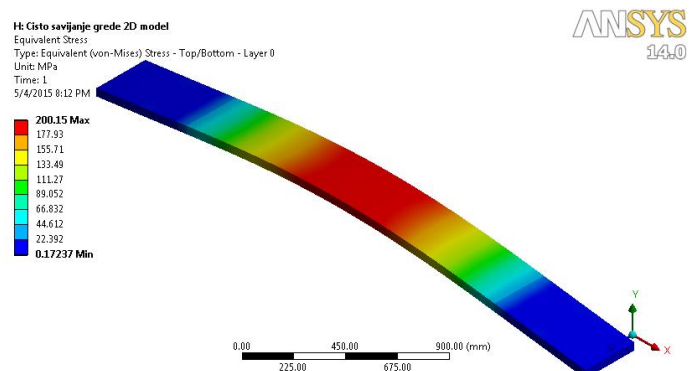


Slika 46. Naprezanje uslijed savijanja

Napravljen je također 2D numerički model s analognim zadanim ulaznim podacima o geometriji i opterećenju, kao kod 1D modela. Definirani rubni uvjeti 2D modela su prikazani na slici 47. Raspodjela naprezanja prikazana je na slici 48.



Slika 47. Rubni uvjeti i opterećenje 2D modela čistog savijanja grede



Slika 48. Raspodjela naprezanja 2D modela čistog savijanja grede

Usporedbom rezultata dobivenih u programskom paketu ANSYS i analitičkog rješenja (Tablica 2), uočljivo je da numerička rješenja za progib i naprezanja već i za relativno rijetku mrežu K.E. imaju vrlo male relativne greške koje iznose:

$$\varepsilon_w = \frac{W_{Ansys} - W_{analit.}}{W_{analit.}} \cdot 100 = 0,7 \%, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{Ansys} - \sigma_{analit.}}{\sigma_{analit.}} \cdot 100 = 0,01 \%. \quad (47)$$

**Tablica 2. Rezultati čistog savijanja grede (Jezgra ½ )**

Wanalitički=	<b>33,327</b>	mm	σanalitički=	<b>199,185</b>	MPa
WANSYS_1D=	<b>33,562</b>	mm	σANSYS_1D=	<b>199,21</b>	MPa
WANSYS_2D=	<b>33,180</b>	mm	σANSYS_2D=	<b>200,15</b>	MPa

Na temelju rezultata (Tablica 2) može se zaključiti da su progibi i naprezanja savojno opterećene grede jako velika, te da bi bez postojanja dovoljno krute podloge konstrukcija steznog sustava prelazila granice čvrstoće i prilikom manjih iznosa opterećenja. To pokazuje da će podloga znatno utjecati na mehanički odziv konstrukcije. Stoga je prilikom kasnije izrade numeričkog modela savijanja horizontalnog steznika, od iznimne važnosti ispravno modelirati nelinearno ponašanje podloge radi dobivanja što egzaktnijih rezultata.

#### **6.4. PRIMJER IV– Greda konačne duljine na elastičnoj podlozi**

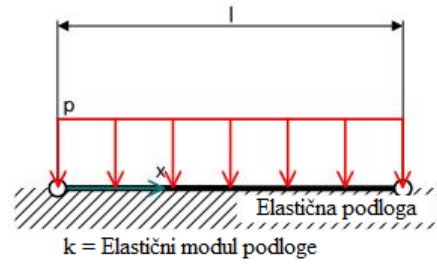
Da bi bili sigurni u valjanost rezultata i definiranja rubnih uvjeta kod numeričkog modela koji će biti napravljeni, provedena je verifikacija na temelju analitičkog rješenja grede koja se nalazi na elastičnoj podlozi zadane krutosti podloge po širini  $K_S$  (Slika 49). Korišteni su proračunski modeli [13] i [51] bazirani na stručnoj literaturi M.Hetenyi-a [33].

##### **6.4.1. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi s onemogućenim pomacima na krajevima**

Kod ovog tipa pojednostavljenog 1D proračuna, gornja stezna ploča se proučava kao greda s svojstvima presjeka prema tablici 8, tj.  $I = 7614522 \text{ mm}^4$  i  $W = 299784 \text{ mm}^3$ . Ostali ulazni parametri su:  $q_u = 870,2 \text{ N/mm}$ ,  $l = 610 \text{ mm}$ ,  $x = 305 \text{ mm}$ ,  $E = 205000 \text{ MPa}$ . Srednji modul podloge iznosi  $K_0 = 2,6335 \text{ N/mm}^3$ <sup>8</sup> je dobiven iz funkcijske vrijednosti nelinearne podloge  $f(v)$ . Izračunati modul podloge po širini grede  $b = 300 \text{ mm}$  iznosi:

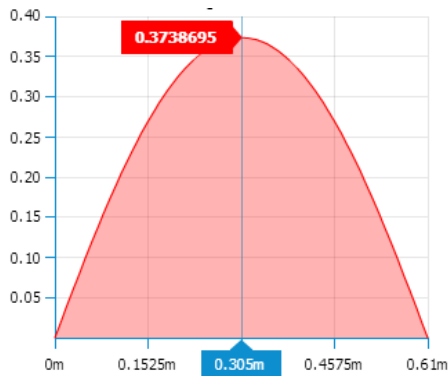
$$K_{S,\text{srednji}} = K_0 \cdot b = 1835,575 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} . \quad (48)$$

<sup>8</sup> Iznos srednje krutosti je dobiven uzimajući prosječnu krutost podloge  $K_S$  do progiba -1.1 mm, koristeći *MathCAD*

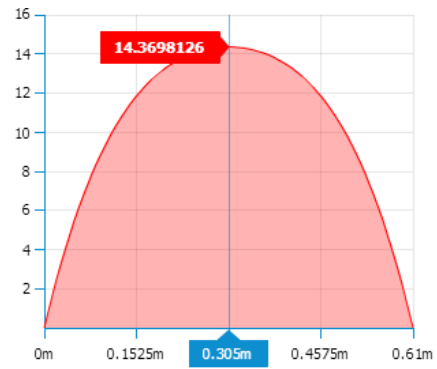


**Slika 49. Greda na elastičnoj podlozi s onemogućenim pomacima na krajevima [49]**

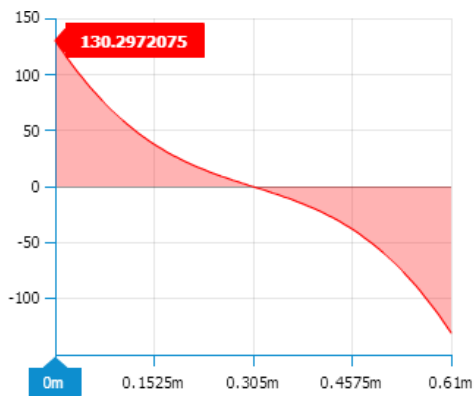
Nakon provedenog proračuna prema [49], raspodjela progiba po konturi grede, momenti dijagram, dijagram poprečnih sila te kut nagiba uslijed progiba su prikazani na sljedećim slikama (Slika 50-53):



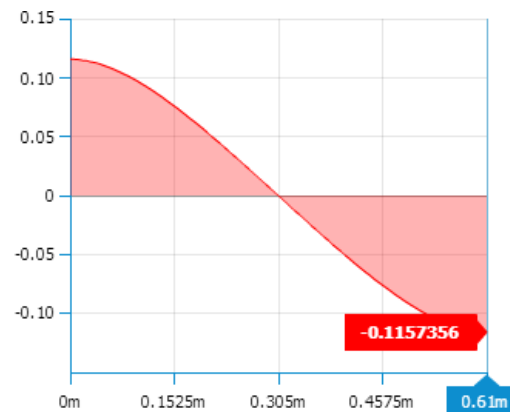
**Slika 50. Raspodjela progiba [mm]**



**Slika 51. Momenti dijagram [kNm]**



**Slika 52. Dijagram poprečnih sila [kN]**



**Slika 53. Kut nagiba uslijed progiba [°]**

Rezultati analitičkog proračuna na temelju prethodnih dijagrama i proračuna prema [33] su sljedeći:

$$\begin{aligned}
 x &= 0.305 \text{ m} \\
 p &= 870.2 \text{ kN/m}, l = 0.61 \text{ m}, k = 1835575 \text{ kN/m}^2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \omega &= 0.3739 \text{ mm} \\
 \theta &= 0^\circ \\
 M &= 14.3698 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 Q &= 0 \text{ kN} \\
 \sigma &= 47.9339 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

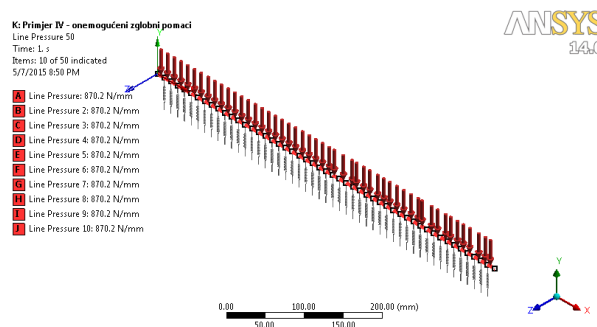
Iz rezultata (49) vidljivo je da maksimalno naprezanje u središnjem dijelu kontinuiranog opterećenje (za  $x = 305 \text{ mm}$ ) iznosi  $\sigma_{1,\max} = 47,9339 \text{ MPa}$ .

#### 6.4.1.1. Rješenje metodom konačnih elemenata – ANSYS 1-D model s oprugama

Napravljen je numerički model u programskom paketu ANSYS definiran preko opruga s linearnom karakteristikom, koji bi trebao dati iste rezultate kao analitički model u prethodnom poglavlju 6.4.1. Krutost pojedine linearne opruge konstantne krutosti se određuje prema izrazu (14), tj. prema širini  $b$  i duljini  $l$  koja je podijeljena s brojem opruga po duljini. Za najgušću mrežu konačnih elemenata (50 elemenata) krutost pojedine opruge iznosi:

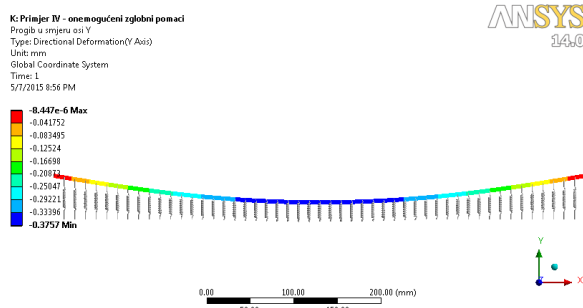
$$k = K_0 \cdot b \cdot l = 2,6335 \cdot 697 \cdot \frac{610}{50} = 22\,393,71 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]. \tag{50}$$

Dimenzije poprečnog presjeka prema (42) i (43) su:  $b = 697 \text{ mm}$  i  $h = 50.8 \text{ mm}$ . Konačan izgled 1-D modela s onemogućenim pomacima u smjeru X i Y osi, ali omogućenoj rotaciji oko Z-osi (zglobni oslonci) prikazan je na slici 54.

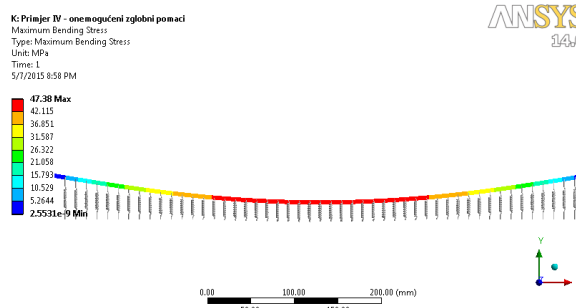


**Slika 54. 1-D (gredni) ANSYS model s linearnim oprugama i zglobnim osloncima na rubovima (najgušća mreža od 50 K.E.)**

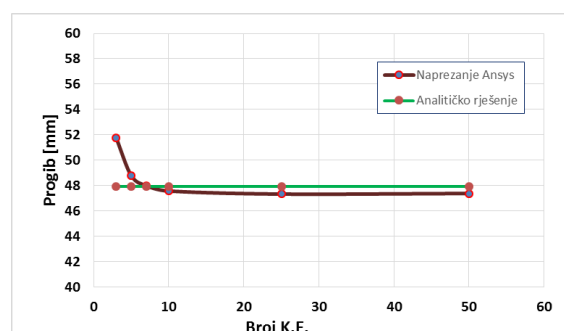
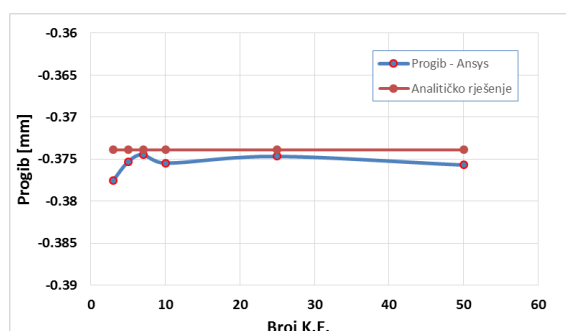
Maksimalne vrijednosti progiba i naprezanja uslijed savijanja za konačnu najgušću mrežu K.E. se nalaze u sredini i iznose:  $w_{\max} = -0.3757 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{\max} = 47.38 \text{ MPa}$ . Njihova raspodjela prikazana je na slikama 55 i 56. Konvergencija rješenja prikazana je na slici 57.



Slika 55. Raspodjela progiba



Slika 56. Raspodjela savojnog naprezanja



Slika 57. Konvergencija progiba i savojnog naprezanja za 1-D ANSYS model

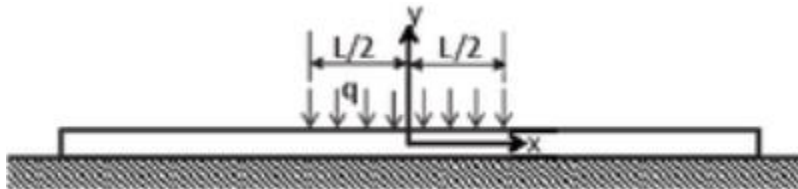
Na temelju dijagrama konvergencije i usporedbe s analitičkim rješenjima (Slika 57) prema (49), može se zaključiti da numerički model iznimno brzo konvergira konačnom rješenju i za progib i za savojno naprezanje oko osi Z. Već prva mreža K:E: daje jako dobre rezultate progiba, a za naprezanje zadovoljavajuće rezultate s relativnim greškama:  $\varepsilon_{w,3KE} = 0,96 \%$ ,  $\varepsilon_{\sigma,3KE} = 7,96 \%$ . Posljednja najgušća mreža konačnih elemenata daje rješenja s relativnim greškama  $\varepsilon_{w,50KE} = 0,48 \%$ ,  $\varepsilon_{\sigma,50KE} = 1,15 \%$ . Konačni zaključak koji se može izvući iz dijagrama konvergencije (Slika 57) jest da ovakav numerički model u ANSYS-u s Winklerovim oprugama daje adekvatne rezultate vertikalnog progiba i savojnog naprezanja.

#### 6.4.2. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi

Radi preciznijeg proračuna, napravljen je drugi realniji slučaj grede opterećene kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi s određenim razmakom od 1174.5 mm, tj. s

Fakultet strojarstva i brodogradnje

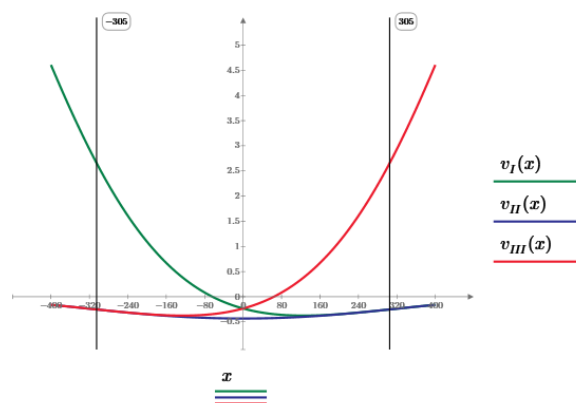
područjem na kojemu ne djeluje kontinuirano opterećenje. U tom slučaju, nema rubnih uvjeta ograničenja pomaka na krajevima. Korišten je programski paket *MahCAD Prime3.0*. Ovakav tip proračuna prikazan je na slijedećoj slici 58. U ovom slučaju nema ograničenja progiba na krajevima grede, što je realni slučaj koji se kasnije numerički analizira. Prema tome, potrebno je dobiti poklapanja rezultata ovog analitičkog proračuna i numeričke analize (*ANSYS*).



**Slika 58. Greda opterećena kontinuiranim opterećenjem na elastičnoj podlozi s razmakom [34]**

Kod ovog tipa pojednostavljenog 1D proračuna, gornja stezna ploča se proučava kao greda s svojstvima presjeka prema tablici 8, tj.  $I = 7614522 \text{ mm}^4$  (Jezgra 2/0). Ostali ulazni parametri su:  $q_u = 870,2 \text{ N/mm}$ ,  $l = 610 \text{ mm}$ ,  $E = 205000 \text{ MPa}$ . Srednji modul podloge za  $BJ = 697 \text{ mm}$  izražen samo po duljini grede iznosi  $K_{S,srednji} = 1835,575 \text{ N/mm}^2$ . Raspodjela progiba po konturi grede, momenti dijagram i dijagram poprečnih sila, prikazani su na slijedećim slikama 59-61: Analogne dijagrame, radi kontrole, moguće je dobiti na temelju [51]. Beta koeficijent, koji označava karakteristiku sustava, iznosi:

$$\beta := \sqrt[4]{\frac{K_s}{4 \cdot E \cdot I_{zz}}} = 0.004$$

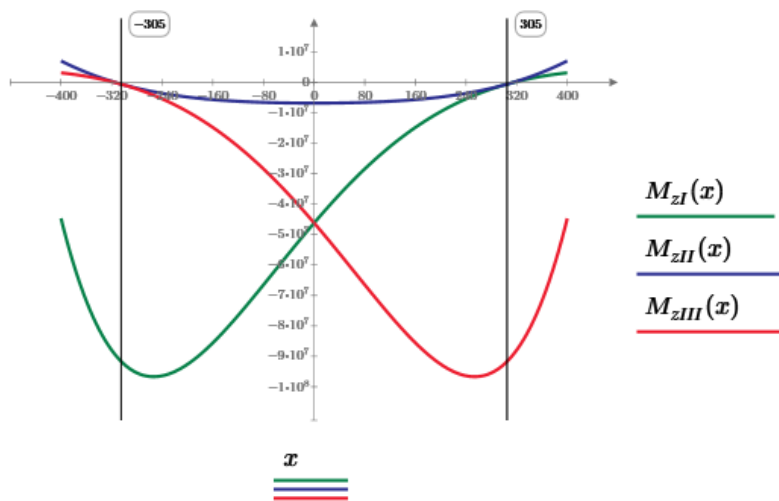


**Slika 59. Raspodjela progiba u blizini mjesta opterećenja**

$$v_I(x) := \frac{-q}{2 \cdot K_s} \cdot e^{-\beta \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( -\cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right)$$

$$v_{II}(x) := \frac{-q}{2 \cdot K_s} \cdot \left( 2 - \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)} - \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)} \right)$$

$$v_{III}(x) := \frac{-q}{2 \cdot K_s} \cdot e^{\beta \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( -\cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) + \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right)$$

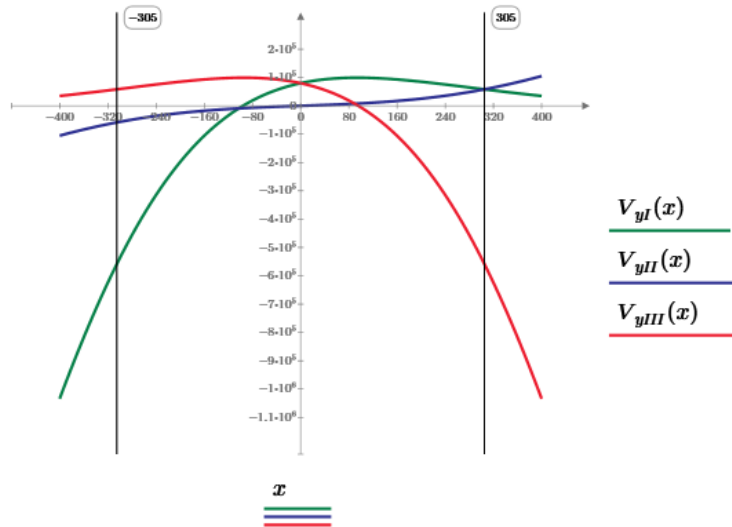


Slika 60. Raspodjela momenta u blizini mjesta opterećenja

$$M_{zI}(x) := \frac{-q}{4 \cdot \beta^2} \cdot e^{-\beta \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right)$$

$$M_{zII}(x) := \frac{-q}{4 \cdot \beta^2} \cdot \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)} + \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)} \right)$$

$$M_{zIII}(x) := \frac{-q}{4 \cdot \beta^2} \cdot e^{\beta \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) + \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right)$$



Slika 61. Raspodjela poprečnih sila u blizini mjesta opterećenja

$$V_{yI}(x) := \frac{q}{4 \cdot \beta} \cdot e^{-\beta \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) - \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) + \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right) \right)$$

$$V_{yII}(x) := \frac{q}{4 \cdot \beta} \cdot \left( e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)} \cdot \left( \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) - \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \right) - e^{-\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)} \cdot \left( \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) - \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \right) \right)$$

$$V_{yIII}(x) := \frac{q}{4 \cdot \beta} \cdot e^{\beta \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)} \cdot \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)\right) + \left( \sin\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) + \cos\left(\beta \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right)\right) \cdot e^{L \cdot \beta} \right) \right)$$

Kao što se može vidjeti iz prethodnih slika, na dijagramima postoje tri krivulje. Prva najtočnije opisuje područje  $x \leq -L/2$ , druga se odnosi na područje  $-L/2 \leq x \leq L/2$ , a treća najbolje opisuje područje  $x \geq L/2$ . Zajedno sa sve tri krivulje, moguće je precizno opisati progibe, momente i poprečne sile.

Iz rezultata vidljivo je da maksimalni iznosi progiba i momenta u središnjem dijelu kontinuiranog opterećenje (za  $x = 1479,5$  mm) iznose  $w_{\max} = 0,433$  mm i  $M_{2,\max} = 6,84 \cdot 10^6$  Nmm. Prema tome, naprezanje u središnjem dijelu grede iznosi:

$$\sigma_{2,\max} = \frac{M_{2,\max}}{W} = \frac{6,84 \cdot 10^6}{299784} = 22,816 \text{ MPa} \quad (51)$$

Uspoređujući dijagrame progiba dva prethodna analitička proračuna (Slika 49 i 58), vidljivo je da je greda s onemogućenim pomacima u krajevima mnogo kruća u usporedbi s gredom s slobodnim krajevima, odnosno progibi su:  $w_1 = 0,374$  mm  $\ll$   $w_2 = 0,433$  mm, što je



bilo i za očekivati. Prema tome, logično je i da je maksimalni moment drugog slučaja manji, tj. vrijedi:  $M_{1,\max} = 14,3698 \cdot 10^6 \text{ Nmm} > M_{2,\max} = 6,84 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$ . Iz istog razloga, uspoređujući rezultate napreznja (49) i (51) imamo slijedeće vrijednosti napreznja:

$$\sigma_{1,\max} = 47,9339 \text{ MPa} > \sigma_{2,\max} = 22,816 \text{ MPa} . \quad (52)$$

### 6.4.3. Rješenje metodom konačnih elemenata – EFS parametar

U ovom poglavlju će biti napravljen numerički model analogan prethodnom analitičkom rješenju (Slika 58). Potrebno je postići poklapanje rezultata analitičkog rješenja i numeričkog rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata. Modul podloge  $K_0$  se u ANSYS-u unosi kao elastični modul podloge *EFS* (eng. *Elastic Foundation Modulus*).

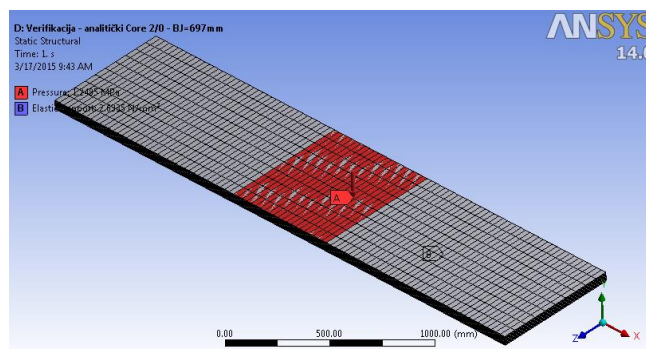
Numerički model je napravljen prema analognim parametrima kod analitičkog rješenja. Jedini što je u ovom slučaju potrebno definirati kontinuirano opterećenje po površini:

$$p = \frac{q_u}{BJ} = 1,2485 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} , \quad (53)$$

te također elastični modul podloge  $K_0 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right]$  koji se dobije prema izrazu (12), tj.:

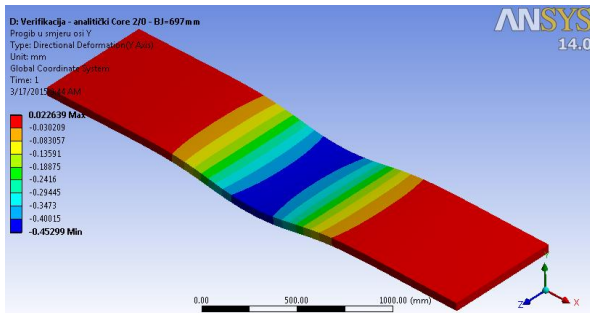
$$EFS \equiv K_0 = \frac{K_s}{BJ} = \frac{1837.5}{697.5} = 2,6335 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \quad (54)$$

Definirano kontinuirano opterećenje i najgušća mreža konačnih elemenata (10100 K.E.) su prikazani na slijedećoj slici 62.

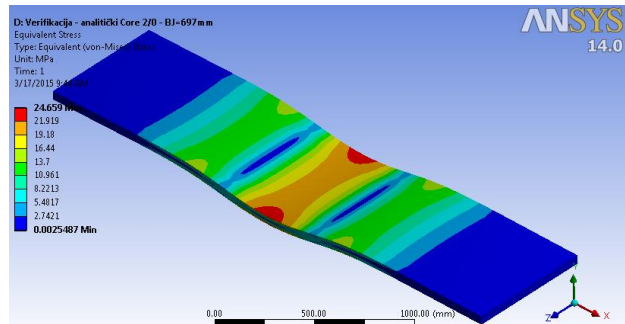


**Slika 62. 3D Numerički model grede na elastičnoj podlozi – ANSYS 14.0**

Korišteni su 3D heksaedarski SOLID186 kvadratni konačni elementi s 20 čvorova te kompatibilni 2D SURF154 konačni elementi na donjoj strani ploče za opisivanje krutosti podloge (EFS). Raspodjela progiba i napreznaja za najgušću mrežu (131933 K.E.) korištenjem programsko paketa ANSYS je prikazana na slikama 63 i 64.

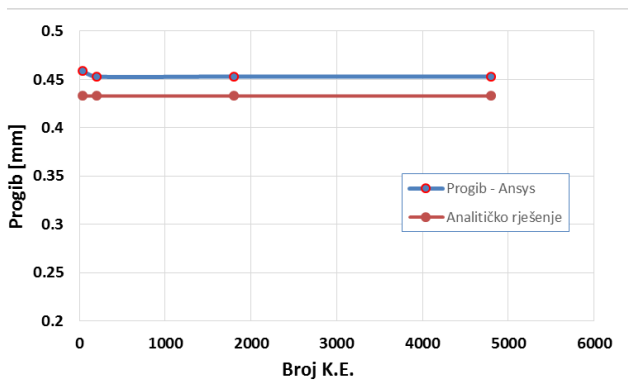


Slika 63. Raspodjela progiba za primjer IV – ANSYS

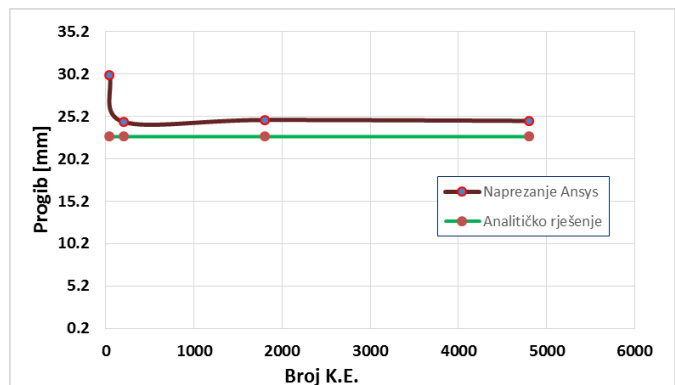


Slika 64. Raspodjela napreznaja za primjer IV - ANSYS

Konvergencija progiba i napreznaja numeričkog modela i usporedba s analitičkim rješenjem je prikazana na slikama 65 i 66. Vidljivo je da se već za relativno rijetku mrežu postiže konvergencija rješenja metodom konačnih elemenata. Konačni rezultati maksimalnih vrijednosti progiba i Von-Mises napreznaja su:  $w_{Anslys,EFS} = 0,453 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{Anslys,EFS} = 24,659 \text{ MPa}$ .



Slika 65. Konvergencija progiba - ANSYS



Slika 66. Konvergencija napreznaja - ANSYS

Relativna razlika analitičkog rješenja i numeričkog rješenja za najgušću mrežu K.E: iznosi:

$$\varepsilon_w = \frac{w_{Anslys,EFS} - w_{analit.}}{w_{analit.}} \cdot 100 = 4,61 \%, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{Anslys,EFS} - \sigma_{analit.}}{\sigma_{analit.}} \cdot 100 = 8,08 \%. \quad (55)$$

#### 6.4.4. Rješenje metodom konačnih elemenata – numerički model s oprugama

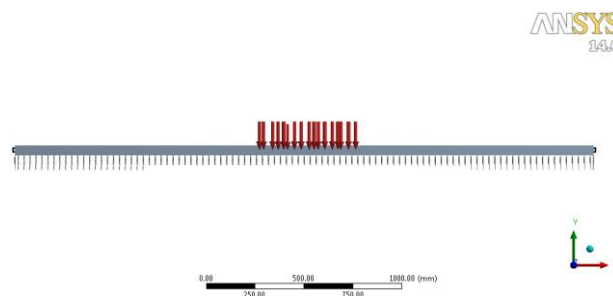
Kasnije će se prilikom izrade 1D i 3D numeričkih modela definirati podloga pomoću opruga u čvorovima koje su uzemljene na fiktivno kruto dno, za razliku od prijašnjeg definiranja krutosti podloge preko *EFS* parametra (u *ANSYS*-u pomoću opcije *Elastic support*). Razlog tomu leži u nemogućnosti definiranja *EFS*-a koji je u ovisnosti o progibu  $v$ , tj.  $EFS(v)$ .

##### 6.4.4.1. 1D model s oprugama

Numerički model definiran preko opruga bi trebao dati iste rezultate kao numerički model u prethodnom poglavlju 6.4.3. Krutost pojedine linearne opruge konstantne krutosti se određuje prema izrazu (14), tj. prema razmaku između opruga po ukupnoj širini  $B$  i duljini  $l$  koja je podijeljena s brojem opruga po duljini:

$$k = K_0 \cdot b \cdot l = 2,633536 \cdot 697 \cdot \frac{2959}{97} = 55\,994,487 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \quad (56)$$

Iz razloga što nije moguće s COMBIN14 K.E. (linearna opruga) u *ANSYS*-u definirati krutost opruge nula u pozitivnom smjeru produženja, tj. nije moguće definirati da opruga pod vlakom ne daje nikakav otpor, potrebno je opruge konstantne krutosti (56) definirati s COMBIN39 K.E. (nelinearna opruga) s karakteristikom opruge nula u vlačnom području. Nakon izrade geometrije, postavljanja R.U.-a u sredini grede (onemogućeni svi pomaci i rotacije osim progiba u smjeru osi Y), definiranja opterećenja  $q_u = 870,2 \text{ N/mm}$ , numerički 1-D model izgleda kao na slici 67.

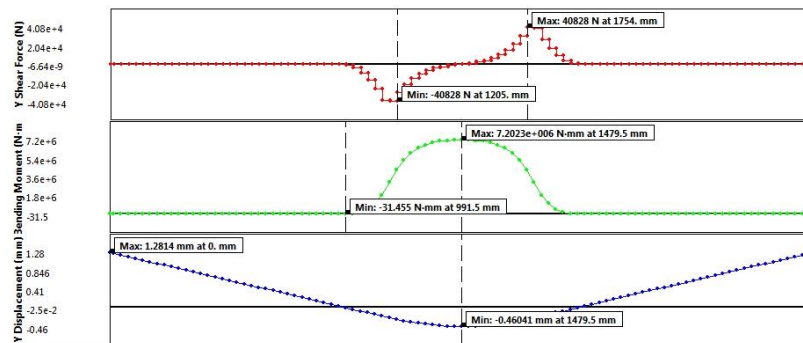


Slika 67. Primjer IV - 1-D ANSYS model s linearnim oprugama

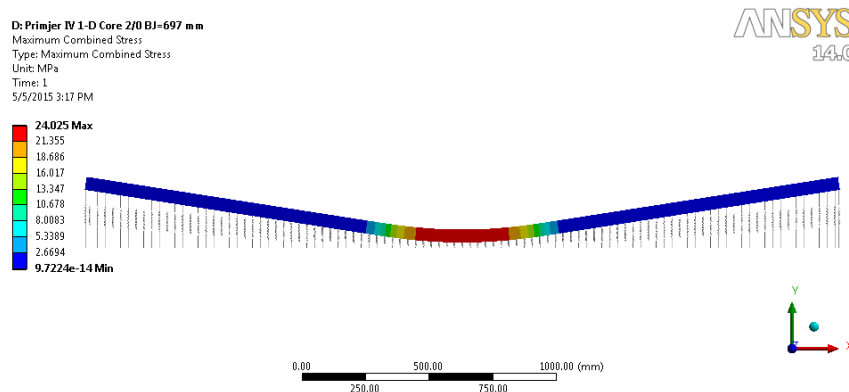
Nakon provedene statičke analize, moguće je prikazati raspodjelu poprečnih sila, momenata i vertikalnog progiba, što je prikazano na slici 68. Raspodjela ekvivalentnih

naprezanja prikazana je na slici 69. Dobiveni rezultati za vertikalni progib i naprezanje u središtu grede su:  $w_{Ansys,1D} = 0,460 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{Ansys,1D} = 24,025 \text{ MPa}$ . Relativne greške su slijedeće:

$$\varepsilon_w = \frac{W_{Ansys,1D} - W_{Analit}}{W_{Analit}} \cdot 100 = 6,23 \%, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{Ansys,1D} - \sigma_{Analit}}{\sigma_{Analit}} \cdot 100 = 5,29 \%. \quad (57)$$



**Slika 68. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo) – 1-D ANSYS model s oprugama**



**Slika 69. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja 1-D ANSYS model s oprugama**

Na temelju rezultata ANSYS 1-D modela, može se zaključiti da je ovaj princip modeliranja grede na elastičnoj podlozi pomoću konstrukcija ispravan, te da se rezultati slažu s analitičkim rješenjem (57). To je bitna informacija, jer će se kasnije u poglavlju 7 modelirati 1-D nelinearni modeli prema istom principu. Iz razloga što nije moguće diskretizirati oprugu za beskonačno male razmake između opruga, logično je da će uvijek postojati greška u modelu, koju je potrebno svesti na zadovoljavajuću razinu.

## 6.4.4.2. 3D numerički model s oprugama

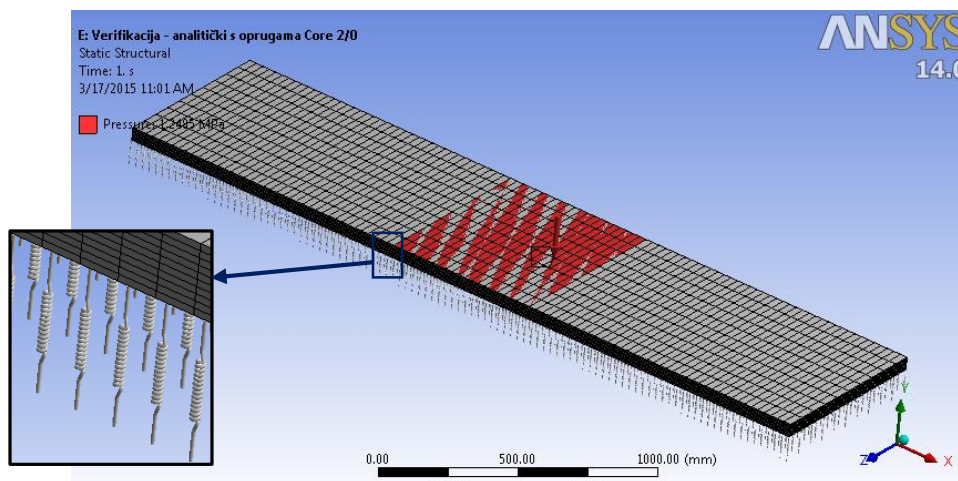
Krutost pojedine linearne opruge konstantne krutosti se određuje prema izrazu (14), tj. prema razmaku između opruga po širini  $b$  i duljini  $l$  koje su podijeljene s brojem opruga  $u$  u smjeru širine, odnosno duljine grede:

$$k = K_0 \cdot b \cdot l = 2,633536 \cdot \frac{697}{10} \cdot \frac{2959}{50} = 10\,862,93 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \quad (58)$$

Prema definiranim razmacima za između opruga  $u$  (58), potrebno je definirati  $11 \cdot (50+1) = 561$  opruga. Rubni uvjeti i narinuto kontinuirano opterećenje su analogni prethodnom poglavlju 6.4.3., s razlikom da sada tlak djeluje po širini pa iznos opterećenja iznosi:

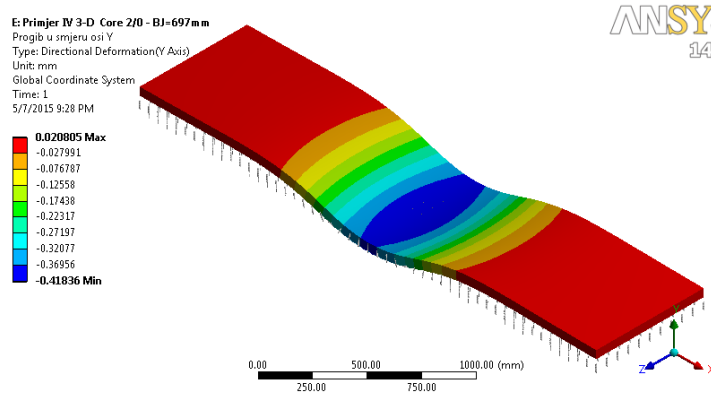
$$p = \frac{q_u}{b} = \frac{870,2}{697} = 1,2485 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (59)$$

Razmak između opruga definira ujedno i veličina konačnih elemenata, jer opruge trebaju biti definirane egzaktno u čvorovima, a ne između čvorova. Iz tog razloga, razmaci između opruga su uzeti prema dimenzijama konačnih elemenata za najgušću mrežu. Numerički 3D model i mreža konačnih elemenata s oprugama je prikazan na slici 70.

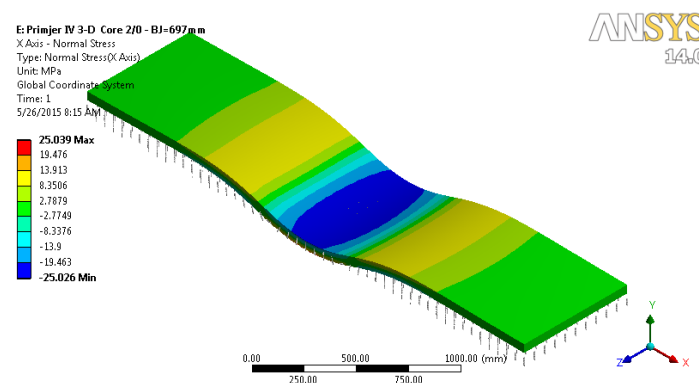


**Slika 70. Numerički model s linearnim oprugama (najgušća mreža K.E.) - ANSYS**

Nakon definiranja opruga i opterećenja (Slika 70), dobiveni rezultati za vertikalni progib i naprezanje u smjeru osi X (odgovara savojnom naprezanju u 1D modelu) prikazani su u nastavku na slikama 71 i 72.



Slika 71. Progib - primjer IV s linearnim oprugama



Slika 72 Naprezanje u smjeru X-osi uslijed savijanja - primjer IV s linearnim oprugama

Na temelju rezultata analize progiba u smjeru osi  $Y$  i mjerodavnog savojnog normalnog naprezanja u smjeru  $X$ -osi za numerički model s definiranim konstantnim oprugama u čvorovima, može se vidjeti da su konačni rezultati 3D-modela u sredini ploče  $w_{Ansys,3D} = 0,41836$  mm i  $\sigma_{Ansys,3D} = 25,039$  MPa . Odstupanje rezultata od analitičkog rješenja za progib i savojno naprezanje iznosi:

$$\varepsilon_w = \frac{w_{Ansys,3D} - w_{Ansys,EFS}}{w_{Ansys,EFS}} \cdot 100 = 3,38 \%, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{Ansys,3D} - \sigma_{Ansys,EFS}}{\sigma_{Ansys,EFS}} \cdot 100 = 9,74 \% \quad (60)$$

Prema relativnim greškama (60) može se zaključiti da 3-D modeli s oprugama daju dobre rezultate za progib (najtočnije u usporedbi s analitičkim zapravo), te također vrijedi da se i savojno naprezanje 3D modela poklapa s analitičkim rješenjem unutar zadovoljavajuće granice. Odstupanje naprezanja 3D modela od analitičkog rješenja može se objasniti diskretizacijom konačnim razmakom između opruga.

### 6.4.5. Usporedba svih rezultata – Primjer IV

Usporedbom rezultata linearne analize dobivenih u programskom paketu *ANSYS* preko *EFS* parametra, 3-D i 1-D modela, te analitičkog rješenja, uočljivo je da konačna rješenja ne odstupaju mnogo od analitičkog rješenja (Tablica 3), tj. relativna greška je jako malena. To znači da je princip modeliranja konstrukcije na elastičnoj podlozi na temelju *EFS* parametra, 3-D i 1-D modela ispravan. Prema tome, modeliranje 1-D i 3-D modela prema istom principu, ali s nelinearnim oprugama, treba također davati također adekvatne rezultate.

**Tablica 3. Rezultati konzole opterećene kontinuiranim opterećenjem**

<b>Wanalitički</b>	<b>0,433</b>	<b>mm</b>	<b><math>\sigma_{analitički}</math></b>	<b>22,816</b>	<b>MPa</b>
<b>WEFS</b>	<b>0,453</b>	<b>mm</b>	<b><math>\sigma_{EFS}</math></b>	<b>24,659</b>	<b>MPa</b>
<b>W1D</b>	<b>0,460</b>	<b>mm</b>	<b><math>\sigma_{1D}</math></b>	<b>24,025</b>	<b>MPa</b>
<b>W3D</b>	<b>0,418</b>	<b>mm</b>	<b><math>\sigma_{3D}</math></b>	<b>21,394</b>	<b>MPa</b>

### 6.5. PRIMJER V – Greda konačne duljine na oprugama s nelinearnom karakteristikom krutosti

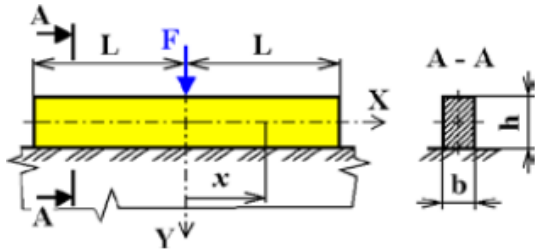
U prethodnim poglavljima, svugdje se uzimala u obzir konstantna krutost podloge. U tom slučaju je relativno jednostavno izraditi numerički model. S druge strane, ukoliko se želi simulirati opterećena konstrukcija koja se nalazi na nelinearno-elastičnoj podlozi, to zahtijeva definiranje nelinearnih opruga pomoću *APDL* programskog jezika (vidi poglavlje 6.2)<sup>9</sup>. Ovim primjerom integrirati će se znanje stečeno na temelju prethodnih verifikacijskih primjera, nakon čega je moguće s sigurnošću pristupiti modeliranju numeričkih modela realnih konstrukcija.

Za verifikaciju uzet je jednostavan slučaj opterećenja grede koncentriranom silom na nelinearnoj elastičnoj podlozi prema [53] (Slika 73). Ulazne varijable koje ulaze u model su:  $F = 10^5$  N,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa,  $b = 200$  mm,  $h = 400$  mm,  $L = 10000$  mm. Zbog simetrije oko osi Y, korištena je samo polovica grede s opterećenjem silom  $F/2$  na lijevom kraju grede. Nelinearna reakcija podloge po duljini grede  $q_R$  [N/mm<sup>2</sup>] predstavlja linearnu + kubičnu aproksimaciju eksperimentalnog ispitivanja i njen izraz prema [53] glasi:

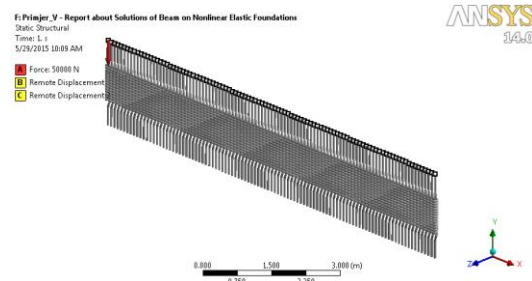
<sup>9</sup> Karakteristika nelinearne opruge se unosi u programski paket *ANSYS* i *ABAQUS* prema primjeru II (6.2).



$q_R = k_1 v + k_2 v^3 = 10^7 v + 5 \cdot 10^{12} v^3$ . Konačan izgled 1D modela u programskom paketu ANSYS s definiranim opterećenjem i rubnim uvjetom simetrije ( $u_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 0$ ), prikazan je na slici 74.

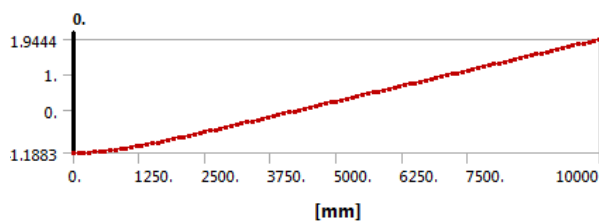


Slika 73. Greda koja leži na nelinearnoj podlozi i opterećena silom  $F$  [53]

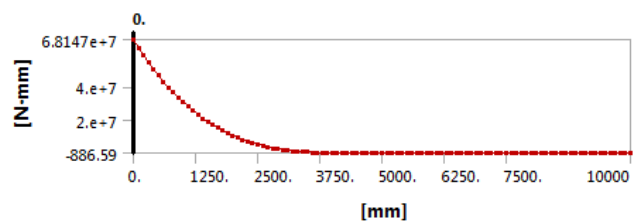


Slika 74. ANSYS 1D model grede na nelinearnoj podlozi

Raspodjela vertikalnog progiba u smjeru Y-osi i momenta savijanja prikazani su na slikama 75 i 76.



Slika 75. Raspodjela progiba – Primjer V



Slika 76. Raspodjela momenta savijanja- Primjer V

Ekstremne vrijednosti progiba i momenta savijanja na mjestu opterećenja ANSYS modela su:  $v_y = 1,1883$  mm,  $M_z = 68\,147$  Nm : Vrijednosti maksimalnog progiba i momenta savijanja dobivenih metodom konačnih razlika prema [53] iznose:  $v_{y,Frydryššek} = 1,215$  mm i  $M_{z,Frydryššek} = 70\,000\,000$  Nmm. Prema tome, može se zaključiti da je relativna razlika ovih dva modela zadovoljavajuće mala i da iznosi:

$$\varepsilon_{v_y} = \left| \frac{v_{y,ANSYS}}{v_{y,Frydryššek}} - 1 \right| \cdot 100 = 2,19 \%, \quad \varepsilon_{M_z} = \left| \frac{M_{z,ANSYS}}{M_{z,Frydryššek}} - 1 \right| \cdot 100 = 2,65 \%. \quad (61)$$

Time je pokazano da je ovaj princip modeliranja grede na nelinearnoj podlozi ispravan, odnosno da je moguće modelirati elastičnu podlogu preko opruga s nelinearnom karakteristikom krutosti na ekvidistantnim međusobnim razmacima.



## 7. Numerički 1D modeli horizontalnog savijanja steznika

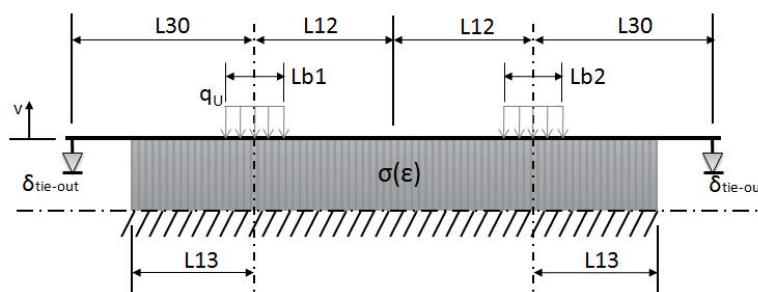
U ovom poglavlju provedena je statička analiza dva slučaja opterećenja jezgre transformatora u programskom paketu *ANSYS 14.0*, i to slučaja Jezgra 1/2 i Jezgra 2/0. Radi izbjegavanja ponavljanja objašnjenja i teksta, te nakupljanja prevelikog broja stranica, ova dva slučaja su u ovom dokumentu detaljno objašnjena, dok se rezultati i objašnjenja preostalih devet slučajeva mogu pronaći u dokumentu u prilogu: „Rezultati 11 - 1D ANSYS modela savijanja steznog sustava limova transformatora“ (vidi prilog V). U tom dokumentu u prilogu je moguće vidjeti detaljne prikaze rezultata i usporedbi s KPT modelom, dok će se u diplomskom radu u jednoj tablici prikazati rezultati svih 11 slučajeva opterećenja jezgre transformatora.

### 7.1. Jezgra 1/2:

#### 7.1.1. *Opterećenje s bandažama*

Za početak, analiziran je prvi slučaj Jezgra 1/2 s zadana dva kontinuirana opterećenja  $q_u$ , što je prikazano na slici 77. U ovom proračunu, konstrukcija horizontalnog steznika je aproksimirana gredom zadanog momenta inercije  $I_{zz}$  i momentom otpora  $W$ . Tu aproksimaciju je moguće napraviti iz razloga što je omjer duljine i širine veći od 5, tj. vrijedi pravilo [40]:

$$\frac{L_F}{b} = \frac{3360}{300} = 11,2 > 5. \quad (62)$$



Slika 77. Jezgra 1/2 s bandažama

Tablica 4. Zadani parametri – Jezgra 1/2 s bandažama

$L_o$	366 mm	$I$	2195611 mm <sup>4</sup>
$T$	0.27 mm	$E$	205000 $\frac{N}{mm^2}$
$BJ$	400 mm	$Lb1$	320 mm
$BJmin$	120 mm	$Lb2$	320 mm
$L12$	1108 mm	$L30$	572 mm
$L13$	397 mm	$q_u$	172.97 $\frac{N}{mm}$
$W$	98790 mm <sup>3</sup>		

- **Geometrija:**

Ukupna duljina grede tada iznosi:

$$L = 2 \cdot (L_{30} + L_{12}) = 3360 \text{ mm.} \quad (63)$$

Ukupna duljina kontaktne površine između grede i podloge iznosi:

$$L_F = 2 \cdot (L_{13} + L_{12}) = 3010 \text{ mm} \quad (64)$$

Za izračun visine  $h$  i širine  $b$  pravokutnog poprečnog presjeka korišteni su ovi izrazi:

$$h = 2 \cdot \frac{I}{W}, \quad b = \frac{12 \cdot I}{h^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{W^3}{I^2}. \quad (65)$$

Iz razloga što će podloga biti definirana s paralelnim sustavom međusobno neovisnih opruga koje su spojene s podlogom, nužno je definirati točke u kojima će se COMBIN39 i BEAM188 konačni elementi povezati. Definiranjem tih točaka, u isto vrijeme se odredio razmak između opruga, tim i duljina jednog konačnog elementa između tih točaka. Prema literaturi [33]-[48], najispravnije je definirati samo jedan konačni element između dviju opruga. Za slučaj Jezgra 1/2, razmak između opruga  $l$  koji je ravnomjerno raspodijeljen za  $n = 152$  opruga iznosi:

$$l = \frac{L_F}{n} \approx 19,803 \text{ mm} \quad (66)$$

Preporučeno je imati barem 100 ili više opruga u numeričkom modelu za zadovoljavajuću točnost.

- **Mreža konačnih elemenata:**

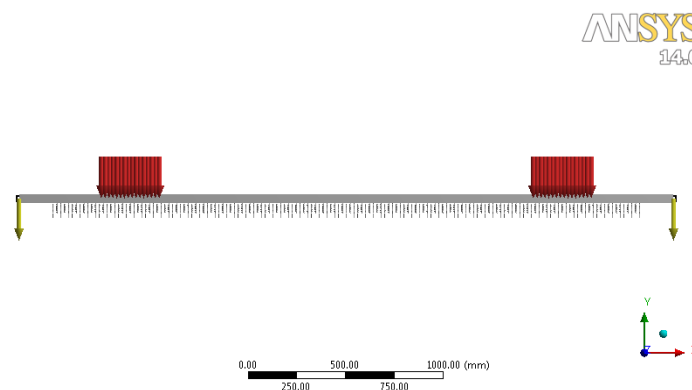
BEAM 188 (gredni elementi) i COMBIN 39 (nelinearna opruga) konačni elementi su korišteni u numeričkom modelu. Korištena je opcija *Edge-size* da bi se osiguralo da se samo jedan element nalazi između dviju opruga.

- **Geometrijski rubni uvjeti i rubni uvjeti sila:**

Kontinuirano opterećenje je definirano kao ulazni parametar prema tablici 4. Za slučaj Jezgra 1/2 opterećenje  $q_u$  mora biti definirano u smjeru y-osi.

Geometrijski rubni uvjet  $\delta_{tie-out}$  je progib [mm] na oba kraja grede (vidi sliku 77) koji je izračunat na temelju izraza:  $f(-\delta_{tie-out}) = 0,15 \cdot BJ$ . Progib  $\delta_{tie-out}$  odgovara prosječnom tlaku opterećenja od 0,15 MPa na srednjem najvećem paketu limova jezgre transformatora. Ovaj geometrijski rubni uvjet se može izračunati manualno metodom Bisekcije ili korištenjem jednog od matematičkih softvera poput MathCAD-a, koji ima implementirani iterativni algoritam za rješavanje nelinearnih jednadžbi na temelju Runge-Kutta metode. Za ovaj slučaj Jezgre 1/2 izračunati  $\delta_{tie-out}$  iznosi -0,7469 mm.

Konačni izgled numeričkog modela u ANSYS Workbench-u za zadane dimenzije i iznos opterećenja prema tablici 4 je prikazan na slici 78. Na toj slici se može vidjeti definirano kontinuirano opterećenje  $g_u$  (označeno crvenom bojom) te ograničenje pomaka u srednjem čvoru:  $u_x = 0, w_z = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0$ . Izračunata dimenzija širine grede je  $BJ = 300$  mm, s ekvivalentnom visinom  $h = 44,45$  mm s obzirom na moment inercije  $I$  i moment otpora  $W$  (43) prema tablici 4 (vidi izraz (65)).



**Slika 78. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 1/2 s bandažama**

Za slučaj Jezgre 1/2 (Slika 77), duljina grede koja se nalazi nad elastičnom podlogom  $L_F = 3010$  mm je podijeljena  $n_{K.E.} = 150$  konačnih elemenata, čime se dobije  $N = 150 + 1 = 151$  broj čvorova, odnosno potrebno je definirati 151 opruga.

Konačno, prema izrazu (12) na temelju [52], krutost pojedine određuje se slijedećim izrazom:

$$k(v) = K_s(v) \cdot l \text{ [N/mm]}. \quad (67)$$

Sila u opruzi ovisno o progibu  $v$  iznosi:

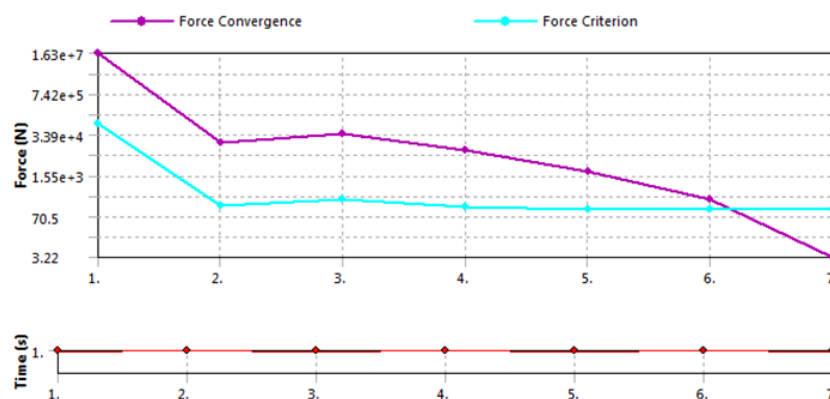
$$F(v) = k(v) \cdot v \text{ [N]}. \quad (68)$$

#### 7.1.1.1. Analiza rezultata – Jezgra 1/2 s bandažama

Za nelinearne analize, ANSYS ima implementirani iteracijski algoritam koji se bazira na Newton-Raphson metodi (metodi tangente), koji je također korišten u ovom slučaju. Prema Newton-Raphson metodologiji uvjet ravnoteže je postignut kada je razlika između vanjskih i unutarnjih sila, nazvan rezidual  $\mathbf{R}$ , pala ispod 0,1 % primijenjenog vanjskog opterećenja. Prema tome, kriterij konvergencije je slijedeći:

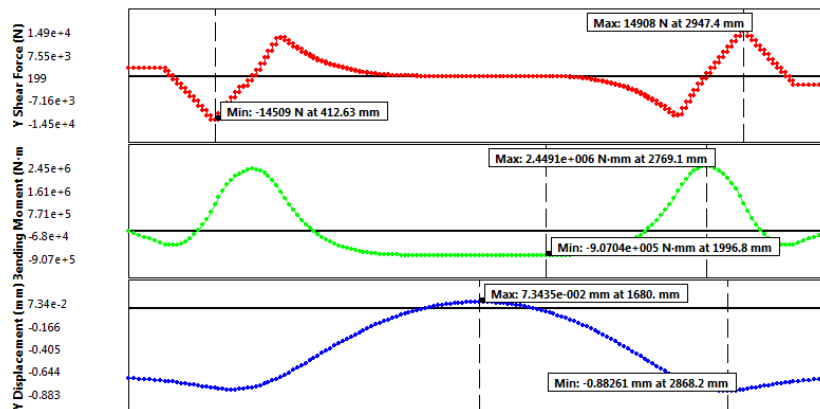
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_e - \mathbf{R}_i < 0,001 \cdot \mathbf{R}_e$$

Za slučaj Jezgra 1/2 Newton-Raphson dijagram (Slika 79) pokazuje da se sila reziduala (eng. *Force Convergence* u ANSYS terminologiji) smanjila ispod kriterija konvergencije nakon četvrte iteracije. To prikazuje da je za ovaj slučaj konvergencija postignuta jako brzo. Implementirana reducirana stabilizacijska metoda, koja nema utjecaj na konačan rezultat, je korištena za prvu iteraciju.



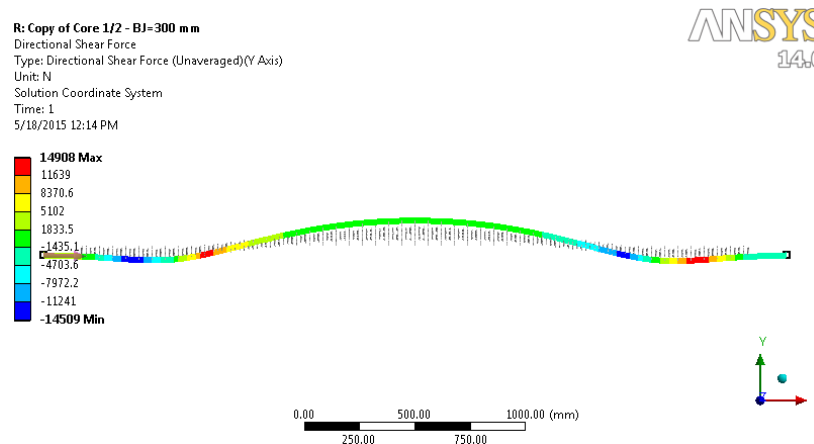
Slika 79. Dijagram sile reziduala i broja iteracija – Jezgra 1/2

Nakon provedene statičke numeričke analize savijanja grede prema parametrima iz tablice 4, moguće je prikazati raspodjelu poprečnih sila, momenta savijanja i progiba uslijed opterećenja, što se jasno vidi na slici 80.

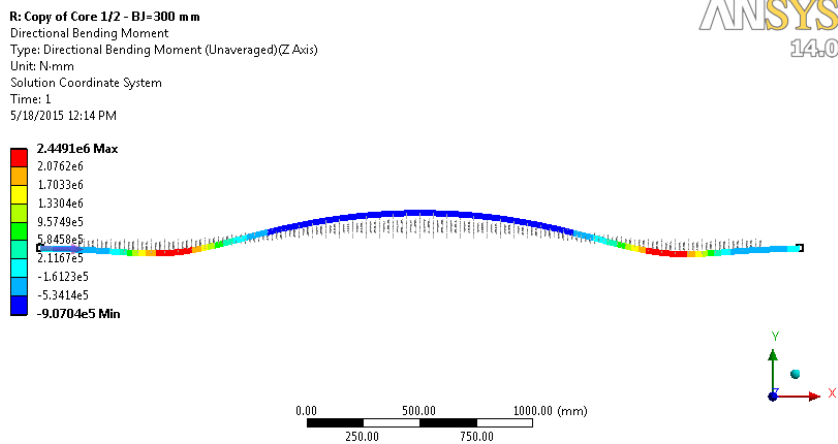


**Slika 80. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo) – Jezgra 1/2 s bandažama**

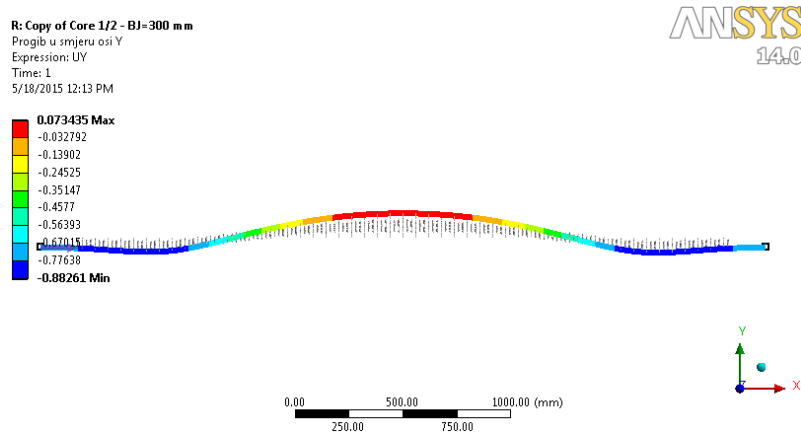
Grafički prikaz raspodjele poprečnih sila, momenta savijanja i progiba uslijed opterećenja, prikazan je na slijedećim slikama 81-83. Raspodjela naprezana uslijed savijanja, prikazana je na slijedećoj slici 84. Raspodjele nisu prikazane realno, već su namjerno prikazane s automatski uvećanim prikazom promjene za  $1,7 \cdot e3$ , iz razloga da se dobije na razlučivosti i kvalitetnijoj preglednosti rezultata. Po istom principu su prikazivani i ostali dijagrami u ovom radu.



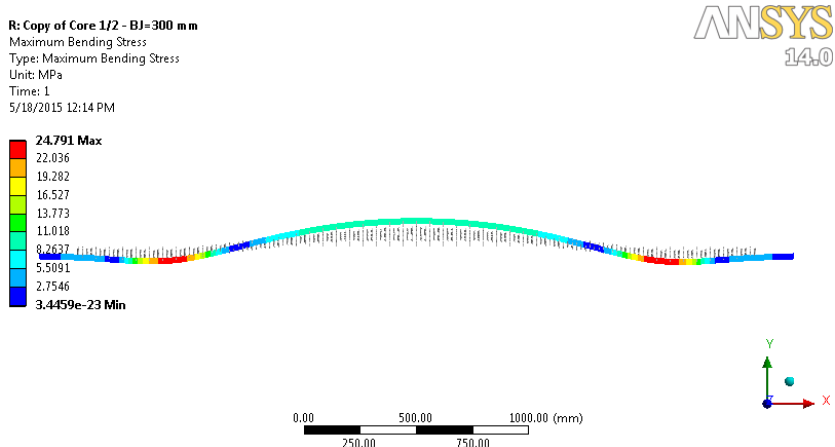
**Slika 81. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 1/2 s bandažama**



Slika 82. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra ½ s bandažama



Slika 83. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra ½ s bandažama



Slika 84. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra ½ s bandažama

Ovakav slučaj opterećenja je približan slučaj čistog savijanja, prema tome, direktna naprezanja uzrokovana aksijalnim opterećenjem u smjeru X-osi su minimalna (što je i za očekivati) naspram naprezanjima savijanja uzrokovana opterećenjem u smjeru Y-osi. Maksimalno kombinirano naprezanje je kombinacija direktnog naprezanja i naprezanja uslijed savijanja. Zbog čistog savijanja, maksimalno kombinirano naprezanje u ovom slučaju predstavlja maksimalno naprezanje uslijed savijanja. Elementarna teorija pretpostavlja savojna naprezanja kao:

$$\sigma_{xx,max} = \frac{M_{zz}}{I} \cdot \frac{h}{2} \quad (69)$$

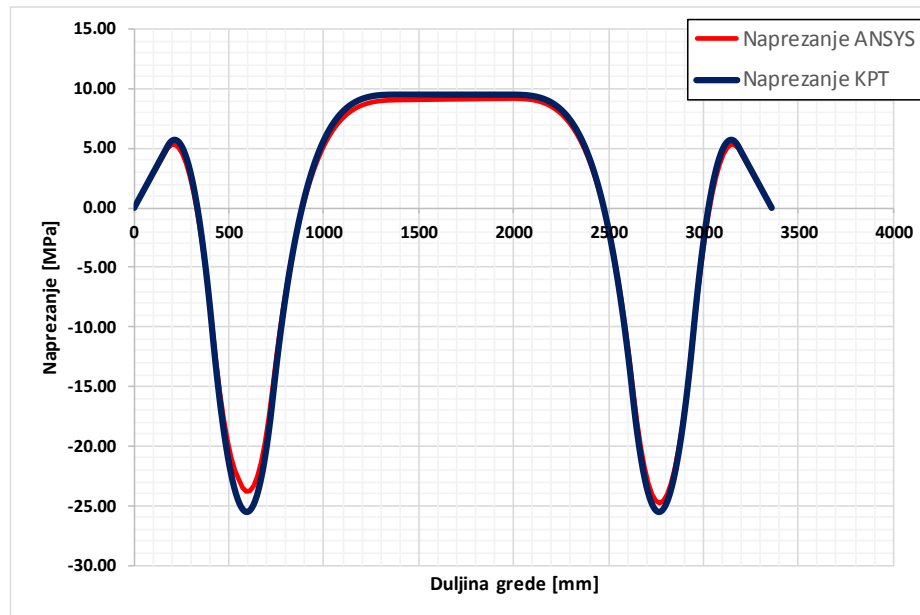
Na temelju rezultata analize slučaja Jezgra 1/2 s bandažama imamo slijedeće rezultate ekstremnih vrijednosti (Tablica 5):

**Tablica 5. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra 1/2 s bandažama**

$w_{max} = -0,88261 \text{ mm}$	$M_{max} = 2\,449\,100 \text{ Nmm}$
$Q_{max} = 14\,908 \text{ N}$	$\sigma_{max} = 24,791 \text{ MPa}$

#### 7.1.1.2. Usporedba rezultata ANSYS Jezgra 1/2 modela s KPT modelom

Na temelju matematičkog modela, koji je dobiven od strane tvrtke Končan – Energetski transformatori (KPT), napravljena je usporedba rezultata ANSYS numeričkog modela s KPT modelom. Taj model je napravljen korištenjem programskog paketa MATLAB, te se bazira na manualnoj izvedbi funkcija oblika koje aproksimiraju diferencijalnu jednadžbu savijanja grede na elastičnoj podlozi. Nakon usporedbe rezultata naprezanja uslijed savijanja KPT modela i ANSYS model, moguće je uočiti da je relativna razlika jako malena.



**Slika 85. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2**

Usporedbom maksimalne vrijednosti naprezanja KPT modela koja iznosi  $\sigma_{KPT} = 25,53 \text{ MPa}$ , i ANSYS modela  $\sigma_{ANSYS} = 24,971 \text{ MPa}$ , relativna greška iznosi:

$$\varepsilon = \left| \frac{\sigma_{ANSYS}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 2,89 \%. \quad (70)$$

Nakon što su izračunati progibi u smjeru  $Y$ -osi, moguće je izračunati deformacije konstrukcije. S tim podatkom zatim moguće je odrediti tlak koji se javlja u srednjem najvećem paketu limova. Formula kojom se izračunava taj tlak glasi:

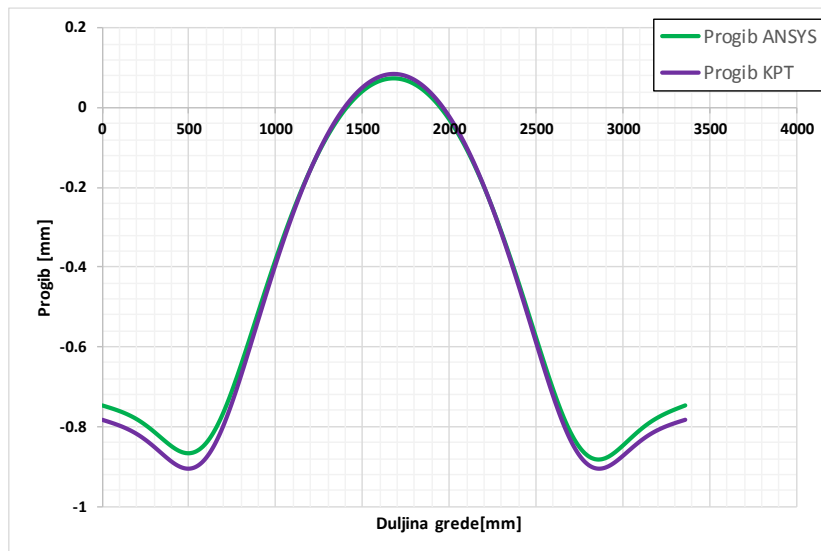
$$v \rightarrow \varepsilon = \frac{-v}{L_0} \rightarrow p_{ANSYS} \equiv \sigma(\varepsilon) = \beta_1 \cdot \left( \beta_2 \cdot \ln \left( \frac{\cosh\left(\frac{\varepsilon - \beta_3}{\beta_2}\right)}{\cosh\left(\frac{-\beta_3}{\beta_2}\right)} \right) + \beta_4 \cdot \varepsilon \right) \cdot \left( \frac{BJ_{\min}}{BJ} \right) \quad (71)$$

Usporedbom raspodjele vertikalnog progiba i tlaka KPT modela i ANSYS modela, vidi se da je relativna razlika jako malena (vidi slike 86 i 87). Usporedbom maksimalne vrijednosti vertikalnog progiba KPT modela:  $w_{KPT} = -0,91 \text{ mm}$  i  $p_{KPT} = 0,23 \text{ MPa}$  s rezultatima novog ANSYS modela:  $w_{ANSYS} = -0,88261$  i  $p_{ANSYS} = 0,28 \text{ MPa}$ , dobivena je slijedeća relativna razlika:

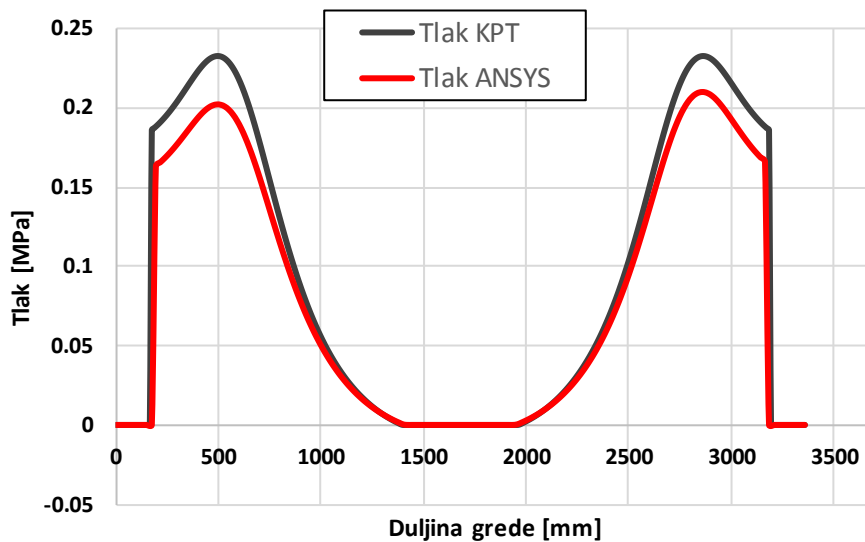


$$\varepsilon_w = \left| \frac{w_{ANSYS}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 3 \%, \quad (72)$$

$$\varepsilon_p = \left| \frac{p_{ANSYS}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 17,85 \%. \quad (73)$$

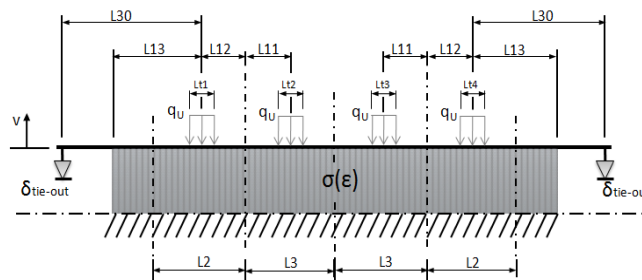


Slika 86. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2



Slika 87. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2

## 7.1.2. Opterećenje s vijcima



Slika 88. Jezgra 1/2 s vijcima

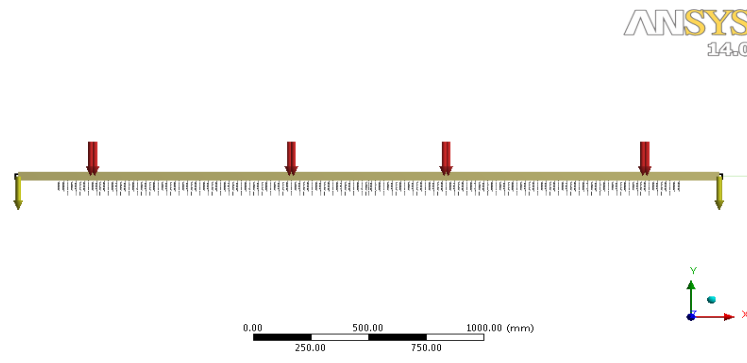
Tablica 6. Zadani parametri – Jezgra 1/2 s vijcima

<b><math>L_0</math></b>	<b>366</b>	<b><math>I</math></b>	<b>2195611</b>
<b><math>T</math></b>	<b>0.27</b>	<b><math>E</math></b>	<b>205000</b>
<b><math>B_J</math></b>	<b>400</b>	<b><math>L_{t1}</math></b>	<b>36</b>
<b><math>B_{Jmin}</math></b>	<b>120</b>	<b><math>L_{t2}</math></b>	<b>36</b>
<b><math>L_3</math></b>	<b>1108</b>	<b><math>L_{t3}</math></b>	<b>36</b>
<b><math>L_{11}</math></b>	<b>773</b>	<b><math>L_{t4}</math></b>	<b>36</b>
<b><math>L_{12}</math></b>	<b>87</b>	<b><math>L_{13}</math></b>	<b>147</b>
<b><math>Q_u</math></b>	<b>1370.8</b>	<b><math>L_{30}</math></b>	<b>322</b>
<b><math>W</math></b>	<b>98790</b>		

Provjera zadovoljenosti uvjeta za zamjenu stezne konstrukcije s gredom na elastičnoj podlozi (uzeta je u obzir izračunata širina grede  $b$ ) [40], [41]:

$$\frac{L_F}{b} = \frac{2684}{300} = 8,95 > 5. \quad (74)$$

Numerički model u *ANSYS Workbench-u* za zadane dimenzije i iznos opterećenja prema tablici 6 je prikazan na slici 89. Odabrana dimenzija širine grede prema (43) je  $b = 300$  mm, s ekvivalentnom visinom od  $h = 44,45$  mm prema izrazu (65). Na slici 89 može se vidjeti definirano kontinuirano opterećenje  $g_u$  (označeno crvenom bojom). Za ovaj slučaj Jezgre 1/2, izračunati  $\delta_{tie-out}$  iznosi -0,7469 mm.



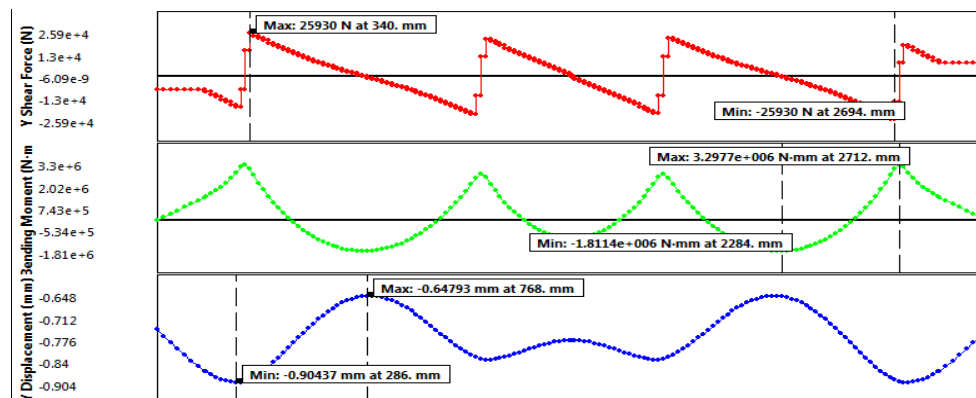
Slika 89. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 1/2 s vijcima

Za slučaj Jezgre 1/2 s vijcima (Slika 88), duljina grede koja se nalazi nad elastičnom podlogom iznosi  $L_F = 2684$  mm. Ukoliko podijelimo tu duljinu na  $n_{K.E.} = 149$  konačnih elemenata, dobije se  $N = 149 + 1 = 150$  broj čvorova, odnosno potrebno je definirati 150 opruga. Razmak između opruga tada iznosi:

$$l = \frac{L_{uk}}{n_{K.E.}} \approx 18 \text{ mm} . \quad (75)$$

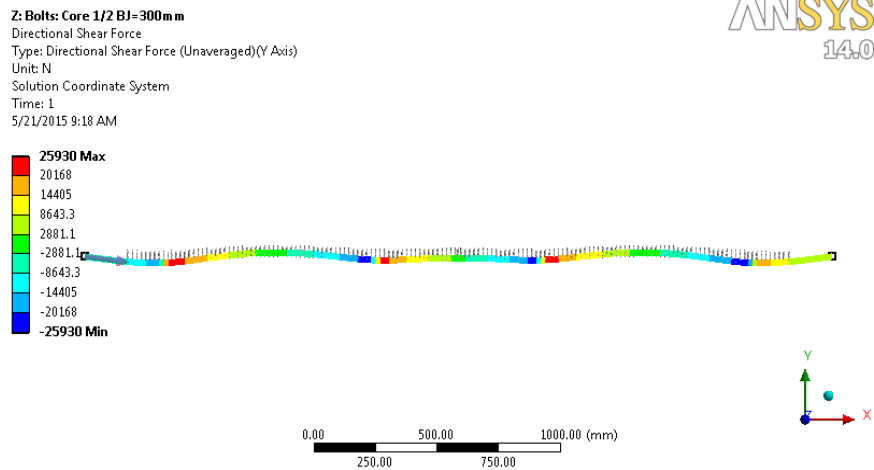
#### 7.1.2.1. Analiza rezultata – Jezgra 1/2 s vijcima

Nakon provedene statičke numeričke analize savijanja grede prema parametrima iz tablice 6, moguće je prikazati raspodjelu poprečnih sila, momenta savijanja i progiba uslijed opterećenja, što se jasno vidi na slici 90.

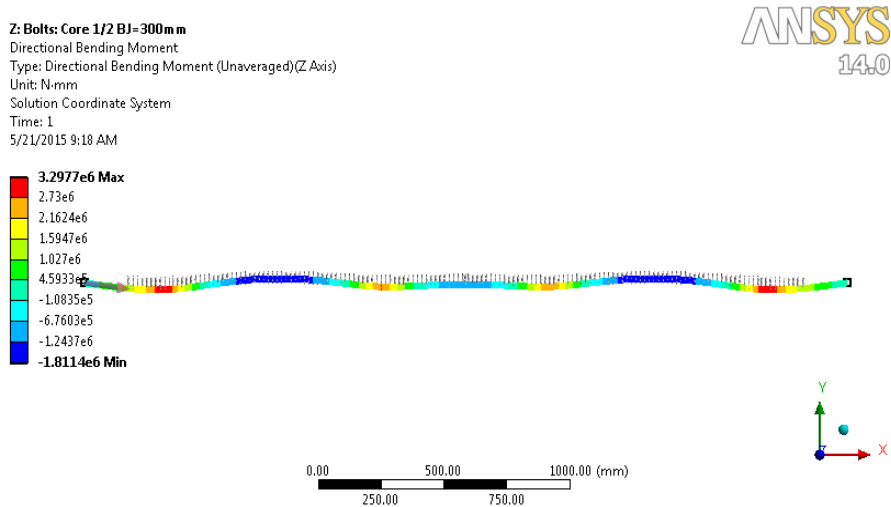


Slika 90. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)- Jezgra 1/2 s vijcima

Grafički prikaz raspodjele poprečnih sila, momenta savijanja, progiba i napreznja uslijed savijanja, prikazan je na slijedećim slikama 91-94.



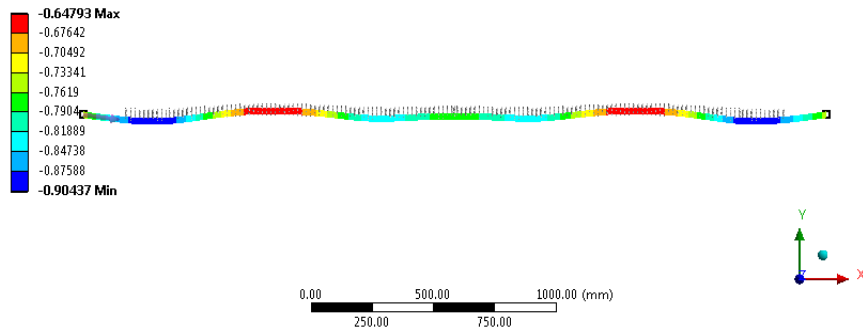
Slika 91. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 1/2 s vijcima



Slika 92. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 1/2 s vijcima



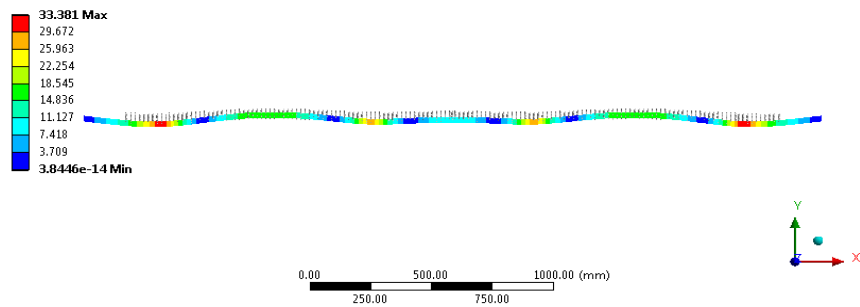
Z: Bolts: Core 1/2 BJ=300mm  
 Progib u smjeru osi Y  
 Type: Directional Deformation(Y Axis)  
 Unit: mm  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 5/21/2015 9:00 AM



Slika 93. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 1/2 s vijcima



Z: Bolts: Core 1/2 BJ=300mm  
 Maximum Combined Stress  
 Type: Maximum Combined Stress  
 Unit: MPa  
 Time: 1  
 5/21/2015 9:18 AM



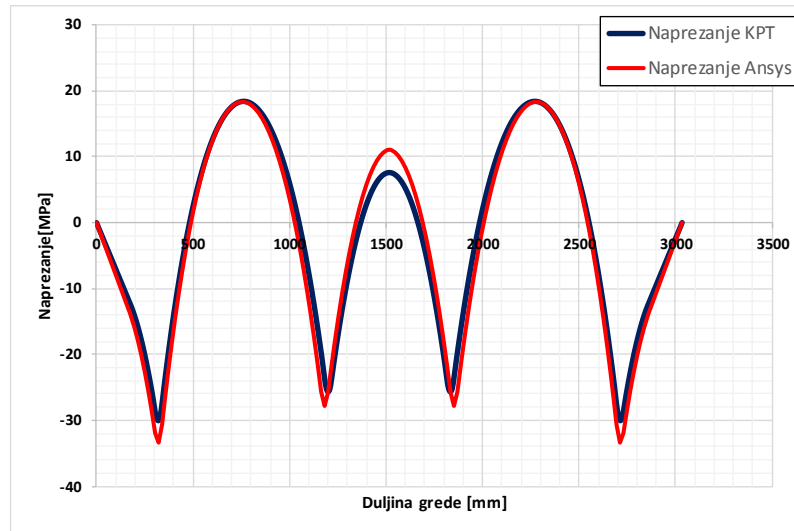
Slika 94. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 1/2 s vijcima

Na temelju rezultata analize slučaja Jezgra 1/2 s vijcima imamo sljedeće rezultate ekstremnih vrijednosti (Tablica 7):

Tablica 7. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra 1/2 s vijcima

$w_{\max} = -0.90437 \text{ mm}$	$M_{\max} = 3\,297\,700 \text{ Nmm}$
$Q_{\max} = 25\,930 \text{ N}$	$\sigma_{\max} = 33,381 \text{ MPa}$

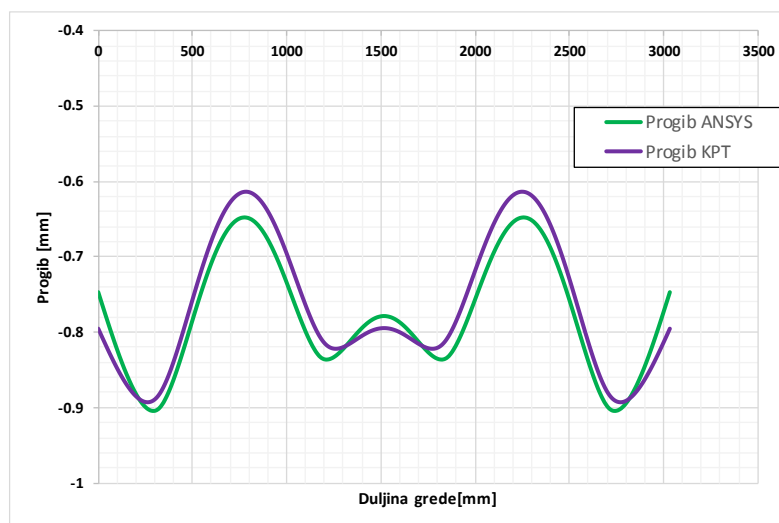
## 7.1.2.2. Usporedba rezultata ANSYS Jezgra 1/2 modela s KPT modelom



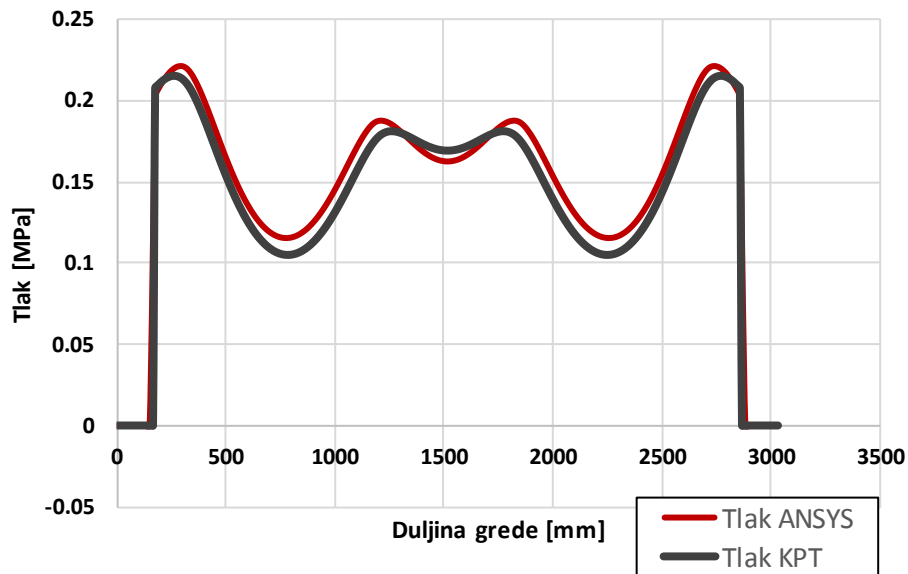
Slika 95. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima

Usporedbom maksimalne vrijednosti naprezanja KPT modela koja iznosi  $\sigma_{KPT} = 30,03$  MPa, i ANSYS modela  $\sigma_{ANSYS} = 33,381$  MPa, relativna greška iznosi:

$$\varepsilon = \left| \frac{\sigma_{ANSYS}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 11,16 \% . \quad (76)$$



Slika 96. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima



Slika 97. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 1/2 s vijcima

Usporedbom raspodjele vertikalnog progiba i tlaka KPT modela i ANSYS modela, vidi se da je relativna razlika jako malena. Usporedbom maksimalne vrijednosti vertikalnog progiba KPT modela:  $w_{KPT} = -0,89$  mm i  $p_{KPT} = 0,22$  MPa s rezultatima novog ANSYS modela:  $w_{ANSYS} = -0,90437$  mm i  $p_{ANSYS} = 0,74$  MPa, dobivena je sljedeća relativna razlika:

$$\varepsilon_w = \left| \frac{w_{ANSYS}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 1,61 \%. \quad (77)$$

$$\varepsilon_p = \left| \frac{p_{ANSYS}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 70,27 \%. \quad (78)$$

## 7.2. Jezgra 2/0

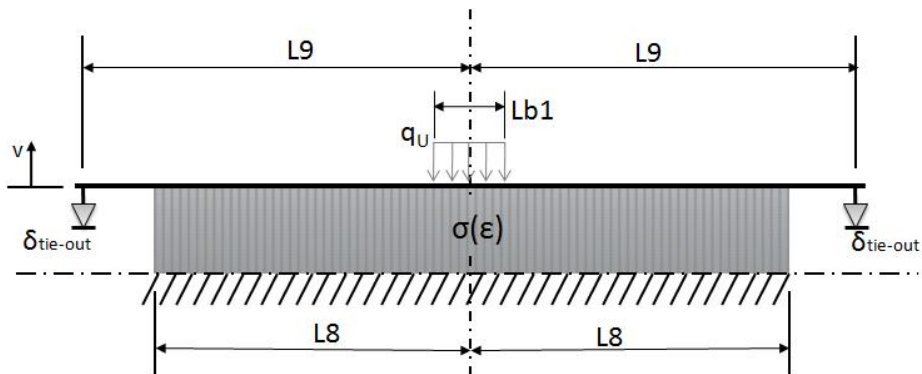
### 7.2.1. Opterećenje s bandažama

Provjera zadovoljenosti uvjeta za zamjenu stezne konstrukcije s gredom na elastičnoj podlozi (uzeta je u obzir izračunata širina grede  $b$ ) [40], [41]:

$$\frac{L_F}{b} = \frac{3630}{697} = 5,2 > 5. \quad (79)$$

Iz (79) se vidi da je zadovoljen uvjet  $L_F/B > 5$ . Iako je zadovoljen uvjet (79), omjer je blizu 5, pa će se zbog toga napraviti također i 2D numerički model ovog slučaja, odnosno analizirati konstrukciju kao ploču, i kao gredu. Inače, prema [40], kada se omjer nalazi unutar slijedećeg raspona:  $3 < L_F/B < 5$ , moguće je analizirati konstrukciju kao gredu, ali se preporuča analiza problema kao ploča koja se nalazi na elastičnoj podlozi.

Za početak je napravljen numerički model s gredom (1D), a zatim kao ploča (2D), te su međusobno uspoređeni rezultati radi analize razlike u rješenjima između modela.



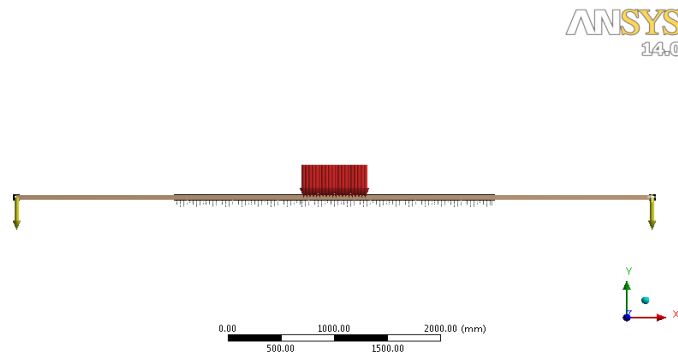
Slika 98. Jezgra 2/0 s bandažama

Tablica 8. Zadani parametri – Jezgra 2/0 s bandažama

$L_0$	482.5	$I$	7614522
$t$	0.3	$E$	205000
$BJ$	1000	$L_{b1}$	610
$BJ_{\min}$	420	$q_u$	870.2
$L_8$	1479.5	$L_9$	1815
$W$	299784		



Numerički model u *ANSYS Workbench-u* za zadane dimenzije i iznos opterećenja prema tablici 8 je prikazan na slici 99. Odabrana dimenzija širine grede prema (43) je  $BJ = 697 \text{ mm}$ , s ekvivalentnom visinom  $h = 50,8 \text{ mm}$  prema izrazu (65). Na slici 99 može se vidjeti definirano kontinuirano opterećenje  $g_u$  (označeno crvenom bojom). Za ovaj slučaj Jezgre 2/0 izračunati  $\delta_{tie-out}$  iznosi  $-0,5105 \text{ mm}$ .



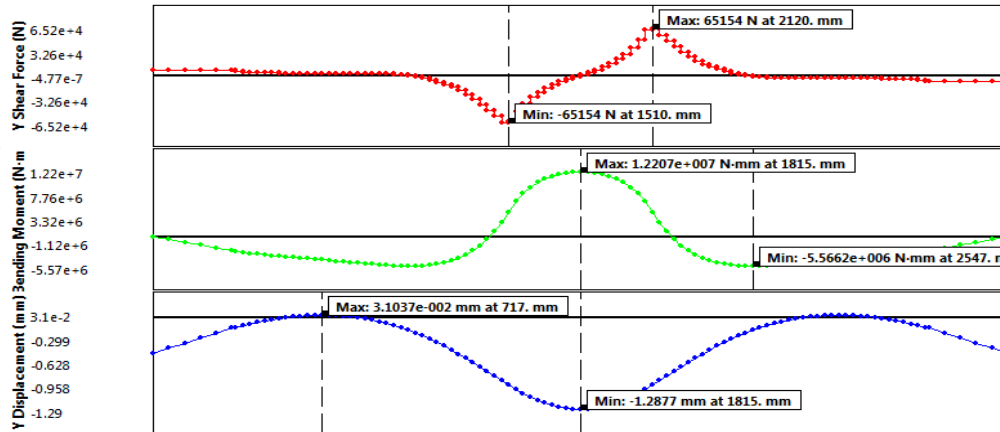
**Slika 99. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - 1D model Jezgra 2/0 s bandažama**

Za slučaj Jezgre 2/0 (Slika 98), duljina grede koja se nalazi nad elastičnom podlogom iznosi  $L_F = 2959 \text{ mm}$ . Ukoliko podijelimo tu duljinu na  $n_{K.E.} = 97$  konačnih elemenata, dobije se  $N = 97 + 1 = 98$  broj čvorova, odnosno potrebno je definirati 98 opruga. Razmak između opruga tada iznosi:

$$l = \frac{L_{uk}}{n_{K.E.}} \approx 30,5 \text{ mm} . \quad (80)$$

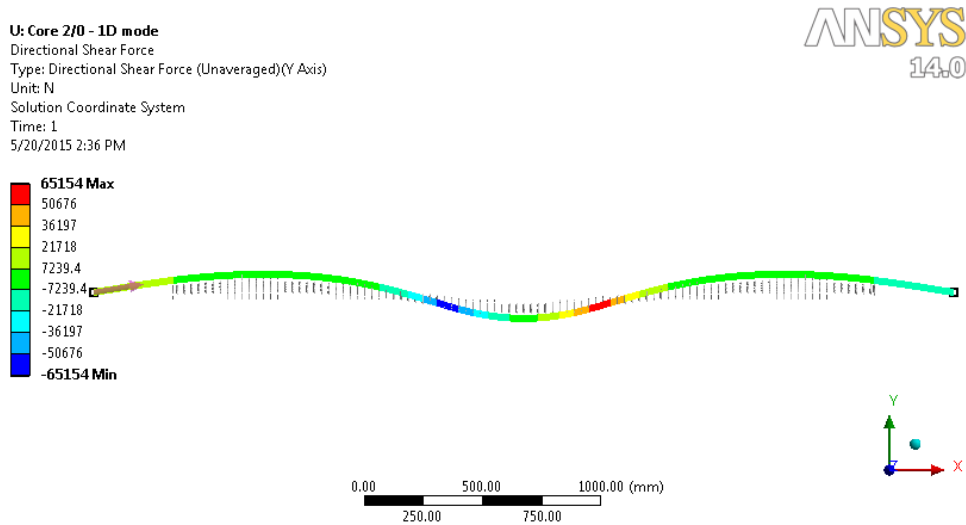
#### 7.2.1.1. Analiza rezultata – Jezgra 2/0 s bandažama

Nakon provedene statičke numeričke analize savijanja grede prema parametrima iz tablice 8, moguće je prikazati raspodjelu poprečnih sila, momenta savijanja i progiba uslijed opterećenja, što se jasno vidi na slici 100.

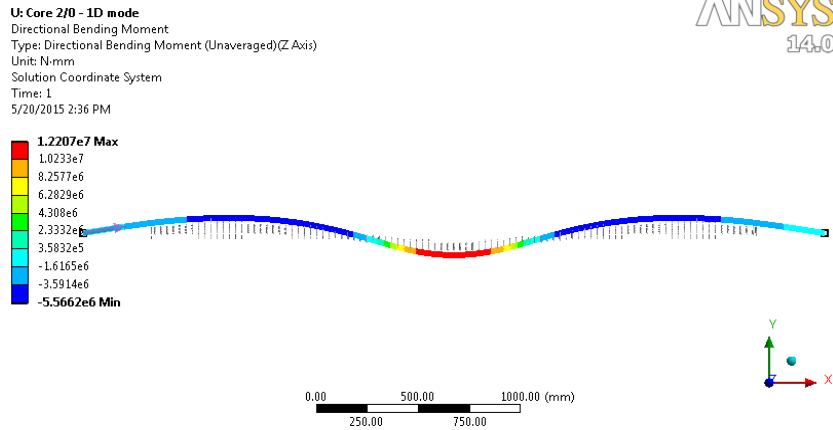


**Slika 100. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)-1D model Jezgra 2/0 s bandažama**

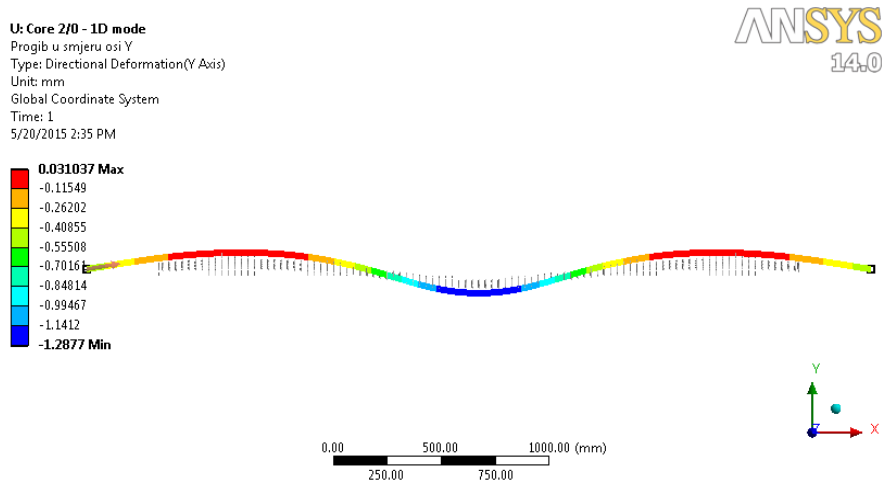
Grafički prikaz raspodjele poprečnih sila, momenta savijanja, progiba i naprezanja uslijed savijanja, prikazan je na slijedećim slikama 101-104



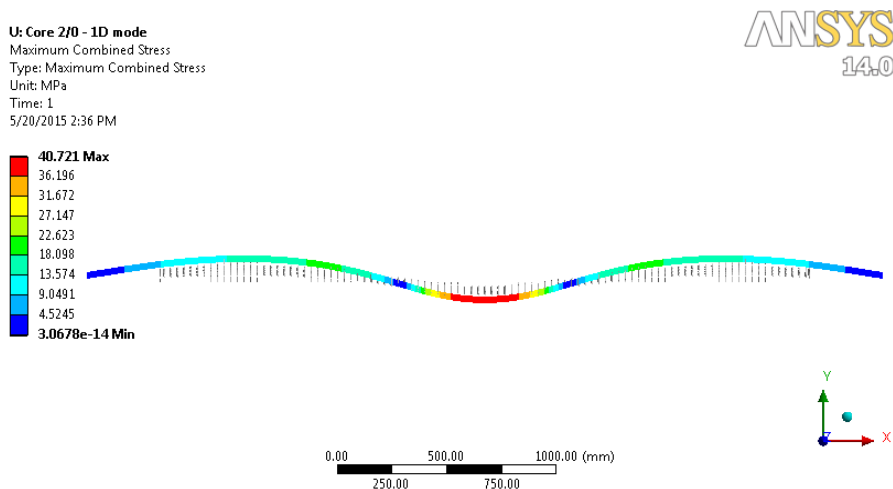
**Slika 101. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 2/0 s bandažama**



Slika 102. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 2/0 s bandažama



Slika 103. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 2/0 s bandažama



Slika 104. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 2/0 s bandažama

Na temelju rezultata analize slučaja Jezgra 2/0 s bandažama imamo slijedeće rezultate ekstremnih vrijednosti (Tablica 9):

**Tablica 9. Rezultati ekstremnih vrijednosti– 1D model Jezgra 2/0 s bandažama**

$w_{\max} = -1,2877 \text{ mm}$	$M_{\max} = 12\,207\,000 \text{ Nmm}$
$Q_{\max} = 65\,154 \text{ N}$	$\sigma_{\max} = 40,721 \text{ MPa}$

### 7.2.1.2. 2D numerički model – Jezgra 2/0 s bandažama

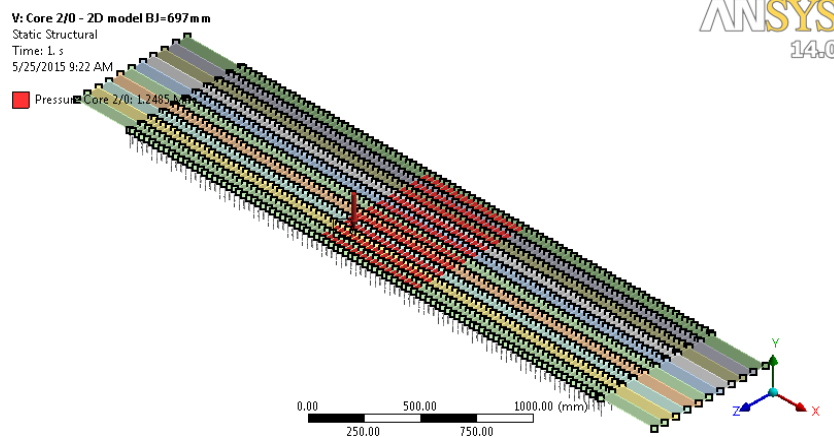
Da bi se verificirali rezultati 1D modela Jezgra 2/0, napravljen je 2D model s nelinearnim oprugama. U ovom slučaju, potrebno je proračunati nelinearnu krutost pojedinih opruga uključujući razmak između opruga i po širini. Prema tome, krutost pojedinih nelinearnih opruga u ovom slučaju je izračunata prema slijedećem izrazu:

$$k = K_0 \cdot b \cdot l = K_0 \cdot \frac{BJ_{\min}}{10} \cdot \frac{L_f}{97} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]. \quad (81)$$

Time je postignuto 10 nelinearnih opruga po širini i 97 po dužini, što sveukupno znači da treba definirati  $98 \cdot 11 = 1078$  nelinearnih opruga. Nakon definiranja podloge, potrebno je definirati tlačno opterećenje po površini:

$$p = \frac{q_U}{BJ} = \frac{870,2}{697} = 1,2485 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad (82)$$

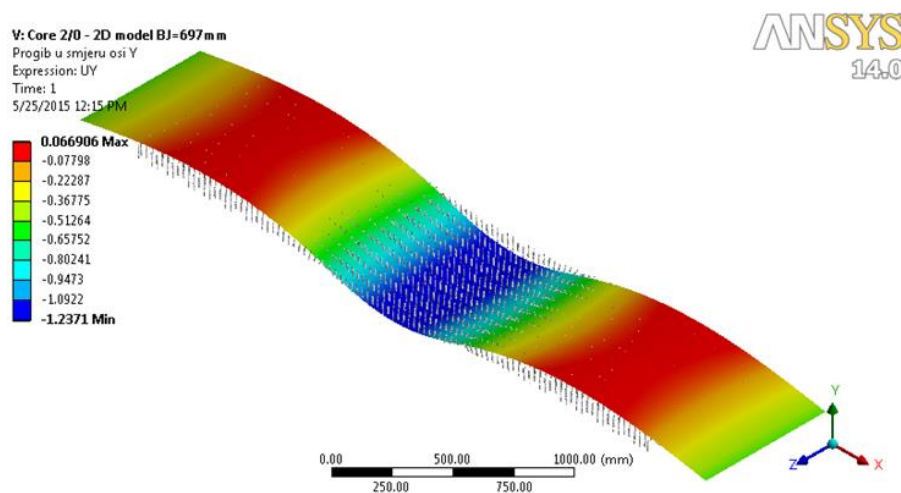
Mreža konačnih elemenata se sastoji od 65712 Shell181 i COMBIN39 konačnih elemenata. Konačan izgled ANSYS Jezgra 2/0 2D modela s bandažama je prikazan na slici 105.



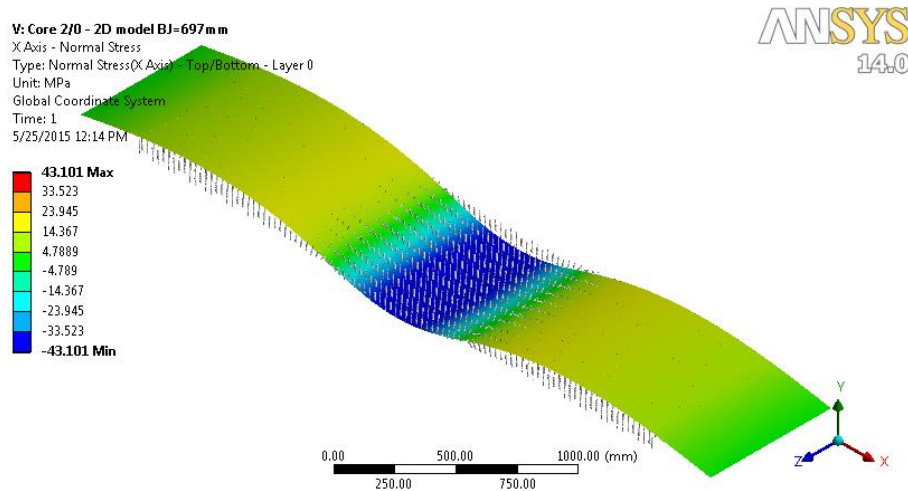
Slika 105. 2D ANSYS model Jezgra 2/0 s bandažama

- Rezultati ANSYS 2D modela:

Nakon provedene 2D statičke analize prikazana je raspodjela progiba u smjeru osi Y i raspodjela normalnih napreznja u smjeru X-osi (to napreznje odgovara savojnom napreznju u 1D modelu) na slikama 106 i 107.



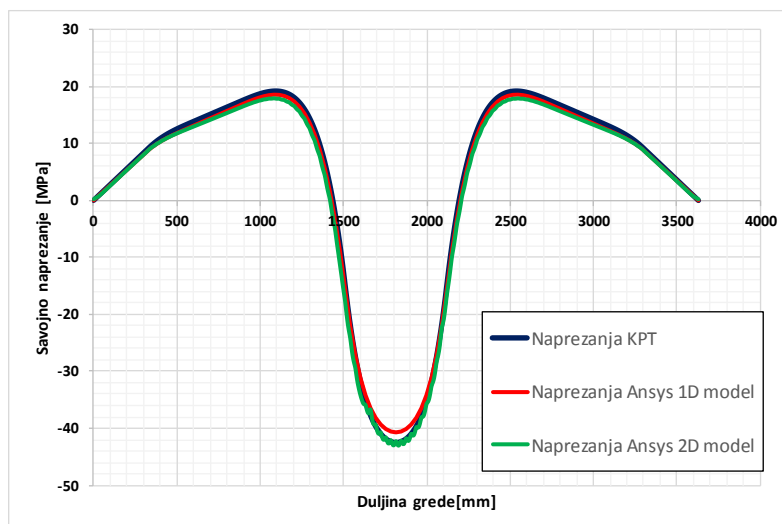
Slika 106. Raspodjela vertikalnog progiba 2D modela u smjeru Y-osi → Jezgra 2/0



Slika 107. Raspodjela normalnih naprezanja 2D modela u smjeru X-osi → Jezgra 2/0

Za usporedbu, rezultati progiba u smjeru Y-osi i normalnih naprezanja u smjeru X-osi su uzeti iz središnje linije (po polovici) ljuske, i uspoređene s 1D ANSYS modelom i KPT modelom.

### 7.2.1.3. Usporedba rezultata 1D, 2D i KPT modela Jezgre 2/0 s bandažama



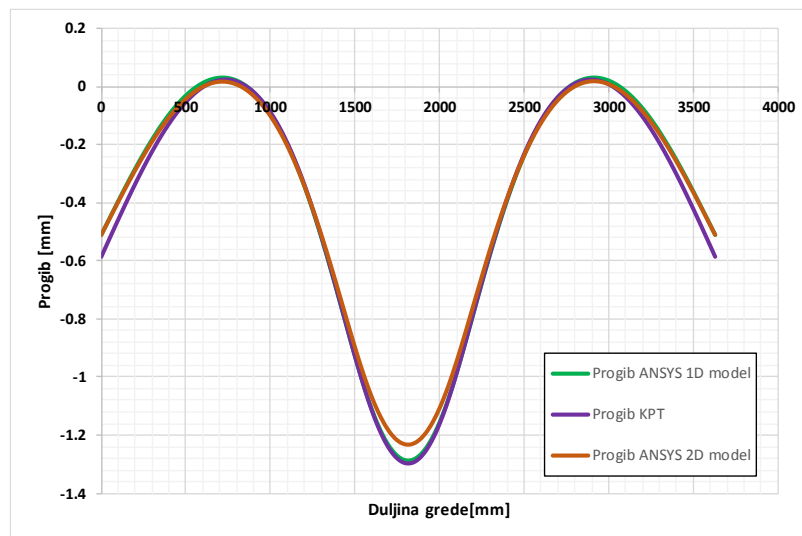
Slika 108. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0

Usporedbom maksimalne vrijednosti naprezanja KPT modela koja iznosi  $\sigma_{KPT} = 42,5$  MPa, i ANSYS modela:  $\sigma_{ANSYS,1D} = 40,721$  MPa i  $\sigma_{ANSYS,2D} = 43,013$  MPa, relativna greška iznosi:

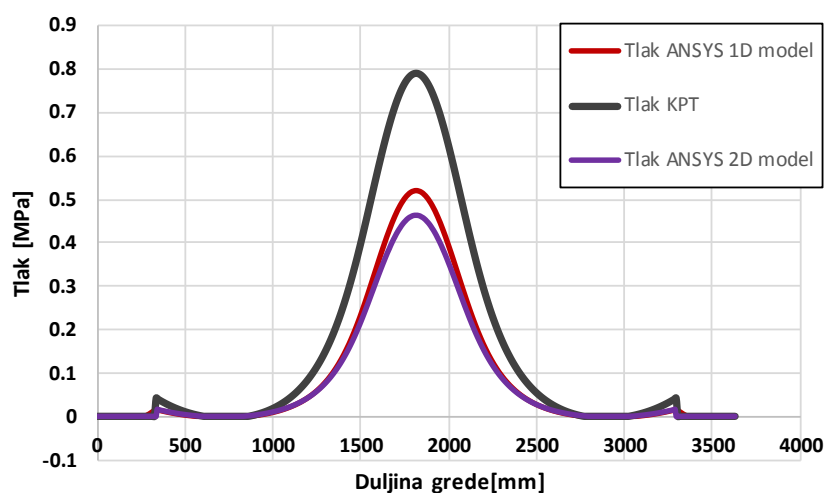
$$\varepsilon_1 = \left| \frac{\sigma_{ANSYS,1D}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 4,18 \%, \quad (83)$$

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{\sigma_{ANSYS,2D}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 1,207 \%. \quad (84)$$

Prema rezultatima maksimalnih naprežanja, ANSYS proračunava faktor sigurnosti 6,26 na mjestu najvećeg naprežanja.



Slika 109. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0



Slika 110. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0

Usporedbom raspodjele vertikalnog progiba i tlaka KPT modela i ANSYS modela, vidi se da je relativna razlika jako malena. Usporedbom maksimalne vrijednosti vertikalnog progiba KPT modela:  $w_{KPT} = -1,3$  mm i  $p_{KPT} = 0,79$  MPa s rezultatima novog ANSYS modela:  $w_{ANSYS,1D} = -1,2877$  mm,  $w_{ANSYS,2D} = -1,2371$  mm i  $p_{ANSYS,1D} = 0,52$  MPa,  $p_{ANSYS,2D} = 0,463$  MPa, dobivena je slijedeća relativna razlika:

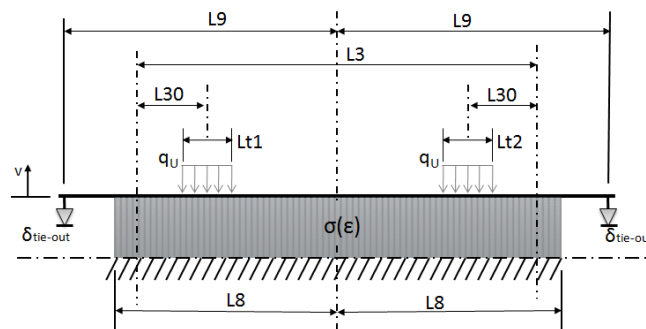
$$\varepsilon_{w,1} = \left| \frac{w_{ANSYS,1D}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 0,94 \%, \quad \varepsilon_{w,2} = \left| \frac{w_{ANSYS,2D}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 4,84 \%. \quad (85)$$

$$\varepsilon_{p,1} = \left| \frac{p_{ANSYS,1D}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 34,17 \%, \quad \varepsilon_{p,2} = \left| \frac{p_{ANSYS,2D}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 41,39 \%. \quad (86)$$

### 7.2.2. Opterećenje s vijcima:

Provjera zadovoljenosti uvjeta za zamjenu stezne konstrukcije s gredom na elastičnoj podlozi (uzeta je u obzir izračunata širina grede  $b$ ) [40], [41]:

$$\frac{L_F}{b} = \frac{3630}{697} = 5,2 > 5. \quad (87)$$



Slika 111. Jezgra 2/0 s vijcima

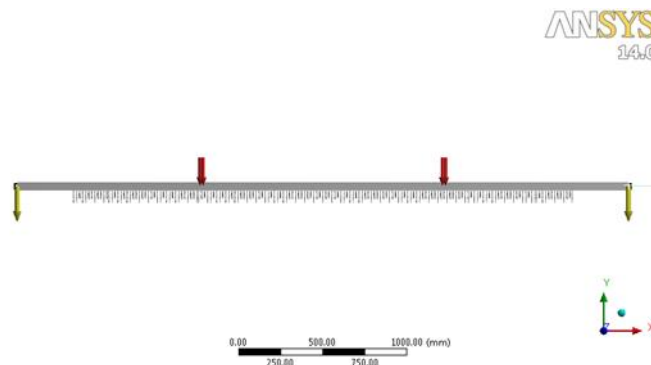
Tablica 10. Zadani parametri – Jezgra 2/0 s vijcima

$L_0$	482.5	$I$	7614522
$t$	0.3	$E$	205000
$BJ$	1000	$Lt1$	36
$BJmin$	420	$Lt2$	36



<i>L3</i>	<i>2539</i>	<i>L30</i>	<i>550</i>
<i>L8</i>	<i>1479.5</i>	<i>qu</i>	<i>7372.9</i>
<i>L9</i>	<i>1815</i>	<i>W</i>	<i>299784</i>

Numerički model u *ANSYS Workbench-u* za zadane dimenzije i iznos opterećenja prema tablici 10 je prikazan na slici 112. Odabrana dimenzija širine grede prema (43) je  $b = 697$  mm, s ekvivalentnom visinom od  $h = 50,8$  mm prema izrazu (65). Na slici 112 može se vidjeti definirano kontinuirano opterećenje  $g_u$  (označeno crvenom bojom). Za ovaj slučaj Jezgre 2/0, izračunati  $\delta_{tie-out}$  iznosi  $-0,5105$  mm.



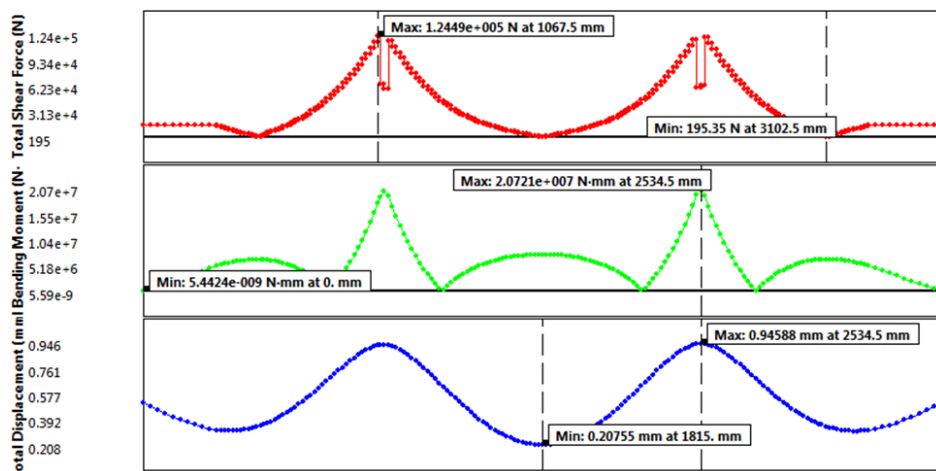
**Slika 112. Rubni uvjeti i opterećenje grede na elastičnoj podlozi - Jezgra 2/0 s vijcima**

Za slučaj Jezgre 2/0 (Slika 111), duljina grede koja se nalazi nad elastičnom podlogom iznosi  $L_F = 2959$  mm. Ukoliko podijelimo tu duljinu na  $n_{K.E.} = 164$  konačnih elemenata, dobije se  $N = 164 + 1 = 165$  broj čvorova, odnosno potrebno je definirati 165 opruga. Razmak između opruga tada iznosi:

$$l = \frac{L_{uk}}{n_{K.E.}} \approx 18 \text{ mm} . \quad (88)$$

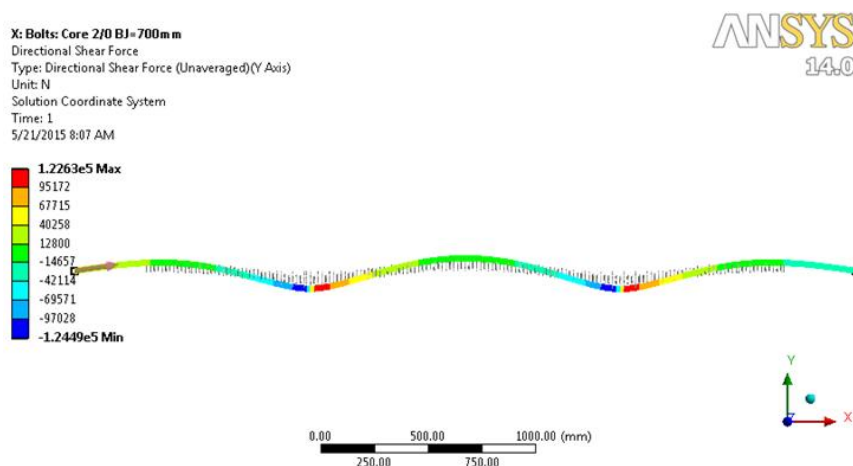
7.2.2.1. Analiza rezultata – Jezgra 2/0 s vijcima

Nakon provedene statičke numeričke analize savijanja grede prema parametrima iz tablice 10, moguće je prikazati raspodjelu poprečnih sila, momenta savijanja i progiba uslijed opterećenja, što se jasno vidi na slici 113.

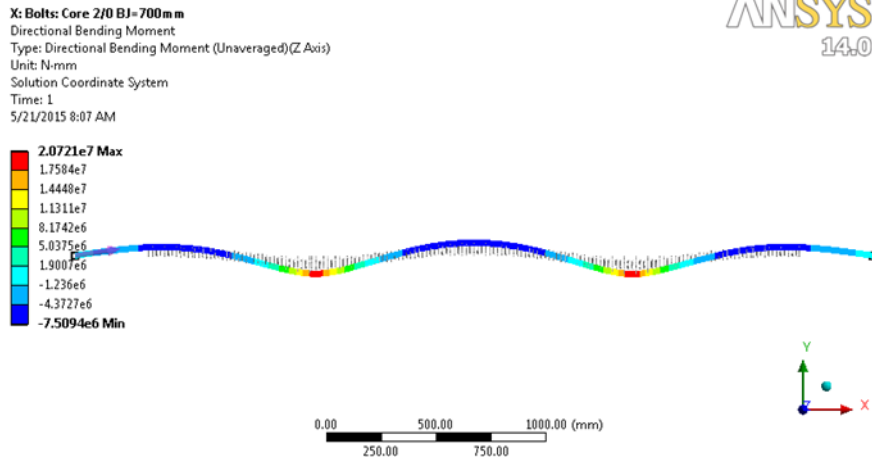


Slika 113. Raspodjela poprečnih sila (crveno), momenta savijanja (zeleno) i progiba (plavo)- Jezgra 2/0 s vijcima

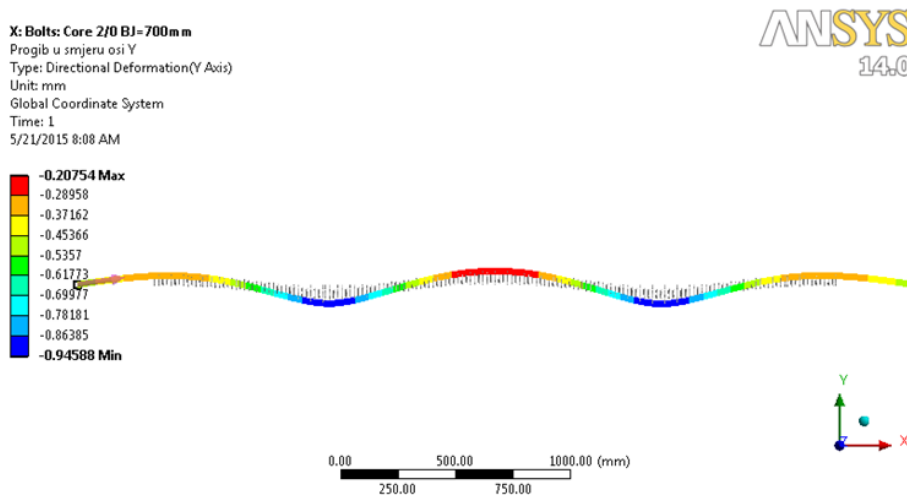
Grafički prikaz raspodjele poprečnih sila, momenta savijanja, progiba i naprezanja uslijed savijanja, prikazan je na sljedećim slikama 114 - 117.



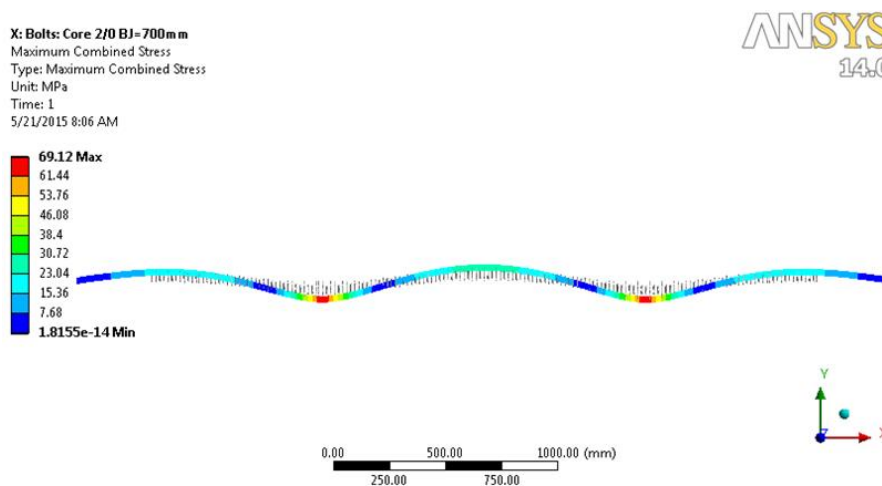
Slika 114. Raspodjela poprečnih sila – Jezgra 2/0 s vijcima



Slika 115. Raspodjela momenta savijanja – Jezgra 2/0 s vijcima



Slika 116. Raspodjela progiba u smjeru osi Y – Jezgra 2/0 s vijcima



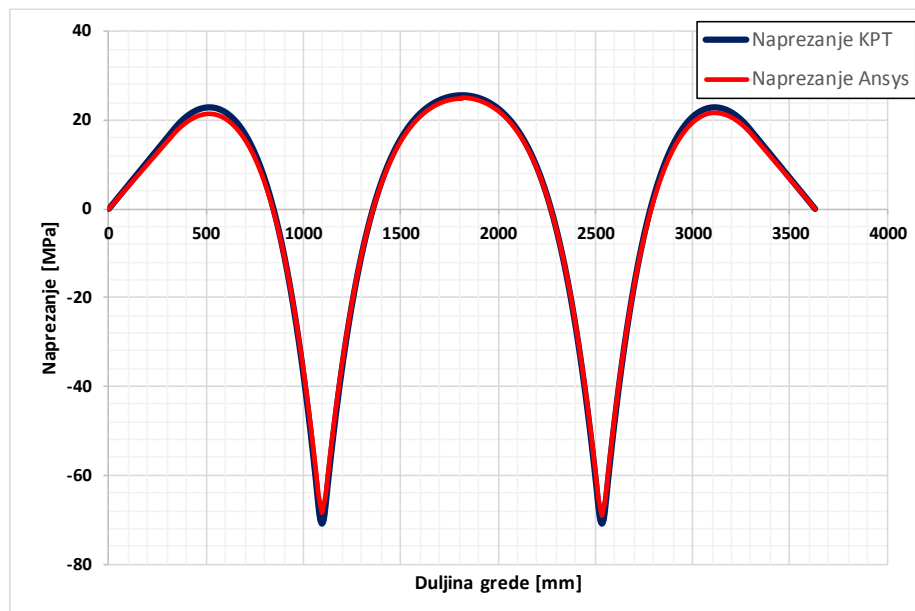
Slika 117. Naprezanja uslijed savijanja – Jezgra 2/0 s vijcima

Na temelju rezultata analize slučaja Jezgra 2/0 s vijcima imamo slijedeće rezultate ekstremnih vrijednosti (Tablica 11):

**Tablica 11. Rezultati ekstremnih vrijednosti– Jezgra 2/0 s vijcima**

$w_{\max} = -0.94588 \text{ mm}$	$M_{\max} = 20\,721\,000 \text{ Nmm}$
$Q_{\max} = 122\,630 \text{ N}$	$\sigma_{\max} = 69,12 \text{ MPa}$

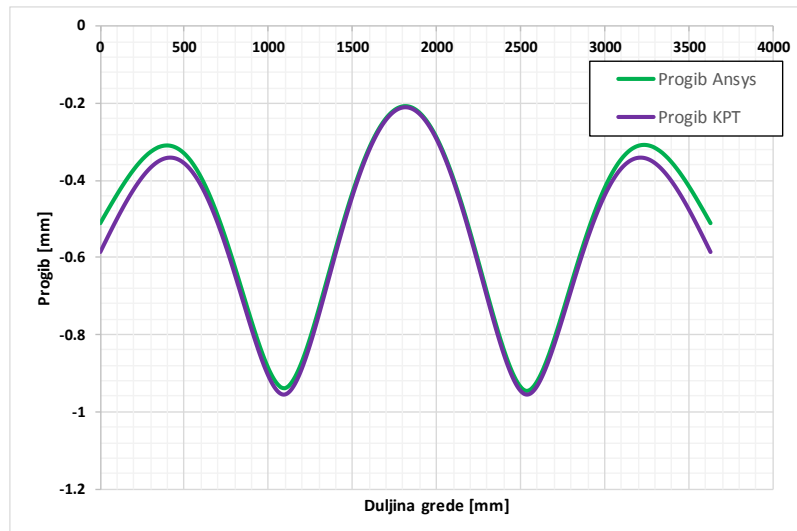
#### 7.2.2.2. Usporedba rezultata ANSYS Jezgra 2/0 modela s KPT modelom



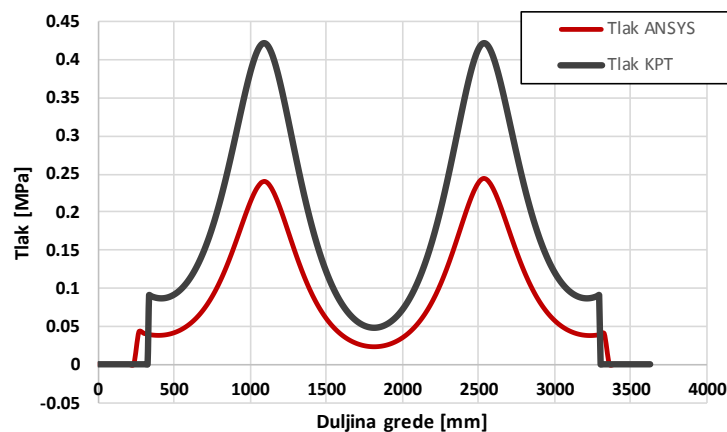
**Slika 118. Usporedba naprezanja uslijed savijanja između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 s vijcima**

Usporedbom maksimalne vrijednosti naprezanja KPT modela koja iznosi  $\sigma_{KPT} = 70,92 \text{ MPa}$ , i ANSYS modela  $\sigma_{ANSYS} = 69,12 \text{ MPa}$ , relativna greška iznosi:

$$\varepsilon = \left| \frac{\sigma_{ANSYS}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 2,53 \%. \quad (89)$$



Slika 119. Usporedba vertikalnog progiba u smjeru y-osi između KPT modela i ANSYS modela  
→ Jezgra 2/0 s vijcima



Slika 120. Usporedba tlaka između KPT modela i ANSYS modela → Jezgra 2/0 s vijcima

Usporedbom raspodjele vertikalnog progiba i tlaka KPT modela i ANSYS modela, vidi se da je relativna razlika jako malena. Usporedbom maksimalne vrijednosti vertikalnog progiba KPT modela:  $w_{KPT} = -0,96$  mm i  $p_{KPT} = 0,42$  MPa s rezultatima novog ANSYS modela:

$w_{ANSYS} = -0,9458$  mm i  $p_{ANSYS} = 0,99$  MPa, dobivena je slijedeća relativna razlika:

$$\varepsilon_w = \left| \frac{w_{ANSYS}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 1,04 \%, \quad (90)$$

$$\varepsilon_p = \left| \frac{p_{ANSYS}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 135,71 \%. \quad (91)$$

### 7.3. Rezultati numeričkih analiza svih 11 slučajeva opterećenja

Donja tablica 23 prikazuje maksimalne vrijednosti progiba, naprezanja uslijed savijanja i tlaka srednjeg paketa limova za svih 11 slučajeva opterećenja jezgre transformatora. Kratica *B* znači da je jezgra preko okvira stegnuta bandažama, a *V* vijcima.

Tablica 12. Maksimalne vrijednosti progiba, savojnog naprezanja i tlaka 11 slučajeva opterećenja

Tip jezgre	Progib [mm]	Savojno naprezanje [MPa]	Tlak [MPa]
<i>Jezgra 1/2 B</i>	-0,8826	24,791	0,21
<i>Jezgra 3/2 B</i>	-1,0889	55,541	0,34
<i>Jezgra 3/0 B</i>	-1,0703	40,937	0,14
<i>Jezgra 2/2 B</i>	-0,7196	36,684	0,49
<i>Jezgra 2/0 B</i>	-1,2877	40,721	0,52
<i>Jezgra 1/2 V</i>	-0,9044	33,381	0,23
<i>Jezgra 3/2 V</i>	-1,1450	74,297	0,36
<i>Jezgra 3/0 V</i>	-0,7850	71,939	0,17
<i>Jezgra 2/2 V</i>	-0,5212	33,555	0,08
<i>Jezgra 2/0 V</i>	-0,9459	69,120	0,24
<i>Jezgra 3/0 V + B</i>	-1,0027	28,212	0,28

## 8. Numerički 3D modeli horizontalnog savijanja steznog sustava

### 8.1. Jezgra 2/0 3D model s nelinearnim oprugama

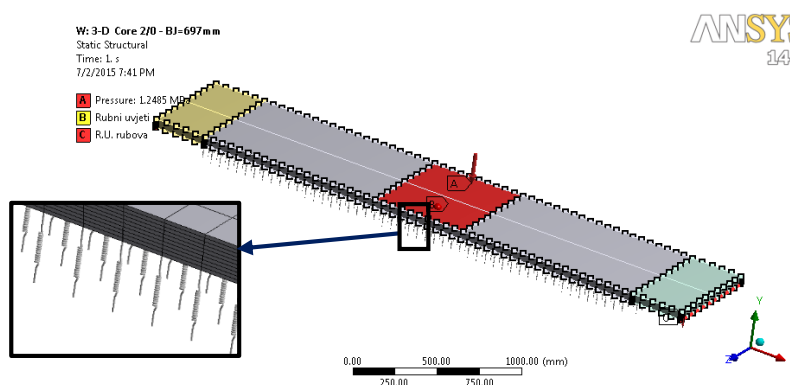
U ovom poglavlju, da bi se verificirali rezultati 1D modela Jezgra 2/0, napravljen je 3D model s nelinearnim oprugama Jezgra 2/0 slučaja opterećenja jezgre transformatora s bandažama u programskom paketu ANSYS 14.0. Zadani ulazni parametri su analogni onima u 1D modelu (Slika 98 i Tablica 8). U ovom slučaju, potrebno je proračunati nelinearnu krutost pojedinih opruga uključujući razmak između opruga i po širini (analogno kao i za 2D model). Prema tome, krutost pojedinih nelinearnih opruga u ovom slučaju je izračunata prema slijedećem izrazu:

$$k(v) = K_0(v) \cdot b \cdot l = K_0(v) \cdot \frac{BJ_{\min}}{10} \cdot \frac{L_F}{50} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]. \quad (92)$$

Time je postignuto 11 nelinearnih opruga po širini i 51 po dužini, što sveukupno znači da treba definirati  $51 \cdot 11 = 561$  nelinearnih opruga. Nakon definiranja podloge, potrebno je definirati tlačno opterećenje po površini:

$$p = \frac{q_U}{BJ} = \frac{870,2}{697} = 1,2485 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad (93)$$

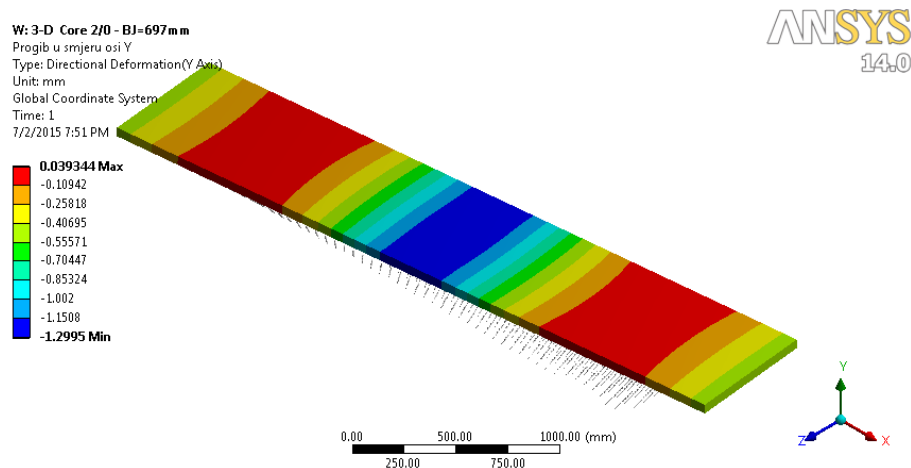
Mreža konačnih elemenata se sastoji od 6000 SOLID186 i COMBIN39 konačnih elemenata. R.U. progiba je definiran u središnjoj točki ( $u_x = 0, w_z = 0$ ) te na rubovima ( $\delta_{tie-out} = -0,5105 \text{ mm}$ ), što je analogno 1D modelu. Konačan izgled ANSYS Jezgra 2/0 3D modela s bandažama je prikazan na slici 121.



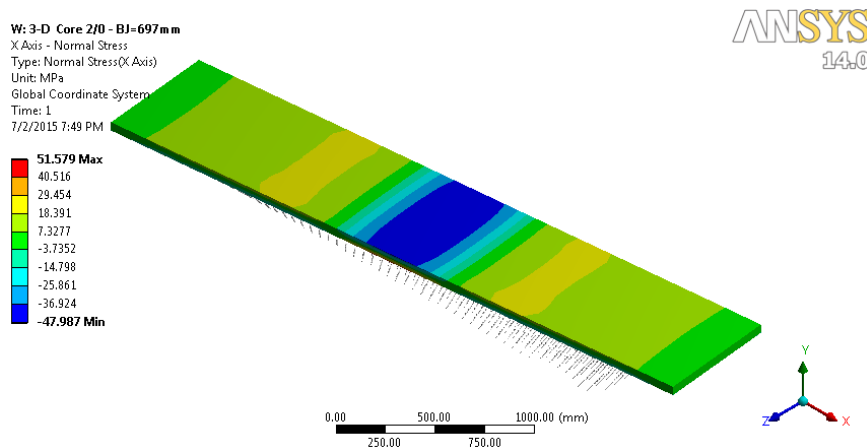
Slika 121. 3D ANSYS model Jezgra 2/0 s bandažama

### 8.1.1. Rezultati ANSYS 3D modela s nelinearnim oprugama:

Nakon provedene 3D statičke analize prikazana je raspodjela progiba u smjeru osi  $Y$  i raspodjela normalnih napreznja u smjeru  $X$ -osi (to napreznje odgovara savojnom napreznju u 1D modelu) na slikama 122 i 123.



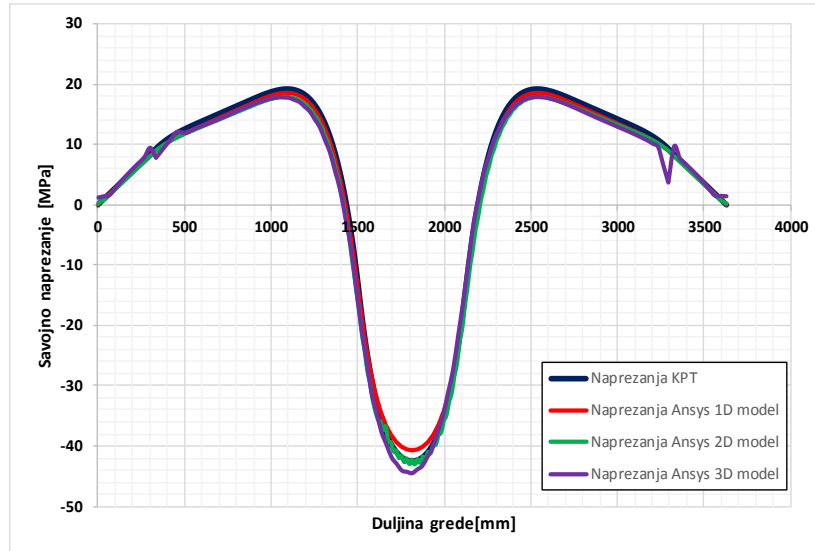
Slika 122. Raspodjela vertikalnog progiba 3D modela u smjeru  $Y$ -osi → Jezgra 2/0



Slika 123. Raspodjela normalnih napreznja 3D modela u smjeru  $X$ -osi → Jezgra 2/0

Za usporedbu, rezultati progiba u smjeru  $Y$ -osi i normalnih napreznja u smjeru  $X$ -osi su uzeti iz središnje linije s donje strane ploče (strane koja je u kontaktu s podlogom), te su vrijednosti uspoređene s 1D, 2D ANSYS modelom i KPT modelom. Raspodjela savojnog napreznja prikazana je na slici 124.



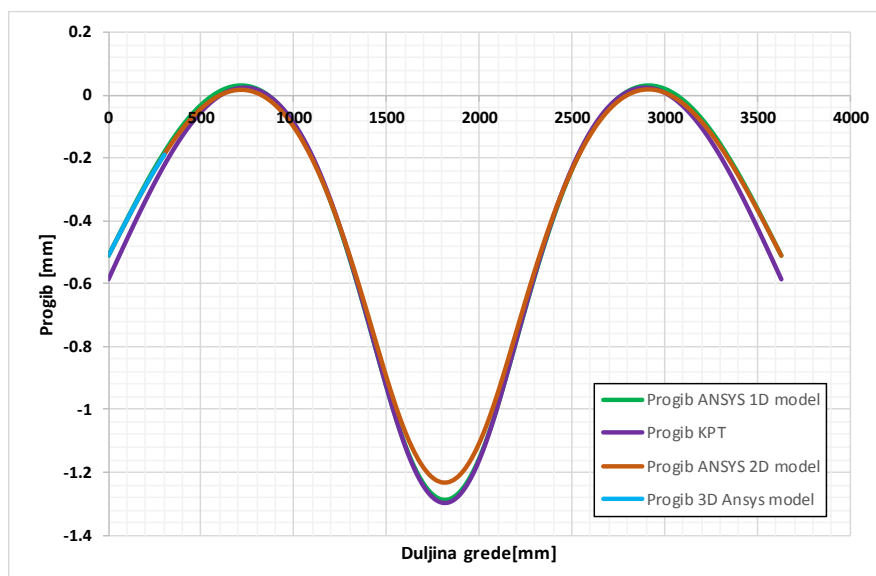


Slika 124. Usporedba savojnog napreznosti 1D, 2D, 3D i KPT modela

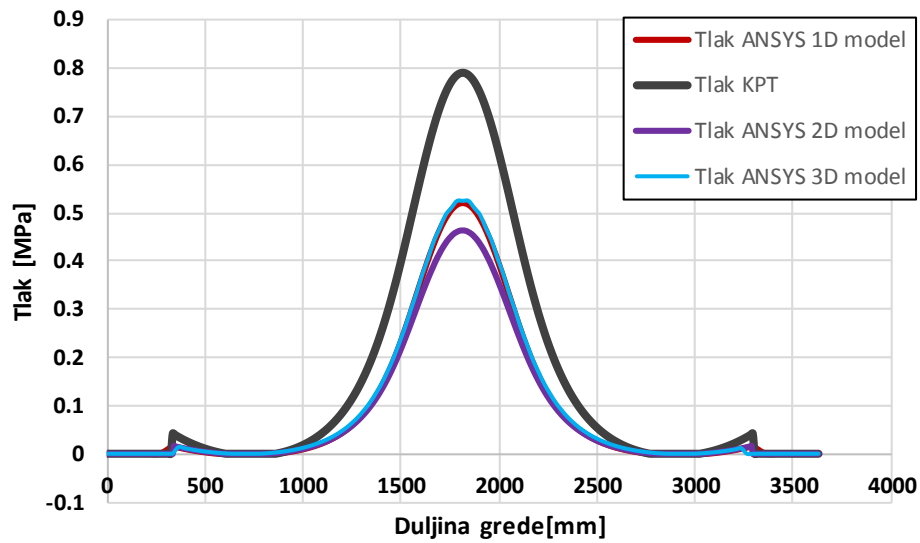
Usporedbom maksimalne vrijednosti napreznosti KPT modela koja iznosi  $\sigma_{KPT} = 42,5$  MPa, i ANSYS modela:  $\sigma_{ANSYS,3D} = 44,51$  MPa, relativna greška iznosi:

$$\varepsilon_{\sigma} = \left| \frac{\sigma_{ANSYS,3D}}{\sigma_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 4,73 \% \quad (94)$$

Prema rezultatima maksimalnih napreznosti, ANSYS proračunava faktor sigurnosti 8,135 na mjestu najvećeg napreznosti. Raspodjela progiba u smjeru Y-osi prikazana je na slici 125.



Slika 125. Usporedba vertikalnog progiba 1D, 2D, 3D i KPT modela



Slika 126. Usporedba vertikalnog progiba 1D, 2D, 3D i KPT modela

Usporedbom raspodjele vertikalnog progiba i tlaka ANSYS 3D i KPT modela, vidi se da je relativna razlika jako malena. Usporedbom maksimalne vrijednosti vertikalnog progiba KPT modela:  $w_{KPT} = -1,3$  mm i  $p_{KPT} = 0,79$  MPa, s rezultatima ANSYS 3D modela:  $w_{ANSYS,3D} = -1,29$  mm i  $p_{ANSYS,3D} = 0,4632$  MPa, dobivena je slijedeća relativna razlika:

$$\varepsilon_w = \left| \frac{w_{ANSYS,3D}}{w_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 0,77 \%, \quad (95)$$

$$\varepsilon_p = \left| \frac{p_{ANSYS,3D}}{p_{KPT}} - 1 \right| \cdot 100 = 41,367 \%. \quad (96)$$

## 9. ZAKLJUČAK

U radu predložen je numerički model kreiran u programskom paketu *ANSYS* za rješavanje problema savijanja steznog sustava limova transformatora. Svrha steznog sustava je osigurati tlak između limova jezgre. Tlak se osigurava pomoću svornjaka i/ili steznih traka (bandaža), čime se osigurava kompaktnost limova jezgre. Trenutna verzija analitičkog proračuna dobivenog od tvrtke Končar KPT ima ograničenja sa stajališta ograničenog broja ulaznih parametara, kao i složene matematičke pozadine koja stoji iza proračuna.

U ovom radu je napravljena nova verzija proračuna u programskom paketu *ANSYS* koja je temeljena na metodi konačnih elemenata. Nelinearnu karakteristiku krutosti podloge je moguće implementirati u model preko sustava paralelnog spojenih međusobno nezavisnih nelinearnih opruga prema principu Winkler metodologije. Uvjet za postizanje zadovoljavajuće točnosti rezultata jest dovoljno gusta mreža konačnih elemenata i dovoljno malen razmak između opruga.

Utvrđeno je da rezultati *ANSYS* numeričkog modela odgovaraju rezultatima analitičkog modela dobivenog od tvrtke Končar KPT. Time je pokazano da je moguće znanstveno utemeljenim pristupom metode konačnih elemenata, uz primjenu odgovarajućih rubnih uvjeta, dobiti vjerodostojne rezultate naprezanja i vertikalnog progiba, čime je dobiveno na sigurnosti i relevantnosti pristupa simulaciji mehaničkog odziva konstrukcije steznog sustava limova jezgre transformatora. Što se tiče tlaka u srednjem paketu limova, unatoč poklapanju vrijednosti progiba, rezultati tlaka *ANSYS* modela odstupaju u nekim slučajevima značajno (relativna razlika >40%), dok je u nekim slučajevima relativna razlika manja od 2%. To ukazuje na potrebu za detaljnom provjerom proračuna tlaka KPT modela da bi se utvrdili razlozi te relativne razlike u rezultatima tlaka između limova.

U radu zaključeno je da 1D, 2D i 3D numerički modeli pružaju mogućnost ispravnog izračuna te prikaza raspodjele rezultata naprezanja i progiba po konturi konstrukcije. Prednost 1D numeričkog modela je njegova jednostavnost, ušteda računalnih resursa pa time i brzina izračuna rezultata, dok 2D i 3D numerički model pruža vizualno ljepši prikaz rezultata opterećenja steznog sustava.

## LITERATURA

### 1) Stručni radovi na temu (transformatori)

- [1] Roman Žičkar, Optimiranje u projektiranju industrijskih transformatora, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb, 2011.
- [2] Hrvoje Drašković, Analiza čvrstoće steznog sustava trostupne jezgre trofaznog transformatora, FSB Zagreb 2011,
- [3] Prof.dr.sc. Zlatko Maljković, *Elektromehaničke i električne pretvorbe energije*, materijali za studente, FER, Zagreb,
- [4] Online članak: <https://www.cst.com/Applications/Article/Siemens-Energy-Optimises-Power-Transformers-With-The-Aid-Of-3D-EM-Simulation> 04.05.2015.
- [5] Andrei Marinescu, Carmen Livia Ungureanu, *About axial clamping force monitoring at power transformer windings during their active lifetime*, ICMET Research Development and Testing National Institute for Electrical Engineering, Craiova 200515, Romania
- [6] Fernando Torres P. da Silva, Mauricio V. Ferreira da Luz, and Glauco de M. Cangane, *Modeling of Mechanical Effects of Short-Circuit Currents in Power Transformers*, Siemens Ltda/TUSA Transformers, 13213-080, Jundiai, SP, Brazil
- [7] Dolenc A. *Transformatori I i II*. Tehnička knjiga Zagreb 1989.
- [8] Online članak: [http://cnorinno.en.alibaba.com/product/342873569-210452322/Stacked\\_Transformer\\_Core.html](http://cnorinno.en.alibaba.com/product/342873569-210452322/Stacked_Transformer_Core.html) 05.05.2015.
- [9] Online članak: <http://www.electrical4u.com/core-of-transformer-and-design-of-transformer-core/> 20.05.2014.

### 1) Mehanika i metoda konačnih elemenata

- [10] Kraut, B.: *Strojarski priručnik*, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.
- [11] Šćap.D, *Optimiranje mehaničkih konstrukcija*, udžbenik za studente, FSB Zagreb 2003.
- [12] Skupina autora, *Inženjerski priručni IP1, Temelji inženjerskih znanja*, Zagreb 1996.
- [13] Ivica Skozrit, Predavanja i materijali kolegija: *Uvod u čvrstoću konstrukcija* 2013.
- [14] Sorić, J.: *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing-tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [15] Tonković, Z., Marenić, E., *Numerička analiza konstrukcija*, Predavanja, FSB, Zagreb 2014.

- [16] Sorić, J., Skozrit, I., Nelinearna numerička analiza konstrukcija, Predavanja, FSB, Zagreb 2014.
- [17] Alfirević, I., *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb 1995.
- [18] Alfirević, I., *Linearna analiza konstrukcija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1999.
- [19] NPTEL (*National Programme on Technology Enhanced learning*), online courses, link: <http://www.nptel.ac.in/courses/Webcourse-contents/IIT-ROORKEE/strength%20of%20materials/lects%20&%20pics/image/lect40/lecture40.htm>, (ožujak 2015).
- [20] S Rao.Gunakala, *A finite element solution of the beam equation via MATLAB*, Department of Mathematics and Statistics, kolovoz 2012.
- [21] Galerkinova metoda, internet link: [http://www.riteh.uniri.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/cvr\\_kon/Pages/osoblje\\_files/Turkalj/RAK\\_Galerkin.pdf](http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/osoblje_files/Turkalj/RAK_Galerkin.pdf), ožujak, 2015.
- [22] Ritzova metoda, net link: [www.grad.unizg.hr/download/repository/RM1.pdf](http://www.grad.unizg.hr/download/repository/RM1.pdf), ožujak 2015.
- [23] Howell, L. L., Magleby, S. P., Olsen, B. M., *Handbook of Compliant Mechanisms*, Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2013.7
- [24] Thomas Nelson, Erke Wang, *Reliable FE-Modeling with ANSYS*, CADFEM GmbH, Munich
- [25] Promjenjivi rubni uvjeti, The Altair academic center, internet link: <http://training.altairuniversity.com/analysis/structural/linear-static-analysis/> (veljača 2015.)
- [26] F.Wittel, ABAQUS UMAT Implementation, Mechanics of Building Materials, Institute of Building Materials, 11.11.2014., Internet link: [http://www.ifb.ethz.ch/education/master\\_constitutivemodelling/fem](http://www.ifb.ethz.ch/education/master_constitutivemodelling/fem) 27.05.2015.

## 2) Nelinearna analiza

- [27] Huei-Huang Lee, webinar: *Nonlinear Spring*, listopad, 2011., link: <https://www.youtube.com/watch?v=Z2KqdgOUis>, (20.02.2015.)

- [28] ANSYS: Chapter 8.1.1. Causes of Nonlinear Behaviour, Internet link:  
[http://mostreal.sk/html/guide\\_55/g-str/gstr8.htm](http://mostreal.sk/html/guide_55/g-str/gstr8.htm) (travanj, 2015.)
- [29] Kristina Marković, Ph.D. *Analiza konstrukcijskih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama*, Tehnički fakultet Rijeka, 2015.
- [30] Ashwell, D. G., *The anticlastic curvature of rectangular beams and plates*, J. R. Aer. Soc., November 1950, 708-715.
- [31] Runge-Kutta-Fehlberg metoda (RK45) metoda, Internet link:  
[https://math.okstate.edu/people/yqwang/teaching/math4513\\_fall11/Notes/rungekutta.pdf](https://math.okstate.edu/people/yqwang/teaching/math4513_fall11/Notes/rungekutta.pdf) (ožujak 2015.)
- [32] 2008 International ANSYS Conference, *Guidelines for Obtaining Contact Convergence*, Joseph T Metrisin, Turbomachinery, Florida Turbine Technologies, Inc., link:  
<http://www.ANSYS.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/confpaper/2008-Int-ANSYS-Conf-guidelines-contact-convergence.pdf> (travanj, 2015.)

### 3) Greda na elastičnoj podlozi

- [33] M.Hetenyi, *Beams on Elastic foundation, Theory with applicatons in the fields of civil and mechanical engineering*, The University of Michigan, London, 1946.(str. 34)
- [34] U.Saravan; *Advanced Solid Mechnics*, Chapter 11: *Beam on Elastic Foundation*; ožujak 2013. link: <http://nptel.ac.in/courses/105106049/lecnotes/mainch11.html#x54-18200011.7>
- [35] Raychowdhury, Prishati, Ph.D. *Nonlinear Winkler-based shallow foundation model for performance assessment of seismically loaded structures*, UC San Diego Electronic Theses and Dissertations, 2008., str.37.
- [36] J.A.Hemsley, *Elastic analysis of rat foundation*, London 1998. str. 350,
- [37] Sarvesh Chandra, *Modelling of Soil Behaviour*, 03.04.2014., Internet link:  
[http://home.iitk.ac.in/~peeyush/mth426/Lec4\\_schandra.pdf](http://home.iitk.ac.in/~peeyush/mth426/Lec4_schandra.pdf) , 01.03.2015.
- [38] Jae H. Chung, Ph.D, *Finite Element Analysis of Elastic Settlement of Spreadfootings Founded in Soil*, Bridge Software Institute, Universit of Florida, Internet link:  
<http://bsi.ce.ufl.edu/Downloads/Files/newsletter-shallow-foundation.pdf>
- [39] *Advanced One Dimensional Elements* (str. 9), Colorado Engineering link:  
<http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch13.d/IFEM.Ch13.pdf>

- [40] N. S. V. Kameswara Rao, *Foundation Design: Theory and Practice: Analysis of Footings on Elastic Foundations*, str. 187 Internet link: <http://ebooks.narotama.ac.id/files/Foundation%20Design;%20Theory%20and%20Practice/Chapter%205%20%20Analysis%20of%20Footings%20on%20Elastic%20Foundations.pdf> (25.02.2015.)
- [41] C. G. Konapure, Bhogade Vivek, *Analysis of Combined rectangular footing by Winkler's Model and Finite Element Method*, International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT), prosinac 2013.
- [42] Konstantinos Syngros, Ph.D., P.E. , Alan Poeppel, P.E., *Soil-Foundation-Superstructure Interaction for Tall Buildings on Combined Pile-Raft Foundations*; Langan International Link: <http://www.goodengineers.com/invitation/Invitation/seminars/FINAL.pdf> , 13.03.2015..
- [43] ANSYS – *Elastic Foundation Stiffness*; link: <http://ANSYS.net/ANSYS/tips/EFS.pdf> , 28.01.2015.
- [44] S.Timoshenko; *Strenght of Materials, Part II, Advanced Theory and Problems*, Chapter 1; Stanford University, ,1940.
- [45] Karel Frydrysek, Roland Jančo, Horst Gondek, *Solutions of Beams, Frames, and 3D Structures on Elastic Foundation using FEM*, International Journal of Mechanics 07.2014.
- [46] Pavement Interactive, *Modulus of Subgrade Reaction*, internet link: <http://www.pavementinteractive.org/article/modulus-of-subgrade-reaction/> (travanj 2015)
- [47] Boundary conditions: *Beams on Elastic foundations*, 04.listopad 2011., Internet link: <http://www.codecogs.com/library/engineering/materials/beams/elastic-foundations.php>
- [48] Jhaman Lalchandani, *Finite element program in Autocad VBa for Winkler Foundation*, Mehran University of Engineering and Technology, Jamshoro, svibanj 2000.

#### 4) Verifikacija

- [49] Analitički proračun grede na elastičnoj podlozi uslijed kontinuiranog opterećenja: [http://saecanet.com/Calculation\\_data/000168\\_000299\\_kouzou\\_rikigaku\\_koushiki.html](http://saecanet.com/Calculation_data/000168_000299_kouzou_rikigaku_koushiki.html) (13.02.2015.)

- [50] Analitički proračun konzole na elastičnoj podlozi uslijed kontinuiranog opterećenja: [http://www.saecanet.com/Calculation\\_data/000172\\_000303\\_kouzou\\_rikigaku\\_koushiki.html](http://www.saecanet.com/Calculation_data/000172_000303_kouzou_rikigaku_koushiki.html) (29.05.2015.)
- [51] Analitički proračun grede na elastičnoj podlozi uslijed kontinuiranog opterećenja s određenim razmakom [http://www.saecanet.com/Calculation\\_data/000144\\_000285\\_kouzou\\_rikigaku\\_koushiki.html](http://www.saecanet.com/Calculation_data/000144_000285_kouzou_rikigaku_koushiki.html) (14.02.2015.)
- [52] *Chapter Four: Elastic Foundations*, internet link: <http://www.me.ust.hk/~meqpsun/Notes/CHAPTER4.pdf>, 28.02.2015.
- [53] Prof. M.Sc. Karel FRYDRÝŠEK, *Report about Solutions of Beam on Nonlinear Elastic Foundation*, Department of Mechanics of Materials, Technical University of Ostrava, ISBN: 978-960-474-305-6

## 5) Programski paketi i aplikacije

- [54] ANSYS internet stranica: <http://www.ANSYS.com/> (02.12.2015.)
- [55] ANSYS 15.0 Documentation, link: <http://148.204.81.206/ANSYS/readme.html>
- [56] ANSYS 14.0 Manual – Chapter 14.63.2. Foundation Stiffness
- [57] Dassault Systèmes, ABAQUS 6.10 *User's guide and theoretical manual*, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2015.
- [58] Dassault Systèmes, Simulia ABAQUS 6.9 Documentation, link: <http://ABAQUSdoc.ucalgary.ca/v6.9/books/rnb/default.htm>, siječanj 2015.
- [59] PTC MathCAD Prime 3.0 (link: <http://www.ptc.com/product/mathcad/features>)
- [60] Huei-Huang Lee, *Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 15: Theory, Applications, Case Studies*, 2014.
- [61] MathWorks Matlab2015a (link: <http://www.mathworks.com/products/matlab/> ožujak 2015.)
- [62] WebPlotDigitizer (link: <http://arohatgi.info/WebPlotDigitizer/>, travanj 2015.)
- [63] FlexBeam 1.0.2.Lite (link: <http://en.vinksda.nl/toolkit-mechanical-calculations/calculate-deflection-of-beams-flexbeam> )



## PRILOZI

### I. Programski kod za računanje, prikaz progiba i naprežanja konzole u programskom paketu MatLab R2015a:

```

clc; clear all; close all;
E = 200000; %Youngov modul elasticnosti [MPa]
r = 2; %Unesi 1 za kružni poprecni presjek, Unesi 2 za pravokutni
poprecni presjek
if(r==1)
    d = 10; % promjer konzole [mm]
    I = (pi*(d/2)^4)/4; % moment inercije [mm^4]
elseif(r==2)
    b = 10; % širina konzole [mm]
    h = 10; % visina konzole [mm]
    I = (b*h^3)/12; % moment inercije [mm^3]
end
%Gornji izrazi izracunavaju moment inercije I potreban za figure 1 i 2
%U nastavku je kod za unos duljine grede i iznosa opterećenja za izracun
%trazenog progiba
L = 200; % dužina konzole [mm]
q = 1; % iznos kontinuiranog opterećenja[N/mm]
syms x;
w(x) = ((q*L^4)/(24*E*I)) * (3-4*x/L - (x/L)^4); % raspodjela progiba;
wmax = w(0); % maksimalni iznos progiba
sigma = q*L^2*h/(I*4); % maksimalni iznos naprežanja [MPa]
%gornji izraz racuna maksimalni progib za dva slučaja opterećenja.
%U nastavku je kod za graficki prikaz izračunatih vrijednosti progiba
%i prikaz elasticne krivulje konzole
disp('Maksimalni progib')
wmax
disp('Maksimalno naprežanje')
sigma
x = 0:L:L;
dy = wmax/L;
y = 0:dy:wmax;
figure
hold on;
plot(x,y,'r-o','LineWidth',1.5);
xlabel('duljina grede [mm]');
ylabel('progib [mm]');
box on;
legend('boxoff');
hold off;

```

**II. Programski kod za rješavanje diferencijalne jednadžbe 4.reda konzole:**

```

% Ovaj kod rjesava problem konzole opterecene kontinuiranim opterecenjem
clc; clear all; close all;
% Ulazne varijable:
E = 200000; % Youngov modul elasticnosti [MPa]
l = 200; % dužina konzole [mm]
q = 1; % iznos kontinuiranog opterecenja [N/mm]
f = 0; % nelinearna reakcija podloge [MPa]
b = 10; % širina konzole [mm]
h = 10; % visina konzole [mm]
I = (b*h^3)/12; % moment inercije [mm^4]
% -----
x_raspon=0:0.5:1;
M=1/(E*I)*(+(0.5*q*l^2)-(q*l).*x_raspon+q.*x_raspon.^2/2);
yo=[0 0];
[xd yd]=ode45(@Moj_DE2(x,y,x_raspon,M),[0 1],yo); % solver za
diferencijalne jednadze
% -----
plot(xd,yd(:,2),'k-','LineWidth',1.5)
xlabel('x'),ylabel('negativan nagib'),grid on
title('Numericko rjesenje od d^2y/dx^2-q=0 , y(0)=0, dy/dx(0)=0')
hold on
% Plot Exact Solution NAGIBI
X=0:0.5:1; Y=q/(E*I)*(X.^3/6-1*X.^2./2+q.*1^2*X.^1./2); %%X=0:0.5:5;
Y=(q*X^2)/(2*E*I);
plot(X,Y,'r-.','LineWidth', 0.3)
legend ('numericko', 'analiticko')
% -----
figure(2)
plot(xd,yd(:,1),'k-','LineWidth',1.5)
% Plot Exact Solution PROGIBI
X=0:0.5:1; Y=q/(E*I)*(X.^4/24-1*X.^3./6+q.*1^2*X.^2./4); %%X=0:0.5:5;
Y=(q*X^2)/(2*E*I);
hold on
plot(X,Y,'r','LineWidth', 0.3)
xlabel('x'),ylabel('progib'),grid on
legend ('numericko','analiticko')
%provjera pomaka
Y(size(Y,2))
w_anal=q*l^4/(8*E*I)%http://rgn.hr/~lfrgic/nids_lfrgic/PDF_OTPORNOST/Print_
9_2012_Progibi.pdf slide 17
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dy = Moj_DE2( x,y,x_raspon,M)
global E I q l
% moj_output = zeros(size); % Kreiraj kvadratnu matricu velicine y
% dy = zeros(2,size(M,2));
M=interp1(x_raspon,M,x);
dy = zeros(2,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = M;

```

**III. Programski kod za rješenje konzole Galerkinovom metodom:**

```

% Ovdje je prikazano rjesavanje konzole Galerkinovom metodom:
clear all; clc; close all;
% Odabrane aproksimativne funkcije koje zadovoljavaju R.U.-e:
syms x C1 C2 C3 C4 v E Iz q l b h
assume (x > 0);
psi1(x) = x^2; % Prva (i=1) pretpostavljena funkcija (moze i x^2*(1-2*x))
psi2(x) = x^3; % Druga pretpostavljena funkcija
psi3(x) = x^4; % Treca pretpostavljena funkcija
psi4(x) = x^5; % Cetvrta pretpostavljena funkcija
va(x) = C1*psi1+C2*psi2+C3*psi3+C4*psi4; % pretpostavljena funkcija
progiba
d2va(x) = diff(va,x,2);
d2psi1(x) = diff(psi1,x,2);
d2psi2(x) = diff(psi2,x,2);
d2psi3(x) = diff(psi3,x,2);
d2psi4(x) = diff(psi4,x,2);
podintegral_f1(x) = E*Iz*d2va*d2psi1-q*psi1;
podintegral_f2(x) = E*Iz*d2va*d2psi2-q*psi2;
podintegral_f3(x) = E*Iz*d2va*d2psi3-q*psi3;
podintegral_f4(x) = E*Iz*d2va*d2psi4-q*psi4;;
% Od prije: podintegral_f4(x) =
E*Iz*(d2psi1*C1+d2psi2*C2+d2psi3*C3+d2psi4*C4+0.5*q*x*(1-x))*psi4;
f1(x) = int(podintegral_f1,x,0,1);
f2(x) = int(podintegral_f2,x,0,1);
f3(x) = int(podintegral_f3,x,0,1);
f4(x) = int(podintegral_f4,x,0,1);
fun = [f1 == 0; f2 == 0; f3 == 0; f4 == 0]; % 4 x sustav jednadzbi
vars = [C1; C2; C3; C4]; % Trazene varijable
[c1,c2,c3,c4] = solve(fun,vars); % Pozovi solver za rjesavanje sustava
jedadzbi
v(x) = c1*psi1+c2*psi2+c3*psi3+c4*psi4; % konacna funkcija progiba
display('Progib:')
pretty(v) % prikaz izraza za progib
% -----
% Test za zadane vrijednosti:
E = 200000; % Youngov modul elasticnosti [MPa]
l = 200; % dužina konzole [mm]
q = 1; % iznos kontinuiranog opterecenja [N/mm]
b = 10; % širina konzole [mm]
h = 10; % visina konzole [mm]
Iz = (b*h^3)/12; % moment inercije [mm^4]
Y(x) = ((q*x^4)/(24*E*Iz)) - ((q*l*x^3)/(6*E*Iz)) + ((q*l^2*x^2)/(4*E*Iz)); %
Tocni analiticki izraz
display('progib za x=0:')
eval(v(0)) % numericko rjesenje treba za konzolu iznositi 0
display('progib za x=1:')
eval(v(1)) % numericko rjesenje treba za konzolu iznositi 1.2 mm
% Crtanje dijagrama numerickog i analitickog rjesenja:
sx = linspace(0,1,1/10);
V = eval(v(sx));
Z = Y(sx);
figure
plot(sx,Z,'c','LineWidth',2.5);
hold on
plot(sx,V,'o','MarkerSize',5,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[0.5,0
.5,0.5]);
xlabel('duljina konzole [mm]');
ylabel('progib [mm]');

```

```

legend('točno rjesenje','Galerkinova metoda','Location','northwest');
grid on
hold off
% -----
M(x) = -1*E*Iz *diff(v,x,2); % Raspodjela momenta
Q(x) = -1*E*Iz *diff(v,x,3); % Raspodjela poprecnih sila
Mn = eval(M(sx));
Qn = eval(Q(sx));
Qanal = q*(1-sx); % Analiticko rjesenje za progib
figure
plot(sx,Qanal,'g','LineWidth',2.5);
hold on
plot(sx,Qn,'o','MarkerSize',4,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[0.5,
0.5,0.5]);
xlabel('duljina konzole [mm]');
ylabel('poprecna sila [N]');
grid on
hold off

```

#### **IV. Programski kod za rješenje konzole na elastičnoj podlozi opterećene kontinuiranim opterećenjem:**

```

% Ovaj kod rjesava problem konzole na elastičnoj podlozi opterećene
kontinuiranim opterećenjem s
clc; clear all; close all;
figure
A = imread('Konzola.JPG');
image(A)
title('Konzola na elastičnoj podlozi')
hold off
% Ulazne varijable:
global q l E Iz Kp
E = 200000; % Youngov modul elasticnosti [MPa]
l = 200; % dužina konzole [mm]
q = 1; % iznos kontinuiranog opterećenja [N/mm]
b = 10; % širina konzole [mm]
h = 10; % visina konzole [mm]
Iz = (b*h^3)/12; % moment inercije [mm^4]
Kp = 1; % modul podloge [N/mm^3]
syms x v;
% -----
global fodb
f(v) = Kp*v*b; % reakcija podloge po duljini grede [N/mm]
odb = 0.1; % progib za koji se postize ravnoteza: g-f(odb)=0
fodb = eval(f(odb)); % rezultirajući f(odb)
% -----
% Konzola bez podloge:
assume(x > 0); % pretpostavi pozitivan x
v0(x) = dsolve('E*Iz*D4v == q','x'); % Generalno rješenje dif.jedn.
display('Generalno rješenje v0: ')
pretty(v0) % zgodniji prikaz generalnog rješenja dif.jedn. progiba EI*v ==
...
% Pojedinačne dif.jedn.:
vI(x) = diff(v0); % EI*dv/dx == ...
vII(x) = diff(vI); % EI*d2v/dx2 == ...
vIII(x) = diff(vII); % EI*d3v/dx3 == ...
vIV(x) = diff(vIII); % EIz*d3v/dx3 == ...

```

```

% -----
% Konzola s elasticnom podlogom:
% Kod koji numericki rješava dif.jedn. 4. reda: E*Iz*d4v/dx4=q+f(v)
options = bvpset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-6, 'NMax', 10000);
solinit = bvpinit(linspace(0,1,1/20),[0,0,0,0]); % definirani raspon i
inicijalne pretpostavke o rješenju
sol = bvp4c(@moj_mat4ode_L,@moj_mat4bc_L,solinit,options);
sx = linspace(0,1,1/20);
y = deval(sol,sx);
Y = ((q*sx.^4)/(24*E*Iz)) - ((q*1*sx.^3)/(6*E*Iz)) + ((q*1^2*sx.^2)/(4*E*Iz));
% Analiticko rješenje
% konzole bez podloge
% -----
---
% Na temelju uvjeta ravnoteže računaju se reakcije u osloncima:
Faz = (q-fodb)*1; % Reakcija u A u smjeru osi z
Ma = (q-fodb)*0.5*1^2; % Moment u ukljestenju A
Mb = Ma-Faz*1+(q-fodb)*0.5*1^2; % UVJET! Moment na rubu B mora biti jednak
nuli
% Raspodijela momenta M(x) po duljini konzole:
M(x) = -(-Ma+Faz*x - ((q-fodb)*x^2)/2); % raspodjela momenta po duljini
konzole
dijagram_M(M,1); % funkcija koja crta dijagram M(x)/x
% -----
% Crtanje dijagrama numerickog i analitickog rjesenja:
figure
plot(sx,Y,'g','LineWidth',2.5);
hold on
plot(sx,y(1,:),'o','MarkerSize',4,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[
0.5,0.5,0.5]);
xlabel('duljina konzole [mm]'); ylabel('progib [mm]');
legend('Analiticki progib - konzola bez podloge','numericko rjesenje s
podlogom f(v)','Location','northwest');
grid on
% -----
% Crtanje dijagrama samo numerickog rjesenja:
figure
plot(sx,y(1,:),'b-
','MarkerSize',4,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[0.5,0.5,0.5]);
%set(gca, 'YTickLabel', num2str(get(gca,'YTick'),'d'))
xlabel('duljina konzole [mm]'); ylabel('progib [mm]');
legend('Numericko rjesenje s podlogom','Location','northwest');
grid on

```

### Podfunkcije:

a)

```

function res = moj_mat4bc(ya,yb)
    global q E I f_odb
    res=[ya(1) % a=0 at x=0
        ya(2) % da/dx=0 at x=0
        yb(3) % da2/dx2=0 at x=1
        yb(4)]; % da3/dx3=0 at x=1

```

b)

```

function dxdy = moj_mat4ode(~,y) % 4th order equation
    global q E Iz fodb
    dxdy=[y(2) % y'=z
        y(3) % z'=r
        y(4) % r'=p

```

$$q / (E \cdot I_z) - (10 \cdot y(1)) / (E \cdot I_z) ] ; \quad \% \quad p' = q / (E \cdot I) - f(v) / (E \cdot I)$$

**V. Rezultati 11 slučaja - 1D ANSYS modela savijanja steznog sustava limova transformatora.**