

# Numeričke simulacije stlačivog strujanja fluida korištenjem spregnutog algoritma

---

Šunjo, Karlo

Master's thesis / Diplomski rad

2014

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:924169>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Karlo Šunjo

Zagreb, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:  
prof.dr.sc. Hrvoje Jasak, dipl.ing.

Student:  
Karlo Šunjo

Zagreb, 2014.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Jasaku na prilici koju mi je na ovaj način pružio, na prenosom znanju i velikoj motivaciji za rad i napredak naročito na području CFD-a. Zahvaljujem i Vuki Vukčeviću na strpljenju, smirenosti i znanju koje mi je prenio. Također i svima koji su na bilo koji način doprinijeli izradi ovog rada.

Karlo Šunjo

# Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>iii</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>vi</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Pregled literature . . . . .	2
<b>2. Matematički model</b>	<b>5</b>
2.1. Eulerove jednadžbe . . . . .	5
2.2. Hiperboličnost . . . . .	7
2.3. Riemannov problem . . . . .	8
2.3.1. Rankine-Hugoniotov uvjet . . . . .	10
2.4. Navier-Stokesov sustav jednadžbi . . . . .	11
2.4.1. Rubni uvjeti Navier-Stokesovih jednadžbi . . . . .	12
2.5. Model turbulencije u dinamici fluida . . . . .	12
2.5.1. $k - \omega$ SST model turbulencije . . . . .	13
<b>3. Numerički model</b>	<b>16</b>
3.1. Diskretizacija transportne jednadžbe . . . . .	16
3.1.1. Interpolacija na površinama kontrolnih volumena . . . . .	17
3.1.2. Aproksimacijski Riemannovi rješavači . . . . .	18
3.1.3. Limiteri gradijenta . . . . .	22
3.1.4. Aproksimacija vremenskog člana . . . . .	24
3.2. Rubni uvjeti . . . . .	26
<b>4. Validacija koda</b>	<b>28</b>
4.1. Seinerova mlaznica . . . . .	28
4.1.1. Računalna mreža . . . . .	29
4.1.2. Rubni i početni uvjeti . . . . .	29
4.2. MADIC 2D osnosimetrična mlaznica . . . . .	34
4.2.1. Računalna mreža . . . . .	34
4.2.2. Rubni i početni uvjeti . . . . .	36
4.2.3. Usporedba DB i PB rješavača . . . . .	39
4.3. Kružni isječak u zračnom tunelu . . . . .	46

---

4.3.1. Računalna mreža . . . . .	46
4.3.2. Rubni i početni uvjeti . . . . .	47
4.4. Onera transonično krilo . . . . .	50
4.4.1. Računalna mreža . . . . .	50
4.4.2. Rubni i početni uvjeti . . . . .	52
4.5. Interakcija graničnog sloja i udarnog vala . . . . .	55
4.5.1. Računalna mreža . . . . .	55
4.5.2. Rubni i početni uvjeti . . . . .	57
<b>5. Zaključak</b>	<b>63</b>
<b>6. Bibliografija</b>	<b>64</b>

# Popis slika

2.1	Domena zavisnosti i zona utjecaja [39]. . . . .	8
2.2	Udarni val [37]. . . . .	9
2.3	Entropijski nemoguć val [37]. . . . .	9
2.4	Val razrjeđenja [37]. . . . .	10
3.1	Parametri diskretizacije u metodi kontrolnih volumena za kontrolne volumene na granicama domene [50]. . . . .	26
4.1	Prikaz računalne mreže Seinerove mlaznice. . . . .	29
	a    Izgled domene. . . . .	29
	b    Detalj konvergentno-divergentnog dijela. . . . .	29
4.2	Inicijalizirano polje totalnih veličina na ulazu. . . . .	30
4.3	Polje brzine u mlaznici. . . . .	30
4.4	Polje gustoće u mlaznici. . . . .	30
4.5	Polje turbulentne kinetičke energije. . . . .	31
4.6	Oblik "dijamanata" na izlazu iz mlaznog motora [53]. . . . .	31
4.7	Prikaz Machovog broja u grlu mlaznice. . . . .	32
4.8	Polje tlaka u mlaznici. . . . .	32
4.9	Normalizirana brzina i turbulentna kinetička energija u osi simetrije iz NASA [52]. . . . .	33
4.10	Grafovi normalizirane brzine i turbulentne kinetičke energije dobiveni simulacijom. . . . .	33
	a    Normalizirana brzina u osi simetrije. . . . .	33
	b    Normalizirana turbulentna kinetička energija u osi simetrije. . . . .	33
4.11	Prikaz dvodimenzijske računalne mreže iz projekta MADIC. . . . .	35
	a    Izgled domene. . . . .	35
	b    Detalj konvergentno-divergentne mlaznice. . . . .	35
4.12	Prikaz inicijaliziranog polja tlaka i brzine. . . . .	36
4.13	Prikaz djelomičnog poklapanja na gruboj mreži. . . . .	37
	a    DB rješavač. . . . .	37
	b    PB rješavač. . . . .	37
4.14	Prikaz trenutka djelomičnog poklapanja na finijoj mreži. . . . .	38
	a    DB rješavač. . . . .	38

b	PB rješavač. . . . .	38
4.15	Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na grubljoj mreži. . . . .	40
a	DB rješavač. . . . .	40
b	PB rješavač. . . . .	40
4.16	Rezultati NASA-e [54] za koeficijent tlaka na krmi motora. . . . .	41
4.17	Usporedba koeficijenta tlaka na krmi motora u vremenskom trenutku $t = 0.005$ s grube i fine mreže. . . . .	41
a	Gruba mreža. . . . .	41
b	Fina mreža. . . . .	41
4.18	Usporedba koeficijenta tlaka na krmi motora u vremenskom trenutku $t = 0.008$ s grube i fine mreže. . . . .	42
a	Gruba mreža. . . . .	42
b	Fina mreža. . . . .	42
4.19	Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na grubljoj mreži, detalj mlaznice. . . . .	43
a	DB rješavač. . . . .	43
b	PB rješavač. . . . .	43
4.20	Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na finijoj mreži. . . . .	44
a	DB rješavač. . . . .	44
b	PB rješavač. . . . .	44
4.21	Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na finijoj mreži, detalj mlaznice. . . . .	45
a	DB rješavač. . . . .	45
b	PB rješavač. . . . .	45
4.22	Računalna mreža tunela s kružnim isječkom. . . . .	46
4.23	Usporedba kontura Machovog broja za različite Riemannove aproksimacijske rješavače. . . . .	48
a	Roeov rješavač. . . . .	48
b	HLLC rješavač. . . . .	48
c	Rusanovljev rješavač. . . . .	48
4.24	Usporedba rješavača prema Machovom broju na donjem zidu domene. . . . .	49
4.25	Detalji geometrije krila [61]. . . . .	50
4.26	Prikaz geometrije i mreže krila Onera M6. . . . .	51
4.27	Polje tlaka na krilu i konture tlaka na presjeku u korjenu krila. . . . .	52
a	Rezultati NASA-e [62]. . . . .	52



b	Rezultati novog koda. . . . .	52
4.28	Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku $y/b=0.2$ . . . . .	53
a	NASA [62]. . . . .	53
b	Novi kod. . . . .	53
4.29	Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku $y/b=0.65$ . . . . .	53
a	NASA [62]. . . . .	53
b	Novi kod. . . . .	53
4.30	Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku $y/b=0.8$ . . . . .	54
a	NASA [62]. . . . .	54
b	Novi kod. . . . .	54
4.31	Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku $y/b=0.95$ . . . . .	54
a	NASA [62]. . . . .	54
b	Novi kod. . . . .	54
4.32	Računalna mreža s dimenzijama. . . . .	56
4.33	Polje tlaka izraženo u Pa za najfiniju mrežu. . . . .	57
4.34	Tlak na donjoj površini domene. Usporedno su prikazani podaci za sve tri finoće mreže. . . . .	58
4.35	Polje brzine izraženo m/s. . . . .	59
a	Gruba mreža. . . . .	59
b	Srednje gruba mreža. . . . .	59
c	Fina mreža. . . . .	59
4.36	Polje temperature izraženo u Kelvinima. . . . .	61
a	Gruba mreža. . . . .	61
b	Srednja mreža. . . . .	61
c	Fina mreža. . . . .	61
4.37	Polje gustoće izraženo $\text{kg/m}^3$ za najfiniju mrežu. . . . .	62

## Popis tablica

4.1	Tablični prikaz svojstava zraka korištenih u simulaciji. . . . .	29
4.2	Usporedni prikaz glavnih parametara mreža. . . . .	35
4.3	Usporedba vremena proračuna. . . . .	39
4.4	Usporedba vremena proračuna. . . . .	49
4.5	Imena stranica domene. . . . .	51
4.6	Tablični prikaz svojstava fluida korištenih u simulacijama. . . . .	55
4.7	Usporedni prikaz glavnih parametara mreža. . . . .	56

## Popis oznaka

### Latinska slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$\tilde{\mathbf{A}}$		matrica konstantnih koeficijenata
$C$		konstanta
$c$	m/s	brzina zvuka
$\mathbf{d}$	m	vektor položaj između centra promatranog i susjednog kontrolnog volumena
$c_p$	J/kg K	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$c_v$	J/kg K	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu
$E$	J/kg	ukupna energija
$F$		tok u jednodimenzijском slučaju
$\mathbf{F}$		vektor toka
$e$	J/kg	specifična energija
$k$	J/kg	turbulentna kinetička energija
$\tilde{\mathbf{K}}$		svojstveni vektor matrice konstantnih koeficijenata
$L$	m	karakteristična duljina
$p$	Pa	tlak
$p_0$	Pa	totalni tlak
$R$	J/kgK	univerzalna plinska konstanta
$R_{spec}$	J/kgK	specifična plinska konstanta
$r$		omjer razlike vrijednosti varijable u kontrolnom volumenu ispred i promatranog te razlike vrijednosti u promaranom i iza promatranog (ratio of forward and backward differences)
$S$	J/kg K	entropija
$\mathbf{S}$	$m^2$	vektor površine
$s$	m/s	brzina signala u sustavu
$Q$	J	volumenski izvor topline
$T$	K	termodinamička temperatura
$T_0$	K	totalna temperatura
$t$	s	vrijeme
$u$	m/s	jednodimenzijска brzina
$\mathbf{U}$		vektor konzerviranih varijabli
$V$	$m^3$	volumen
$\mathbf{u}$	m/s	vektor brzine

Oznaka	Jedinica	Opis
$w$		proizvoljna skalarna varijabla
$w_L$		proizvoljna skalarna varijabla lijevo od udarnog vala
$w_R$		proizvoljna skalarna varijabla desno od udarnog vala
$\mathbf{W}$		vektor početnih stanja lijevo i desno od vala
$\mathbf{x}$	m	vektor položaja

## Grčka slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha_{AoA}$		napadni kut
$\tilde{\alpha}$		jakost udarnog vala osrednjena prema Roeu
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\gamma_\phi$		koeficijent difuzije
$\gamma$		izentropski koeficijent ekspanzije
$\phi$		limiter toka
$\mu$	Pa s	dinamička viskoznost
$\mu_t$	Pa s	turbulentna dinamička viskoznost
$\nu$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	kinetička viskoznost
$\nu_t$	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	turbulentna kinetička viskoznost
$\kappa$		konstanta
$\lambda$		svojstvena vrijednost matrice
$\tilde{\lambda}$		osrednjena svojstvena vrijednost matrice konstantnih koeficijenata
$\varepsilon$	J/kg s	disipacija turbulentne kinetičke energije
$\omega$	s <sup>-1</sup>	specifična disipacija
$\phi$		proizvoljna varijabla
$\phi_s$		limiter gradijenta
$\tilde{\varphi}$		proizvoljna varijabla osrednjena po Roeu

## Bezdimenzijski brojevi

Oznaka	Definicija	Opis
$Co$	$Co = \frac{\mathbf{U}_f \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}} \Delta t$	Courantov broj
$Ma$	$Ma = \frac{u}{\sqrt{\gamma R_{spec} T}}$	Machov broj
$Pr$		Prandtlov broj
$Re$	$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$	Reynoldsov broj

## Sažetak

### Numeričke simulacije stlačivog strujanja fluida korištenjem spregnutog algoritma

U ovom radu izvršit će se validacija numeričkog algoritma za rješavanje strujanja visokog Machovog broja. Algoritam je pisan u okruženju OpenFOAM te je nov u tom kontekstu. Prvo će se opisati glavne matematičke i numeričke probleme koje se susreće u teoriji poput Riemannovog problema te načina rješavanja tog problema. Opisani su ponuđeni rješavači Riemannovog problema uz ostale diskretizacijske sheme koje su standardne u računalnoj dinamici fluida. Algoritam koji koristi gustoću kao glavnu proračunsku varijablu će se validirati na temelju slučajeva za koje se moglo naći eksperimentalne i numeričke rezultate. Pokazalo se kako djeluje profinjenje proračunske mreže na rezultate te kakve rezultate daje u odnosu na algoritme koji koriste tlak kao glavnu proračunsku varijablu. U proračunima je korišten isključivo  $k - \omega$  *SST* model turbulencije zbog visokih iznosa Reynoldsovog broja, osim u jednom slučaju za kojeg se pretpostavilo kvazilaminarno strujanje. Slučajevi koji su uzeti su geometrije krila, jednostavni "shock tube" i kovergentno-divergentne mlaznice. Rezultati proračuna će se prikazati grafički u vidu polja primitivnih varijabli i bezdimenzijskih značajki te će ih se usporediti s postojećim eksperimentalnim i referentnim numeričkim rješenjima.

## Abstract

### **Numerical Simulation of Compressible Flows using a Coupled Density-Based Solution Algorithm**

In this work the validation of coupled density-based algorithm for simulations of high Mach number compressible flows is performed. The algorithm is written in the OpenFOAM environment and it is new in this context. Firstly, mathematical and numerical formulations is introduced as well as ways to solve such problems such as Riemann solver. Approximate Riemann solvers which are available in the new code are theoretically described. This algorithm which uses density as the main calculation variable is validated against cases for which results are available in literature. The impact of mesh refinement is shown as well as the comparison against pressure-based algorithm. Geometries in simulated cases include a transonic wing, bump in a channel, shock-tube and convergent-divergent nozzles, namely, cases that are of interest of industry. Results of simulations are shown as fields of primitive variables and dimensionless numbers and compared against analytical or reference numerical solutions.

# 1. Uvod

Moderne inženjerske metode su u dobroj mjeri napustile tradicionalni način proračunavanja i vizualizacije raznih inženjerskih problema. Današnje dominantne metode oslanjaju se na razvoj računalne tehnologije koja donosi veliki napredak u brzini i preciznosti. Jedno od danas najaktivnijih područja inženjerske prakse je i računalna dinamika fluida. Temelj za računalne metode su matematički modeli, numerička matematika i mnoga eksperimentalna ispitivanja. Danas je cilj razviti što više računalnih rješavača i različitih metoda prikladnih za specifičnu primjenu. Razvoj računalnih rješavača je u svojoj biti pisanje računalnih kodova u nekom od mnogih dostupnih programskih jezika. Jedan od danas najrelevantnijih skupa kodova je računalno okruženje OpenFOAM. To je "open source" tip koda, to jest, takav u čijem razvoju može sudjelovati svatko s adekvatnim znanjima. Usto je i besplatan, za razliku od mnogih komercijalnih kodova te je zbog navedenih razloga idealan za akademsku zajednicu.

Iako su sva, pa i turbulentna strujanja opisana istim sustavom jednadžbi, za rješavanje svakog tipa strujanja još uvijek ne postoji jedinstveni računalni pristup koji bi na ekonomičan način proračunao slučajeve za industriju. Zbog toga se pristupa stvaranju matematičkih modela i numeričkih metoda kako bi se što efektivnije riješio određeni problem u industriji.

Aeroindustrija je jedno od polja inženjerstva koji već dugo za svoje potrebe razvija numerički pristup. Kod letova aviona, a naročito onih koji lete transoničnim i supersoničnim brzinama dolazi do pojave udarnih valova koji mogu negativno utjecati na performanse krila. Zato se pristupa razvoju kodova koji bi efektivno mogli riješiti takve probleme. Supersonična strujanja su opisana hiperboličkim sustavom jednadžbi i po svojoj prirodi su izrazito tranzijentna. Za ovakve probleme naročito su pogodni rješavači koji koriste gustoću kao glavnu proračunsku varijablu. Takav kod je napisan za OpenFOAM okruženje te je nov u tom kontekstu.

Kod razvoja svakog novog specijaliziranog rješavača, potrebno ga je testirati i validirati kako bi se pokazalo kakve rezultate daje u odnosu na eksperimentalne podatke i druge slične kodove. Taj proces se provodi proračunavanjem reprezentativnih primjera za pojedinu vrstu problema. Ideja ovog rada je validirati novi "density-based" (u nastavku DB) rješavač, to jest, onaj kojemu je glavna proračunska varijabla gustoća za razliku od "pressure-based" (u nastavku PB) rješavača koji koriste tlak kao glavnu varijablu. Ovakav DB rješavač je naročito pogodan za

rješavanje strujanja s izraženim kompresibilnim efektom zbog svojih matematičkih i numeričkih svojstava.

## 1.1. Pregled literature

Paralelno s razvojem računala, događao se i razvoj teorija sličnosti koja je omogućila razvoj u polju transoničnih, supersoničnih i hipersoničnih strujanja i letova. U vremenu prije razvoja metoda za računalne simulacije kompresibilnih vrlo brzih strujanja glavni teorijski doprinosi se pridaju Newtonu, Machu, Courantu i Friedrichsu, von Kármánu, Prandtlu, Parku i drugima.

Razvoj računala omogućio je novi pristup problemu i donio ubrzan razvoj području kompresibilnih strujanja. Veliki napredak u području proračuna gibanja valova je postignut objavljivanjem rada Laxa [1] 1954. o slabim rješenjima nelinearnih hiperboličkih jednadžbi. Ovo je omogućilo razvoj metoda prvog reda točnosti za računanje strukture udarnih valova i njihovih putanja korištenjem "shock capturing" ili metodom hvatanja udarnih valova. Članak Laxa i Wendroffa [2] iz 1960. o zakonima očuvanja dao je temelj za razvoj računalnih metoda drugog reda točnosti kao i MacCormackova eksplicitna metoda dva koraka iz 1969. [3]. Godunovljev članak [4] iz 1959. predstavlja veliki korak naprijed u ispravnom načinu tretiranja umjetne viskoznosti kao stabilizatora numeričkih oscilacija u područjima jakih gradijenata. Rusanov je 1970. osmislio shemu trećeg reda točnosti [5], a Turkel i suradnici su 1976. osmislili shemu četvrtog reda točnosti [6] iako su metode drugog reda točnosti dominirale istraživanjima zadnjih tridesetak godina. Moretti je 1963. i 1966. predstavio još jedan način predviđanja udarnih valova koji se naziva "shock fitting" metoda u [7], [8]. Ova metoda izazvala je veliku kontroverzu oko teoretskog pristupa prikladnog za predviđanje udarnih valova.

Kasne sedamdesete donijele su poboljšanje u računalnoj tehnologiji i implicitnim shemama. Taj razvoj omogućio je veoma precizna i brza rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi (poput onih Brileyja i McDonalda iz 1977. [9] te Beama i Warminga 1976. u [10] i 1978. u [11]), ali isto tako i Eulerovih jednadžbi 1983. u [12]. Važni skokovi naprijed u razvoju numeričkih rješenja za probleme dinamike plinova može se podijeliti u nekoliko kategorija koje uključuju ubrzanje proračunske brzine, metode koje omogućuju "upwind differencing" i metode za poboljšanu preciznost u području udarnih valova.

Metode za poboljšavanje proračunske brzine ovih shema uključuju iterativna rješenja transoničnih strujanja oko aerodinamičkih profila i krila kao u [13] iz 1974., implicitnu simulaciju konačnih razlika za trodimenzijska kompresibilna strujanja [14]



Pulliamu i Stegera iz 1980., proceduru dijagonalizacije [15] Pulliamu i Chausseeja 1981., implicitne sheme [16] koje predstavio Yee 1986. te Jamesonove implicitne "multigrid" sheme [17]. Ni je 1982. razvio novu metodu integracije drugog reda točnosti [18] koja je u kombinaciji s "multigrid" pristupom omogućila konstrukciju eksplicitne numeričke sheme za nestacionarne Eulerove jednadžbe toka za dobivanje stacionarnog rješenja. Razvoj je dalje bio ubrzan te uključuje rad Roe-a iz 1981. koji je vrlo često citiran i danas [19], o aproksimacijskim Riemannovim rješavačima, parametarskim vektorima i shemama diferencije. Nadalje, Roe je osmislio i aproksimacijski Riemannov rješavač za skraćeno vrijeme proračunavanja [20] 1986., a Jameson je 1986. predstavio implicitnu "lower-upper multigrid" shemu [21]. Bell sa suradnicima je 1994. napisao članak [22] u kojem je predstavio algoritam za lokalno progušćenje mreže kod rješavanja hiperboličnih jednadžbi u tri dimenzije.

Tokom godina, razvijene su mnoge numeričke metode koje su omogućile "upwind differencing", neophodne za rješavanje hiperboličko-eliptičkih jednadžbi. Većina ovih metoda se temelje na radu Murmana i Colea objavljenog 1971. koji su uvidjeli važnost promjene shema diferencije u blizini udarnih valova [23]. Međutim taj pristup je dopuštao rješenja koja narušavaju uvjet entropije. Ovaj problem su riješili Engquist i Osher 1980. shemom koja osigurava fizikalna rješenja [24]. Uslijedile su metode podjele vektora tokova za Eulerove jednadžbe [25] koje su razvili Steger i Warming 1981. Svojim radom doprinio je i van Leer sa svojim člankom o podjeli vektora [26] 1982.

Nadalje, van Leer je 1979. predstavio poboljšanje drugog reda točnosti [27] za Godunovljevu metodu, a Harten je 1983. uveo shemu visoke rezolucije za hiperbolične zakone očuvanja [28]. Harten, Lax i van Leer predstavili su poznatu HLL [29] metodu 1983., a poboljšanje te metode [30] 1993. donijeli su Toro i suradnici. Nadalje je razvoju doprinio [31] i Batten sa suradnicima 1997. Neke od novijih metoda koje su objavljene su MUSTA [32] ("Multi-Stage Predictor-Corrector") pristup 2006. i EVILIN [33] ("Evolved initial conditions" pristup) koje je predstavio Toro također 2006. Ideja MUSTA rješavača je da se izbjegne rješavanje Riemannovog problema u klasičnom smislu. Liu i Steffen su 1993. predstavili novu metodu temeljenu na podjeli vektora toka [34] pod nazivom AUSM (Advection Upstream Splitting Method). Uslijedilo je nekoliko poboljšanja od kojih je najrecentnije [35] objavljeno 2006.

U ovom radu izvršit će se validacija numeričkog koda koji koristi gustoću kao glavnu proračunsku varijablu. Rad je podijeljen po poglavljima gdje je u prvom poglavlju dan uvod i pregled literature i radova vezanih uz temu rada. U drugom poglavlju iznosi se matematički model kompresibilnih strujanja i popratnih pojava

u tim strujanjima poput udarnih valova i valova razrjeđenja. Teorija se temelji na rješavanju Riemannovog problema (postojanje diskontinuiteta u rješenju) i sustava hiperboličkih jednadžbi. U trećem poglavlju iznose glavne numeričke metode korištene u računalnoj dinamici fluida te specifične metode i postupci korišteni u novom DB rješavaču. U četvrtom poglavlju se iznose rezultati numeričkih simulacija koje su provedene u sklopu ovog rada i uspoređuju se s referentnim slučajevima opisanim u literaturi. Rad se završava kratkim pregledom rezultata, donošenjem zaključaka o učinjenom te se iznose sugestije za budući rad na ovoj temi.

## 2. Matematički model

U ovom poglavlju će se iznijeti glavne jednadžbe modela koje opisuju strujanje. Također će se prikazati neke specifične pojave vezane za kompresibilna strujanja, kao što su udarni valovi i valovi razrjeđenja. Matematički model temelji se na jednadžbama očuvanja mase, jednadžbama očuvanja količine gibanja, energetske jednadžbi i jednadžbi stanja idealnog plina.

### 2.1. Eulerove jednadžbe

Eulerove jednadžbe su sustav nelinearnih hiperboličnih jednadžbi očuvanja koje opisuju strujanja stlačivih fluida, poput plinova ili kapljevine pri visokom tlaku i temperaturi u kojima su zanemareni efekti viskoznosti i tokova topline. Sustav opisuje tranzijentna strujanja te zbog toga ima vremenski član. Varijable mogu biti *primitivne* ili *konzervirane* [36]. Zbog određenih prednosti u numeričkom smislu, koriste se konzervativne varijable. Eulerovim jednadžbama pridružuje se i energetska jednadžba te sustav u jednodimezijskom konzervativnom obliku glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u + p)}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E + p))}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Indeks označava po kojoj veličini je izvedena parcijalna derivacija,  $t$  označava vrijeme, a  $x$  označava prostorne koordinate.

Ukupna energija  $E$  definirana je kao:

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e, \quad (2.4)$$

u kojoj je prvi član kinetička energija, a drugi član unutarnja energija fluida. Veličina  $e$  je specifična unutarnja energija.

Da bi se zatvorio cijeli sustav jednadžbi potrebne su još jednadžba stanja idealnog plina:

$$p = \rho RT, \quad (2.5)$$

u kojoj je  $R$  konstanta koja ovisi o mediju koji se proučava i kalorička jednadžba stanja:

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (2.6)$$

u kojoj je  $\gamma$  konstanta koja ovisi o plinu kojeg se razmatra. Kombinacijom jednadžbi (2.4) i (2.6),  $E$  se može izraziti u obliku  $E = E(\rho, p)$  koji glasi:

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}\rho u^2. \quad (2.7)$$

Još jedna važna termodinamička veličina, koja će se naročito kasnije pokazati korisnom, je entropija  $S$  kojom se ugrubo govoreći mjeri nered u sustavu [37], preciznije nepovrativost procesa [38]. Entropija je definirana uz  $c_v = \text{const.}$  do vrijednosti konstante:

$$S = c_v \log(p/\rho^\gamma) + \text{constant}. \quad (2.8)$$

Jednadžbu se može riješiti tako da poprimi oblik:

$$p = \kappa e^{S/c_v} \rho^\gamma, \quad (2.9)$$

gdje je  $\kappa$  konstanta.

Iz Eulerovih jednadžbi može se dobiti odnos

$$S_t + uS_x = 0 \quad (2.10)$$

koji govori da je entropija konstantna duž strujnice (jer je napisana u nekonzervativnoj formi). Pokazalo se da jednadžba stanja daje tlak  $p$  kao funkciju samo gustoće  $\rho$  i entropije  $S$ , na primjer jednadžba (2.9) za politropki plin. U ovom obliku parcijalna derivacija tlaka  $p$  po  $\rho$  uz držanje  $S$  konstantnim igra fundamentalnu ulogu: njen kvadratni korijen  $c$  predstavlja lokalnu brzinu zvuka u plinu. Za politropski plin dobije se:

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{constant}} = \gamma \kappa e^{S/c_v} \rho^{\gamma-1} = \gamma p / \rho \quad (2.11)$$

te se tako dobije:

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho}. \quad (2.12)$$

Najvažnije svojstvo entropije, iz gledišta teorije udarnih valova je da u strujanjima s glatkim rješenjem ostaje konstantna duž svake strujnice. Kada čestica naiđe na udarni val, entropija može doživjeti skok, ali samo u smjeru prirasta entropije.

## 2.2. Hiperboličnost

Nelinearnu jednadžbu, oblika:

$$w_t + f(w)_x = 0, \quad (2.13)$$

gdje je  $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  i  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  može se napisati u kvazilinearnom obliku koji glasi

$$w_t + A(w)w_x = 0, \quad (2.14)$$

u kojoj je matrica  $A(w) = f'(w)$   $m \times m$  Jacobijeva matrica. Ovdje  $w$  predstavlja glatku funkciju, a može imati smisao gustoće, količine gibanja ili ukupne energije. Sustav će biti hiperboličan ako je  $A(u)$  moguće dijagonalizirati realnim svojstvenim vrijednostima za sve vrijednosti  $w$ , barem u nekom dijelu domene za koji se zna da postoji rješenje, a strogo hiperboličan ako su sve svojstvene vrijednosti različite za sve  $w$ . Fizikalni smisao svojstvene vrijednosti ove matrice je brzina propagacije informacije u sustavu. Jacobijeva matrica Eulerove jednadžbe za politropski plin, uz korištenje samo konvekcijskih članova i jednadžbe stanja glasi:

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - u(E + p)/\rho & (E + p)/\rho - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

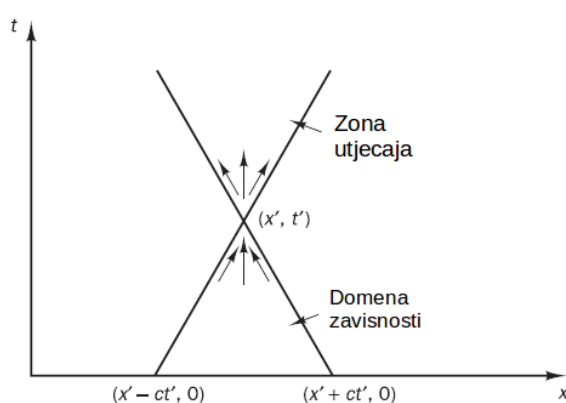
Izračun potvrđuje da su svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = c$  i  $\lambda_3 = u + c$ , gdje je

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho}. \quad (2.16)$$

Ovo je lokalna brzina zvuka u plinu. Ako se lineariziraju ove jednadžbe oko nekog stanja  $\bar{u}$ , pokazuje se da mali poremećaji propagiraju brzinama  $\bar{u}$ ,  $\bar{u} \pm \bar{c}$ , to jest, pri brzinama  $0 \pm \bar{c}$  relativno u odnosu na pozadinsku brzinu  $\bar{u}$ . Valovi koji putuju brzinama  $\pm \bar{c}$  su zvučni valovi. Ljudske uši su osjetljive na male varijacije tlaka u ovim valovima. Ispostavlja se da su valovi koji putuju brzinom strujanja plina zapravo jednostavne varijacije u gustoći koje fluid advekcijski nosi niz domenu promatranog strujanja.

Ovo ima za posljedicu da kod hiperboličkih jednadžbi na točku u vremenu i prostoru utječu samo točke iz područja domene zavisnosti. Domena zavisnosti je ograničena intervalom  $(x - ct, x + ct)$ . Vrlo je važno napomenuti da rješenje ne

ovisi o početnim uvjetima izvan ovog intervala [39]. Ovo je ilustrirano slikom 2.1. Karakteristike  $x - ct = \text{const.}$  i  $x + ct = \text{const.}$  se sijeku u točki  $(x', t')$  te presjecaju os  $x$  u točkama  $(x' - ct', 0)$  odnosno  $(x' + ct', 0)$ . Na rješenje u točki  $(x', t')$  utječu samo poremećaji u domeni zavisnosti, a nikako oni izvan nje. Fizikalno, ovo je posljedica konačne brzine propagacije (jednake brzini vala  $c$ ) međusobnih utjecaja kroz domenu rješenja. Promjene u točki  $(x', t')$  utječu na događaje u kasnijim vremenskim trenutcima u zoni utjecaja prikazanoj na slici 2.1 koja je ograničena karakteristikama.



Slika 2.1: Domena zavisnosti i zona utjecaja [39].

### 2.3. Riemannov problem

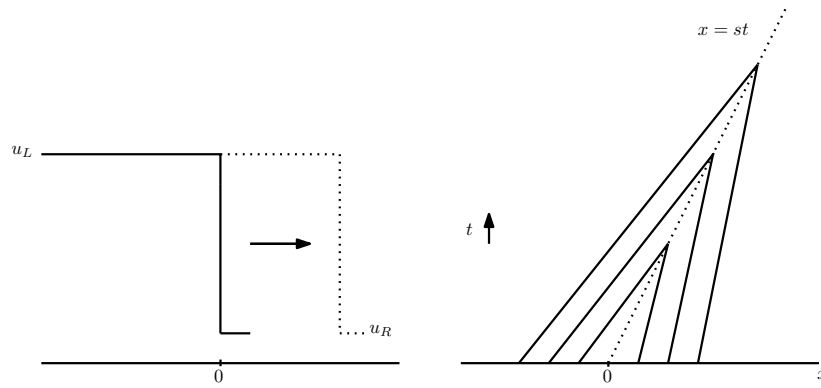
Zakon očuvanja zajedno s konstantnim podacima po dijelovima domene uz postojanje jednog diktinuiteta poznat je pod nazivom Riemannov problem [37]. Primjer je skalarna jednadžba očuvanja s konstantnim koeficijentima poznata i kao Burgerova neviskozna jednadžba [37] :

$$w_t + Aw_x = 0 \quad (2.17)$$

uz početne uvjete:

$$w(x, 0) = w_0(x) = \begin{cases} w_L & \text{za } x < 0 \\ w_R & \text{za } x > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Oblik rješenja ovog problema ovisi o odnosu  $w_L$  i  $w_R$ .



Slika 2.2: Udarни val [37].

**Slučaj 1.** kada je  $w_L > w_R$ .

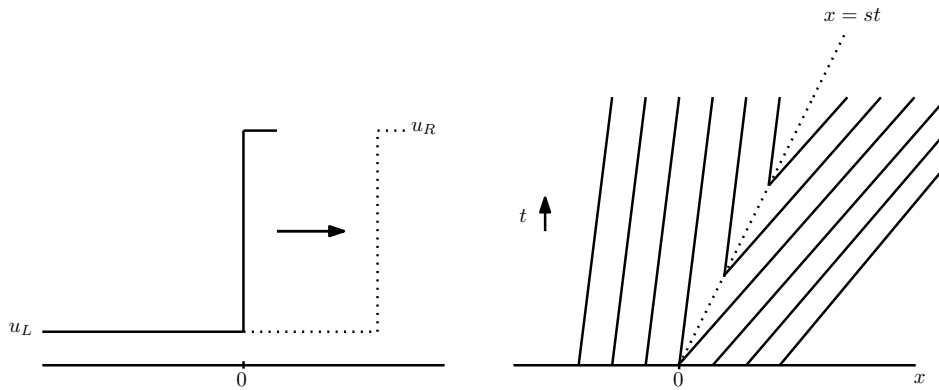
U ovom slučaju postoji jedinstveno slabo rješenje,

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & x < st \\ w_R & x > st \end{cases} \quad (2.19)$$

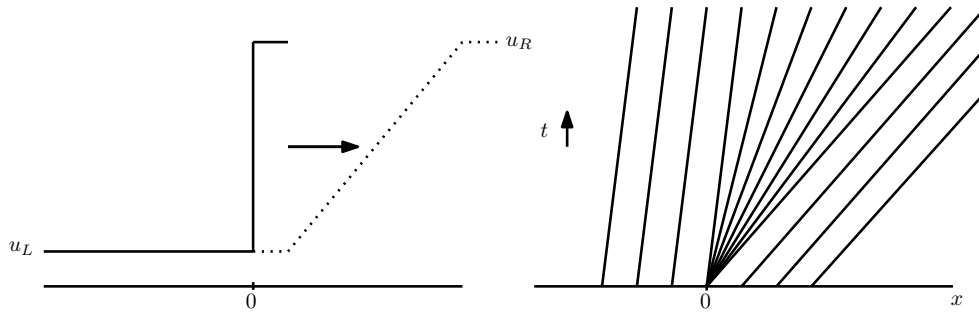
u kojem je  $s$ :

$$s = \frac{w_L + w_R}{2} \quad (2.20)$$

brzina vala ili brzina signala kojim diskontinuitet putuje po domeni [37]. Ovo je prikazano slikom 2.2 na kojoj su prikazane karakteristike koje "ulaze" u udarni val.



Slika 2.3: Entropijski nemoguć val [37].



Slika 2.4: Val razrjeđenja [37].

**Slučaj 2.** kada je  $w_L < w_R$ .

U ovom slučaju postoji beskonačno mnogo slabih rješenja. Jedno od njih je ponovno (2.19), (2.20) u kojem diskontinuitet putuje brzinom  $s$ . U ovom slučaju karakteristike "izlaze iz" vala kako je prikazano na slici 2.3. Ovo rješenje nije stabilno na perturbacije. Ako su podatci malo razmazani ili ako je dodana mala viskoznost u jednadžbu, rješenje se mijenja u potpunosti.

Drugo slabo rješenje je val razrjeđenja koje ima oblik [37]:

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & x < w_L t \\ x/t & w_L t \leq x \leq w_R t \\ w_R & x > w_R t \end{cases} \quad (2.21)$$

Ovo rješenje je stabilno na perturbacije te je zapravo generalizirano rješenje iščezujuće viskoznosti koje je prikazano na slici 2.4.

### 2.3.1. Rankine-Hugoniotov uvjet

Općenito, za proizvoljnu funkciju toka  $f(w)$  ovaj isti argument daje slijedeći odnos između brzine udarnog vala  $s$  i veličina stanja  $w_L$  i  $w_R$  te se nazivaju Rankine-Hugoniotov uvjet koji glasi

$$f(w_L) - f(w_R) = s(w_L - w_R). \quad (2.22)$$

Kod skalarnih problema ovaj odnos daje jednostavan izraz:

$$s = \frac{f(w_L) - f(w_R)}{(w_L - w_R)} = \frac{[f]}{[w]}, \quad (2.23)$$

gdje  $[\cdot]$  označava skok neke vrijednosti pri prolasku kroz diskontinuitet.

Za sustave jednadžbi, poput Eulerovog, izrazi  $w_L - w_R$  i  $f(w_L) - f(w_R)$  su sada oba vektori dok je  $s$  i dalje skalar. Zbog toga, izraz 2.22 ne vrijedi uvijek. Umjesto



toga, samo su neki skokovi  $w_L - w_R$  dopušteni, a to bi bili oni za koje vektori  $f(w_L) - f(w_R)$  i  $w_L - w_R$  imaju linearnu zavisnost.

Kao primjer u [37] se navodi linearni sustav s  $f(w) = Aw$  te u kombinaciji s 2.22 daje:

$$A(w_L - w_R) = s(w_L - w_R) \quad (2.24)$$

gdje  $w_L - w_R$  mora biti svojstveni vektor matrice  $A$ , a  $s$  mora biti pripadajuća svojstvena vrijednost. Za linearni sustav, ove svojstvene vrijednosti su karakteristična brzina sustava. To znači da diskontinuiteti mogu putovati samo po karakteristikama, kako vrijedi i za skalarni primjer.

## 2.4. Navier-Stokesov sustav jednadžbi

Tokom teoretskih razmatranja u [36] i [37] u međukoracima se objašnjava utjecaj viskoznosti na rješenje Eulerovog sustava. Međutim, ta razmatranja su preopširna za ovaj rad. Računalni kod koji se validira je napisan u dvije verzije, jedna koja ne uključuje viskozne efekte i jedna koja ih uključuje. Matematički model kojim su strujanja opisana je sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi te u trodimenzij-skom obliku glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] = 0. \quad (2.27)$$

Članovi jednadžbe (2.26) s lijeva na desno su:

- Nestacionarni član - promjena promatrane veličine u vremenu.
- Konvekcijski član - promjena promatrane veličine vezane uz gibanje fluida.
- Difuzijski član - promjena promatrane veličine vezane uz difuzijske efekte. (Tenzor naprezanja je linearno proporcionalan tenzoru brzine deformacije preko dinamičke viskoznosti)
- Član gradijenta tlaka.

Difuzijskim članom se modelira pojava viskoznosti u fluidu. Konvekcijski član je izvor nelinearnosti stoga ga je potrebno linearizirati u procesu diskretizacije.

Ovim jednadžbama se pridodaje još i jednadžba stanja idealnog plina oblika:

$$p = \rho R_{spec} T, \quad (2.28)$$

gdje je  $R_{spec}$  specifična plinska konstanta koja je definirana kao:

$$R_{spec} = c_p - c_v. \quad (2.29)$$

### 2.4.1. Rubni uvjeti Navier-Stokesovih jednadžbi

Jedinstvenost rješenja sustava opisanog jednadžbama (2.25), (2.26) i (2.27) osiguravaju upravo rubni uvjeti. Jasno je da se rubni uvjeti odnose na zadavanje potrebnih veličina na granici domene. Postoje tri tipa matematičkih rubnih uvjeta iz kojih se mogu dobiti mnogobrojni različiti oblici fizikalnih rubnih uvjeta. Dirichletov rubni uvjet propisuje vrijednost varijable na granici domene. S druge strane, von Neumanov rubni uvjet propisuje vrijednost nultog gradijenta na granici, dok generalizirani von Neumannov uvjet propisuje proizvoljnu vrijednost gradijenta varijable u smjeru normale na granicu. Granice po tipu mogu biti različite, a četiri najčešća tipa su: ulazna granica, izlazna granica, zid i ravnina simetrije. Ulazna granica fizikalno označava ulaz fluida u domenu, te je najčešće zadana s Dirichletovim rubnim uvjetom brzine te von Neumanovim uvjetom za tlak. Izlazna granica predstavlja izlaz fluida iz domene, te se na njoj najčešće postavlja von Neumanov rubni uvjet za brzinu i tlak. Zid predstavlja nepropusnu granicu, te je u viskoznom strujanju brzina jednaka nuli. Simetrija uvelike smanjuje vrijeme proračuna jer se domena nekog simetričnog strujanja može smanjiti dva puta.

## 2.5. Model turbulencije u dinamici fluida

U ovom podpoglavlju dan je pregled problema turbulencije. Dat će se ukratko opis ove pojave i u prirodi, način matematičkog opisa korištenjem Reynoldsovog vremenskog osrednjavanja (RANS - Reynolds averaging Navier-Stokes) te način modeliranja u računalnoj dinamici fluida. Do danas je razvijeno mnogo modela turbulencije, a u ovom radu bit će ukratko predstavljena dva najpoznatija i najkorištenija modela:  $k - \epsilon$  i  $k - \omega SST$ . Predstavit će se problem zatvaranja sustava jednadžbi te će se predstaviti detaljnije  $k - \omega SST$  koji je korišten u ovom radu.

### 2.5.1. $k - \omega$ SST model turbulencije

$k - \varepsilon$  skupina modela turbulencije je najpoznatija skupina, međutim, danas se sve manje i manje koristi. Najveći problem takvih modela je njihova netočnost pri velikim, ali i suprotnim gradijentima tlaka, time i prilikom pojave natražnog strujanja. Prednost  $k - \varepsilon$  modela je njegova mala ovisnost o rubnim uvjetima daleko od zida [40]. S druge strane  $k - \omega$  modeli se bolje ponašaju prilikom velikih i suprotnih gradijenata tlaka, te se bolje slažu s eksperimentalnim podacima za dvodimenzionalna strujanja u graničnom sloju. Nedostatak ovakvih modela je njihova velika osjetljivost o rubnim uvjetima daleko od zida.

Kombinacija prethodno spomenutih modela turbulencije je  $k - \omega$  SST model. Korištenje  $k - \omega$  formulacije u domeni strujanja unutar i blizu graničnog sloja omogućava primjenu modela i do viskoznog podsloja, pa i do samog zida [41], bez korištenja posebnih prigušnih funkcija kao što je to slučaj u mnogim ostalim modelima. Daleko od zida, model se prebacuje na  $k - \varepsilon$  model, te se time izbjegava problem osjetljivosti o rubnim uvjetima daleko od zida (najčešći problem je ulazni rubni uvijet), od kojeg pate mnogi  $k - \omega$  modeli.  $k - \omega$  SST model je karakterističan po dobrom ponašanju prilikom velikih gradijenata tlaka i pojave odvojenog strujanja. Model je opisan slijedećim parcijalnim diferencijalnim transportnim jednadžbama, jdenom algebarskom jednadžbom i dodatnim relacijama:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla(k\bar{\mathbf{u}}) - \nabla((\nu + \sigma_k\nu_t)\nabla k) = P_k - \beta^*k\omega, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla(\omega\bar{\mathbf{u}}) - \nabla((\nu + \sigma_\omega\nu_t)\nabla\omega) = \alpha S^2 - \beta\omega^2 + 2\sigma_{\omega 2}(1 - F_1)\frac{1}{\omega}\nabla k\nabla\omega, \quad (2.31)$$

$$\nu_t = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1\omega, SF_2)}. \quad (2.32)$$

Prva jednadžba predstavlja transportnu jednadžbu turbulentne kinetičke energije, dok druga predstavlja transportnu jednadžbu specifične disipacije. Prilikom rješavanja Navier-Stokesovih jednadžbi, turbulentna viskoznost se jednostavno pridodaje molekularnoj viskoznosti. Dodatne relacije i koeficijenti potrebni su za zatvaranje

sustava, a glase:

$$\begin{aligned}
F_2 &= \tanh \left( \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right)^2 \right), \\
P_k &= \min(\mathbf{R}\nabla\bar{\mathbf{u}}, 10\beta^*k\omega), \\
F_1 &= \tanh \left( \min \left( \left( \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right) \right)^4 \right), \\
CD_{k\omega} &= \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \nabla \omega, 10^{-10} \right), \\
\alpha_1 &= \frac{5}{9}, \\
\alpha_2 &= 0.44, \\
\beta_1 &= \frac{3}{40}, \\
\beta_2 &= 0.0828, \\
\sigma_{k1} &= 0.85, \\
\sigma_{k2} &= 1, \\
\sigma_{\omega 1} &= 0.5, \\
\sigma_{\omega 2} &= 0.856, \\
\beta^* &= \frac{9}{100}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Prva tri člana s lijeve strane jednadžbi za  $k$  (2.30) i  $\omega$  (2.31) redom predstavljaju nestacionarni, konvekcijski i difuzijski član. S desne strane istih jednadžbi se nalaze mnogi izvorski, odnosno ponorni članovi koji ukazuju na jači lokalni karakter ovakve parcijalne diferencijalne jednadžbe. U jednadžbama se nalaze koeficijenti  $\alpha, \beta, \sigma_k$  i  $\sigma_\omega$  (bez indeksa), dok su u koeficijentima potrebnim za zatvaranje sustava dane krajnje vrijednosti koeficijenata (s indeksom 1 i 2). Vrijednosti potrebne u jednadžbi se jednostavno dobiju linearnom interpolacijom pomoću funkcije  $F_1$  ovisno o krajnjim vrijednostima, primjerice za  $\alpha$ :

$$\alpha = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 (1 - F_1). \tag{2.34}$$

Također,  $y$  predstavlja udaljenost točke od zida dok je:

$$S = \sqrt{2\bar{S}\bar{S}}. \tag{2.35}$$

U ovom poglavlju je iznesen matematički temelj koji opisuje fizikalna ponašanja tokova fluida s brzinama bliskim brzini zvuka. Prikazan je matematički opis i način rješavanja diskontinuiteta u rješenju. Iznesen je i način opisa turbulencije te je

iznesen matematički model turbulencije koji se koristi u radu. U slijedećem poglavlju bit će iznesen numerički pristup rješavanju iznesenih problema. Predstavit će se diskretizacija jednadžbi te glavne metode interpolacije i aproksimacije relevantne za ovaj rad.

### 3. Numerički model

U prethodnom poglavlju iznesen je matematički model koji opisuje kompresibilne tokove fluida i matematički opis pojava poput udarnog vala i vala razrjeđenja. Model je zapravo sustav nelinearnih partialijalnih diferencijalnih jednadžbi s dopunskim algebarskim jednadžbama. Kako za većinu industrijskih problema (strujanje oko krila, kroz mlaznice, u usisu mlaznih motora i slično) nije moguće odrediti analitičko rješenje, matematički model je potrebno prilagoditi radu računala. To se postiže diskretizacijom pomoću metode kontrolnih volumena koja je danas daleko najčešće korištena metoda u računalnoj dinamici fluida. U ovom poglavlju će se iznijeti glavne sheme diskretizacije, interpolacije, metode aproksimacije te posebne numeričke tehnike i metode specifične za rješavanje Riemannovog problema. Bit će predstavljen eksplicitni Riemannov rješavač.

Pojam diskretizacija označava aproksimaciju problema kontinuuma u diskretne dijelove. Metoda kontrolnih volumena, ali i druge poput metode konačnih elemenata, diskretiziraju problem kako slijedi:

**Prostorna diskretizacija** - podjela prostorne domene u skup kontrolnih volumena koji je popunjavaju i ograničuju kada su povezani;

**Vremenska diskretizacija** - kod tranzijentnih problema, vremenska domena se dijeli na konačan broj vremenskih intervala ili vremenskih koraka;

**Diskretizacija jednadžbi** - stvara se sustav algebarskih jednadžbi za sve diskretne jedinice prostora domene iz jednadžbi koje opisuju promatrani problem.

#### 3.1. Diskretizacija transportne jednadžbe

Transportna jednadžba za neko skalarno polje  $\phi$  ima oblik

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{vremenski član}} + \underbrace{\nabla(\rho\mathbf{u}\phi)}_{\text{konvekcijski član}} = \underbrace{\nabla \cdot (\rho\gamma_\phi \nabla\phi)}_{\text{difuzijski član}} + \underbrace{S_\phi(\phi)}_{\text{izvorski član}}. \quad (3.1)$$

Brzina  $\mathbf{u}$  i koeficijent  $\gamma_\phi$  su poznati, a jedina nepoznanica je skalarno polje  $\phi$ . Članovi gornje jednadžbe su od lijeva na desno: nestacionarni, konvekcijski, difuzijski i izvorski član. Difuzijski član čini ovu jednadžbu partialijalnom diferencijalnom drugog reda. Integracijom gornje jednadžbe po kontrolnom volumenu dobije se

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_P} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{V_P} \nabla(\rho\mathbf{u}\phi) dV \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla \phi) dV + \int_{V_P} S_\phi(\phi) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Svi prostorni derivacijski članovi se se prevode na površinske integrale površine  $S$  kontrolnog volumena korištenjem generaliziranog oblika Gaussovog teorema koji glasi:

$$\int_V \nabla \otimes \phi dV = \int_S d\mathbf{s} \otimes \phi, \quad (3.3)$$

u kojemu je  $d\mathbf{s}$  vektor iznosa površine kojemu normala pokazuje izvan kontrolnog volumena. Simbol  $\otimes$  predstavlja bilo koji umnožak i time označava bilo koji operator (gradijent, divergens ili rotaciju). Volumni i površinski integrali se zatim aproksimiraju pomoću primjerenih shema.

### 3.1.1. Interpolacija na površinama kontrolnih volumena

Interpolacija vrijednosti varijabli u centrima kontrolnih volumena na površine je fundamentalna za metodu kontrolnih volumena. Koristi se u mnogim diskretizacijskim procedurama koje će biti navedene u ovom poglavlju.

Vrijednost varijable na stranici  $\phi_{f(F,S,\gamma)}$  može se odrediti iz vrijednosti u susjednim kontrolnim volumenima pomoću velikog broja shema predstavljene slovom  $S$ , koja zahtjeva tok  $F$  kroz površinu  $f$  te u nekim shemama jedan ili više  $\gamma$  parametara.

Točna definicija toka ovisi o jednadžbama strujanja i proceduri numeričkog rješenja. Polje toka je najčešće rezultat numeričkog rješenja i zadovoljava ograničenja kontinuiteta. U opsegu ovog rada može se uzeti da je definicija toka  $F = \mathbf{S} \cdot (\rho\mathbf{u}_f)$ . Ovakva definicija toka se poklapa s diskretizacijom konvekcijskog člana iz jednadžbe 3.1.

Najvažnije sheme interpolacije su:

**CD** (engleski "central differencing") - je metoda koja ima točnost drugoga reda, ali rješenje može biti neograničeno:

$$\phi_{f(CD)} = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \quad (3.4)$$

gdje je  $f_x \equiv \frac{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_N|}{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_N| + |\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P|}$ .

**UD** (engleski "upwind differencing") - određuje  $\phi_f$  prema smjeru toka. Shema

se sastoji od uvjeta:

$$\phi_{f(F,UD)} = \begin{cases} \phi_P & \text{za } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{za } F < 0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

UD osigurava ograničenost rješenja, međutim, tek je prvog reda točnosti. Kod ove metode javlja se "lažna difuzija" koja je posljedica numeričke pogreške zbog niskog reda točnosti. Ovaj problem pogađa grube mreže. Dakle, ograničenost rješenja se postiže nauštrb točnosti.

**BD** (engleski "blended differencing") - sheme iz ove familije su dobivene kombinacijom UD i CD shema u pokušaju očuvanja ograničenosti rješenja uz razumnu preciznost. Linearna su kombinacija UD i CD shema:

$$\phi_{f(F,BD,\gamma)} = (1 - \gamma)\phi_{f(F,UD)} + \gamma\phi_{f(CD)}. \quad (3.6)$$

Ovdje  $\gamma$  označava faktor ograničenja koji se kreće u rasponu  $0 \leq \gamma \leq 1$  te određuje stupanj pomiješanosti CD i UD pristupa. Postoji nekoliko predloženih izraza pomoću kojih se bira koeficijent  $\gamma$  opisanih u literaturi. Postoji i cijela obitelj TVD shema (engleski "total variation diminishing") koje su kombinacija gore navedenih te imaju ograničenje, a također i NVD (Normalised Variable Diagram) sheme.

### 3.1.2. Aproksimacijski Riemannovi rješavači

Postoje dva dominantna pristupa za određivanje uzvodnog smjera: Godunovljev pristup [4] i metoda raspolavljanja vektora tokova [25]. Zadnji pristup je jednostavniji i nešto efikasniji te je naročito primjenjiv kod implicitnih metoda. Godunovljev pristup daje točnije rezultate u području diskontinuiteta te je naročito pogodan kod stacionarnog kontakta i smičnih valova [36].

#### Riemannov problem i Godunovljev tok

Za općeniti problem početnih i rubnih uvjeta definiranog [36]:

$$\left. \begin{aligned} \text{PDJ: } \mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x &= 0, \\ \text{Početni uvjet: } \mathbf{U}(x, 0) &= \mathbf{U}^{(0)}(x), \\ \text{Rubni uvjet: } \mathbf{U}(0, t) &= \mathbf{U}_l(t), \mathbf{U}(L, t) = \mathbf{U}_r(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

uz korištenje eksplicitnog izraza:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad (3.8)$$



zajedno s Godunovljevim međuvolumnim numeričkim tokom:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0)). \quad (3.9)$$

Uzima se pretpostavka da rješenje ovog sustava postoji. Ovdje  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0)$  je rješenje (engleski "similarity solution") od  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$  Riemannovog problema:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x &= 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{U}_L \text{ ako je } x < 0, \\ \mathbf{U}_R \text{ ako je } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

koje se procjenjuje u  $x/t = 0$ . Vektori konzerviranih varijabli i tokova su definirani kao:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Sada se definira područje zvijezdice između lijeve i desne strane vala koje je nepoznato, a označava se indeksom \*. Vrijednost u  $x/t = 0$  odgovara mjestu na osi vremena  $t$  i vrijednost je koju se traži Godunovljevim tokom. Konstantni podatci po područjima, izraženi primitivnim varijablama su:

$$\mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \\ v_L \\ w_L \\ p_L \end{bmatrix}, \mathbf{W}_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \\ v_R \\ w_R \\ p_R \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

U nastavku slijedi prikaz direktne aproksimacije funkcije toka  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$  kako su predložene u [19] i [42].

### Roeov aproksimacijski rješavač Riemannovog problema

Jedan od najpoznatijih i korištenijih aproksimacijskih Riemannovih rješavača je djelo Roe-a, koji je prvi put predstavljen 1981. u [19]. U periodu nakon toga, rješavač je doradivan te je doživio svoju unaprijeđenu verziju objavljenu 1985. u [42] koja ne traži Jacobijevu matricu osrednjenu prema Roe-ovom osrednjavanju. Unaprijeđena verzija je sposobna rješavati kompleksne sustave hiperboličkih jednažbi.

U nastavku će se ukratko predstaviti unaprijeđena verzija Roe-Pikea [42].

Opet je glavni problem izračunati numeričke tokove koji su definirani jednadžbama [36]

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_L + \sum_{\tilde{\lambda} \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \quad (3.13)$$

ili

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_R - \sum_{\tilde{\lambda} \geq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (3.14)$$

Da bi se izračunali tokovi, potrebno je izračunati  $\tilde{\lambda}_i$  koje su svojstvene vrijednosti matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  i pripadajuće svojstvene vektore  $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ . Također je potrebno izračunati jakost valova  $\tilde{\alpha}_i$  za potpuno rješenje tokova. Matrica  $\tilde{\mathbf{A}}$  je matrica konstantnih koeficijenata koja mijenja Jacobijevu matricu i kojom se linearizira hiperboličnu jednadžbu oblika 2.17. Uz korištenje parametarskog vektora  $\mathbf{Q}$  takvog da se vektor konzerviranih varijabli  $\mathbf{U}$  i vektor toka  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  mogu izraziti preko  $\mathbf{Q}$ . To jest [19]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}). \quad (3.15)$$

Slijede dva važna koraka. Promjene stanja:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L, \quad \Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L). \quad (3.16)$$

se mogu izraziti kao:  $\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L$ . Nakon toga, osrednjene vrijednosti se mogu dobiti jednostavnim aritmetičkim operacijama  $\mathbf{Q}$ . Osrednjavanje prema Roeu se vrši:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\sqrt{\rho_L} \varphi_L + \sqrt{\rho_R} \varphi_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (3.17)$$

Dakle, da bi se izračunao numerički tok provodi se slijedeći algoritam [36]:

1. Izračunati osrednjene vrijednosti  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{H}$  i  $\tilde{c}$  prema 3.17.
2. Izračunati vrijednosti osrednjenih svojstvenih vrijednosti  $\tilde{\lambda}_i$ .
3. Izračunati svojstvene vektore  $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ .
4. Izračunati jakosti valova  $\tilde{\alpha}_i$ .
5. Iskoristiti gornje izračunate vrijednosti za dobivanje toka  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$  prema bilo kojem od izraza 3.13, 3.14.

## Rusanovljev aproksimacijski rješavač Riemannovog problema

Rusanovljev postupak je pojednostavljenije Roeovog rješavača [43]. Koristi isti algoritam, ali kada izračuna svojstvene vrijednosti onda odabire najveću prema izrazu [44, 43]

$$\lambda^{max} = \max_i |\lambda^i| = c + |u|. \quad (3.18)$$

Tako izračunata  $\lambda^{max}$  se uvrštava u izraz za tok koji glasi:

$$\mathbf{F}^{Rus} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \lambda^{max} (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L), \quad (3.19)$$

gdje su  $\mathbf{Q}_L$  i  $\mathbf{Q}_R$  parametarski vektori.

## HLLC aproksimacijski Riemannov rješavač

HLLC aproksimacijski Riemannov rješavač razvili su Toro, Spencer i Spears [30] iz HLL-a razvijenog od Hartena, Laxa i van Leera [29]. Prvi nije mogao hvatati kontaktne diskontinuitete, smične valove i valove na kontaktu dvaju medija ili bilo koje pojave međuvala. Te su pojave jednostavno osrednjene kao podaci područja zvijezdice u postupku HLL. U HLLC-u se modelira četiri područja konstantnih vrijednosti varijabli dok je u HLL-u samo tri. To daje tri različite brzine propagacije signala:  $s_L$ ,  $s_*$  i  $s_R$ . Uz integraciju u vremenu dobije se izraz:

$$\left( \frac{s_* - s_L}{s_R - s_L} \right) \mathbf{U}_{*L} + \left( \frac{s_R - s_*}{s_R - s_L} \right) \mathbf{U}_{*R} = \mathbf{U}^{hll}. \quad (3.20)$$

U gornjoj jednadžbi  $\mathbf{U}^{hll}$  je preuzet iz HLL metode i glasi:

$$\mathbf{U}^{hll} = \frac{s_R \mathbf{U}_R - s_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{s_R - s_L}. \quad (3.21)$$

U HLLC pristupu rješenje Riemannovog problema dano je izrazom:

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & , \text{ ako je } \frac{x}{t} \leq s_L \\ \mathbf{U}_{*L} & , \text{ ako je } s_L \leq \frac{x}{t} \leq s_* \\ \mathbf{U}_{*R} & , \text{ ako je } s_* \leq \frac{x}{t} \leq s_R \\ \mathbf{U}_R & , \text{ ako je } \frac{x}{t} \geq s_R \end{cases}. \quad (3.22)$$

Iz ove definicije Riemannovog problem vidljivo je da su nepoznati članovi toka  $F_{*L}$  i  $F_{*R}$  te ih je potrebno definirati. Direktnom primjenom Rankine-Hugoniotovog

uvjeta za bilo koju brzinu vala  $s_L$ ,  $s_*$  i  $s_R$  dobiju se izrazi:

$$\mathbf{F}_{*L} = \mathbf{F}_L + s_L(\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F}_{*R} = \mathbf{F}_{*L} + s_*(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_{*L}), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{F}_{*R} = \mathbf{F}_R + s_R(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_R). \quad (3.25)$$

Da bi sustav bio rješiv potrebno je uvesti dodatne uvjete na tlak i normalnu komponentu brzine koji glase:

$$\begin{aligned} p_{*L} &= p_{*R} = p_*, \\ u_{*L} &= u_{*R} = u_*, \end{aligned} \quad (3.26)$$

te na tangencijalne komponente brzine koji glase:

$$\begin{aligned} v_{*L} &= v_L, \quad v_{*R} = v_R, \\ u_{*L} &= u_L, \quad u_{*R} = u_R. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dodatno je potpuno opravdano i zgodno postaviti [36]:

$$s_* = u_*, \quad (3.28)$$

te je poznata komponenta  $u_*$  u području zvijezdice, ako je poznata procjena  $s_*$ . Uz 3.26 dobije se izraz za  $s_*$  preko brzina  $s_L$  i  $s_R$  čije procjene trebaju biti poznate:

$$s_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (s_L - u_L) - \rho_R u_R (s_R - u_R)}{\rho_L (s_L - u_L) - \rho_R (s_R - u_R)}. \quad (3.29)$$

### 3.1.3. Limiteri gradijenta

Limiteri gradijenta nužni su kod velikog broja CFD proračuna sa diskontinuiranim rješenjima. Njihova uloga je prigušenje oscilacija rješenja uslijed velikih gradijenata kako bi se održala monotonost rješenja. Nedostatak uporabe limitera rješenja je smanjenje točnosti i katkada onemogućenje konvergencije rješenja, osobito za nestrukturirane više dimenzijske mreže. U ovom podpoglavlju kratko su prikazani glavni tipovi jednodimenzionalnih limitera gradijenta.

#### Limiteri toka

Najčešće se za korištenje limitera koristi formulacija pomoću toka [45]. Prema [46] shemu drugog reda može se napisati kao shemu prvog reda zbrojenu sa "anti-difuzivnim" protokom. Za slučaj linearne advekcije opisane jednadžbom  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} =$

0,  $a > 0$  shema glasi :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(u_i - u_{i-1}) - (\psi_i F_{i+1/2} - \psi_{i-1} F_{i-1/2}), \quad (3.30)$$

gdje je  $F_{i+1/2} = \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)(u_i - u_{i-1})$ , anti-difuzivni protok,  $\psi_i$ , limiter protoka,  $\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ . Vrijednost limitera protoka određuje se na temelju iznosa gradijenta transportirane variable, koji se određuje kao omjer razlika predstojećih i prethodnih rješenja varijable:

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}. \quad (3.31)$$

Ovisnost vrijednosti  $\psi_i$  o veličini  $R_i$  ograničena je izrazom iz [45] koji za vrijednost funkcije  $\psi(R)$  propisuje odnos:

$$0 \leq \left(\frac{\psi(r)}{r}, \psi(r)\right) \leq 2. \quad (3.32)$$

Na ovaj se način može postići "Total-variation-diminishing" (TVD) shema. Osim gornjeg općenitog uvjeta, ova metoda ne smije utjecati na linearna rješenja, drugim rječima mora vrijediti da je  $\psi(1) = 1$ . Osim toga, funkcija  $\psi(r)$  mora zadovoljavati uvjet simetrije, izražen odnosom:

$$\frac{\psi(r)}{r} = \psi\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.33)$$

Za negativne vrijednosti koeficijenta  $r_i$  limiter mora biti jednak nuli, obzirom da je u tom slučaju najveća vrijednost funkcije upravo u promatranoj ćeliji.

## Limiteri gradijenta

Učinak limitera gradijenta potpuno je isti kao kao učinak limitera protoka. Razlika je u tome što limiter gradijenta pruža mogućnost jednostavnije numeričke implementacije. Naime numerički proračuni u metodama kontrolnih volumena često su takvog oblika da su vrijednosti varijabli na površinama kontrolnih volumena (nužne zbog integralnog karaktera metode) dobivaju pomoću prosječnih vrijedosti varijabli za centre susjednih ćelija. Vrijednosti primjerice brzine na lijevom (indeks L) i desnom (indeks D) licu kontrolnih volumena (kod jednodimenzionalne mreže) računaju

se kao [47]:

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^L &= u_i + \frac{1}{2}\phi(r_i)(u_{i+1} - u_{i-1})/2, \\ u_{i-1/2}^R &= u_i - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{r_i}\right)(u_{i+1} - u_{i-1})/2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

gdje je  $\phi(r)$  limiter gradijenta, koji se prema imiteru protoka  $\psi(R)$  odnosi prema izrazu:

$$\psi(r) = \phi(r)\frac{r+1}{2}. \quad (3.35)$$

Limiteri gradijenta također moraju zadovoljiti uvjet simetrije, koji za njih glasi:

$$\phi(r) = \phi\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.36)$$

Barth-Jaspersenov limiter gradijenta je konstantan po dijelovima definiran kao:

$$\phi_{BJ}(r) = \min \left\{ 1, \frac{4}{r+1}, \frac{4r}{r+1} \right\}. \quad (3.37)$$

Barth-Jaspersenov limiter gradijenta korišten je u radu.

### 3.1.4. Aproksimacija vremenskog člana

Postoji mnogo metoda aproksimacije rješenja koje se koriste danas u numerici. Razvijene su za različite stupnjeve točnosti. U kodu korištenom u radu koristi se metoda Runge-Kutte koja je četvrtog reda točnosti. Njom se aproksimiraju nestacionarni članovi sve tri diferencijalne jednažbe modela. U nastavku slijedi kratki pregled metode. Detalji se mogu pronaći u [48]. Za diferencijalne jednažbe modela strujanja mora postojati polje tlaka, brzine i temperature zadano u početnom trenutku da bi se mogle riješiti. Zadano je dakle:

$$\phi' = f(\rho, t), \quad \phi(\rho, 0) = \phi_0 \quad (3.38)$$

gdje  $\phi$  predstavlja veličinu koju se aproksimira. Potrebno je odrediti još i vremenski korak  $\Delta t$ . "Klasična" Runge-Kutta metoda se eksplicitno provodi po proceduri:

$$\begin{aligned}\phi^n &= \phi^o + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(\rho, t), \\ k_2 &= f\left(\rho + \frac{\Delta t}{2}k_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(\rho + \frac{\Delta t}{2}k_2, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &= f(\rho + \Delta tk_3, t + \Delta t).\end{aligned}\tag{3.39}$$

Ovdje  $\phi^n$  je zapravo  $\phi(t^n)$  te se određuje pomoću vrijednosti iz starog vremenskog koraka  $\phi^o$  uz dodatak četiri inkrementa. Inkrementima je dan različit značaj preko koeficijenta koji stoji ispred svakog od njih.

### Modificirana, nisko memorijska Runge-Kutta metoda

U svom izvornom obliku Runge-Kutta metoda nije numerički efikasna, jer zahtjeva  $m \times N$  memorijskih lokacija, gdje je  $m$  broj stupnja metode, dok je  $N$  broj nepoznanica, odnosno broj običnih diferencijalnih jednadžbi [49]. Modificirane metode (eng. "Low Storage Runge-Kutta methods") omogućuju redukciju potrebne memorije tako da je zahtjevani broj lokacija samo  $2 \times N$ . Ove metode koriste koeficijente koji se razlikuju od metode do metoda. Algebarski odnosi među koeficijentima dopuštaju da se u memoriju spremaju samo dva prethodna rješenja aproksimacije. Općeniti izrazi za nisko memorijske Runge-Kutta metode glase:

$$y_i = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^{j-1} a_{ij} F(t^n + c_j \Delta t, y_i), u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^m b_j F(t^n + c_j \Delta t, y_i), \tag{3.40}$$

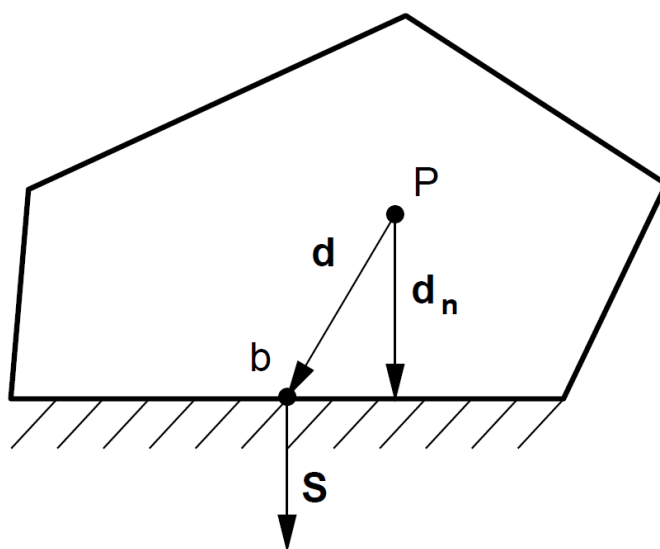
gdje su  $a_{ij}$ ,  $b_j$  i  $c_j$  Butcherovi koeficijenti [49], koji se razlikuju ovisno o metodi.  $u^{n+1}$  je rješenje slijedećeg vremenskog koraka, dok je  $y_i$  aproksimacijsko rješenje i-tog koraka. Ove metode se zasnivaju na činjenici da zbroj prethodnih aproksimacijskih rješenja, pomnožen sa koeficijentima na pravilan način, daje aproksimacijsko rješenje sljedećeg koraka.

## 3.2. Rubni uvjeti

Problem kontinuuma nije do kraja definiran ako nisu zadani početni i rubni uvjeti. Postoji mnogo oblika rubnih uvjeta ali većina se dijeli na dva glavna tipa rubnih uvjeta:

**Dirichletov** rubni uvjet propisuje vrijednost zavisne varijable na rubovima domene.

**Generalizirani von Neumannov** rubni uvjet propisuje iznos gradijenta varijable u smjeru normale na površinu ruba domene.



Slika 3.1: Parametri diskretizacije u metodi kontrolnih volumena za kontrolne volumene na granicama domene [50].

Na slici 3.1 su prikazani parametri važni za objašnjenje rubnih uvjeta.  $P$  označuje središte promatranog kontrolnog volumena kojemu se jedna stranica poklapa s granicom domene. Stranica na granici domene je označena s  $b$ , a vektor između središta volumena  $P$  i središta stranice  $b$  označen je s  $\mathbf{d}$ . Normala vektora  $\mathbf{d}$  na stranicu označena je s  $\mathbf{d}_n$ . U nastavku se objašnjava numerička implementacija Dirichletovih i von Neumannovih rubnih uvjeta prema [50]

**Fiksna vrijednost** definira se na rubu domene  $\phi_B$ , dakle:

- Zamjenjuje se u slučajevima kada diskretizacija zahtjeva vrijednost na rubnoj stranici, to jest da je  $\phi_f = \phi_B$  kod, na primjer, konveksijskog člana.
- U slučajevima gdje se traži gradijent na stranici  $\nabla_f \phi$ , kod, na primjer difuzijskog člana, računa se pomoću vrijednosti na stranici ruba domena i vrijednosti



u središtu kontrolnog volumena kojemu pripada [50]

$$\mathbf{S} \cdot \nabla_f \phi = |\mathbf{S}| \frac{\phi_b - \phi_P}{|\mathbf{d}_n|}. \quad (3.41)$$

Ovim tretmanom rubnih uvjeta postiže se drugi red točnosti, ako je vrijednost  $\phi_B$  konstantna duž cijele stranice domene, a samo prvog reda točnosti ako vrijednost varira na cijeloj rubnoj stranici i ako je mreža neortogonalna.

**Fiksni gradijent** je rubni uvjet gradijenta u smjeru normale  $g_B = \nabla_f^\perp \phi$  na rubu, dakle:

- Kada diskretizacija zahtjeva vrijednost  $\phi_f$  na rubnoj površini, vrijednost u centru kontrolnog volumena se ekstrapolira na slijedeći način:

$$\phi_f = \phi_P + \mathbf{d}_n \cdot \nabla_f \phi \quad (3.42)$$

$$= \phi_P + |\mathbf{d}_n| g_B \quad (3.43)$$

- $g_B$  se može direktno zamijeniti u slučajevima gdje diskretizacija zahtjeva procjenu gradijenta na površini

$$\mathbf{S} \cdot \nabla_f \phi = |\mathbf{S}| g_B \quad (3.44)$$

Diskretizacijske metode za fiksni gradijent su drugog reda točnosti ako je  $g_B$  konstantan duž površine ruba. Postaju prvog reda točnosti ako  $\phi_B$  varira duž površine i ako je mreža neortogonalna. U posljednjem slučaju  $\mathbf{d}_n$  uglavnom ne pokazuje u središte rubne površine.

**Nulti gradijent** je podvrsta rubnog uvjeta fiksnog gradijenta kojemu je  $g_B = 0$  te vrijedi sve kao i za rubni uvjet fiksnog gradijenta.

U ovom poglavlju su iznesene glavne numeričke metode kojima se rješava matematički opis strujanja fluida. Iznesene su metode diskretizacije, interpolacije i aproksimacije te aritmetičke jednadžbe koje se rješavaju. Ukratko je objašnjen pristup aproksimacije rješenja u novom vremenskom koraku korišten u novom kodu te su dane karakteristike ovog pristupa. U slijedećem poglavlju bit će izneseni slučajevi kojima je svrha validacija novog koda u odnosu na druge kodove i gdje je dostupno eksperimente.

## 4. Validacija koda

U prethodnom poglavlju su izneseni glavni numerički postupci koje koristi novi kod. U ovom poglavlju će se napraviti pregled proračunatih validacijskih slučajeva. Bit će izneseni dobiveni rezultati u vidu polja brzina, tlakova, gustoće, temperature i parametara turbulencije. Rezultati će biti uspoređeni s rezultatima istih slučajeva u literaturi i dan komentar na kvalitetu rezultata provedenih simulacija.

Svi slučajevi su proračunati korištenjem verzije koda koji koristi Navier-Stokesove jednačbe. Također, u svim se slučajevima koristio  $k - \omega SST$  model turbulencije, osim kod interakcije udarnog vala i graničnog sloja.

### 4.1. Seinerova mlaznica

Mlaznice su vrlo prisutne u industriji i tehnologiji jer omogućavaju ubrzavanje toka fluida na vrlo visoke brzine. Jedna od najčešćih primjena mlaznica je propulzija za avione i rakete. Osim toga, pojavljuju se još i u industriji čelika za proces dekarbonizacije. Postoje tri glavna tipa mlaznica:

- konvergentna,
- divergentna,
- konvergentno-divergentna ili de Lavalova.

Konvergentno-divergentna ili skraćeno kon-di mlaznica se koristi za ubrzavanje struje fluida do nadzvučnih brzina. Na najužem presjeku se ostvaruje maksimalna brzina od  $Ma = 1$  uz dovoljno visok tlak na ulazu, te se to stanje naziva zagušeni tok. Iza toga, dolazi do ekspanzije zbog proširenja mlaznice u kojoj se tlak smanjuje, a fluid ubrzava. Ovo je prikazano slikama 4.7 i 4.8. Na jednoj takvoj mlaznici Seiner je proveo ispitivanje te opisao eksperiment u [51]. Taj eksperiment je poslužio kao podloga za izradu simulacije u NPARC-u. U ovom radu služi kao vrlo dobar validacijski slučaj.

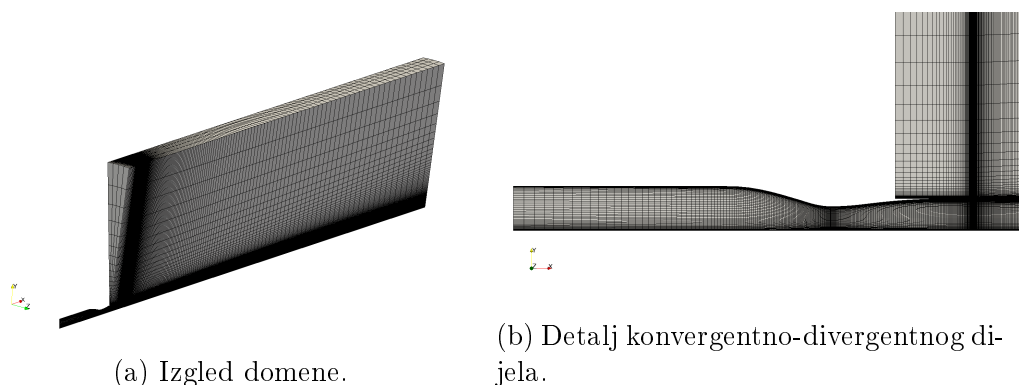
Fluid koji se simuliralo je zrak čija su svojstva prikazana u tablici 4.1 i nisu funkcija tlaka i temperature. Specifičnost ove simulacije je povišena temperatura zraka na ulazu čiji je iznos  $T_0 = 313.14$  K. U literaturi su opisani pokusi i pri znatno višim temperaturama što bi moglo poslužiti za daljnju validaciju koda.

Tablica 4.1: Tablični prikaz svojstava zraka korištenih u simulaciji.

Svojstva zraka	
$M = 28.9 \text{ kg/kmol}$	molarna masa
$C_p = 1007 \text{ J/kg K}$	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$\mu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$	dinamička viskoznost
$Pr = 0.7$	Prandtlov broj
$\gamma = 1.4$	izentropski koeficijent ekspanzije

#### 4.1.1. Računalna mreža

Geometrija i mreža je preuzeta s [52]. Pretpostavlja se osnosimetrično strujanje te se zbog toga radi "wedge" geometrija s kutem od  $5^\circ$ . Mreža je strukturirana i sastoji se od 223120 heksagonalnih kontrolnih volumena. Izgled domene i detalj konvergentno-divergentne mlaznice prikazan je na slici 4.1.

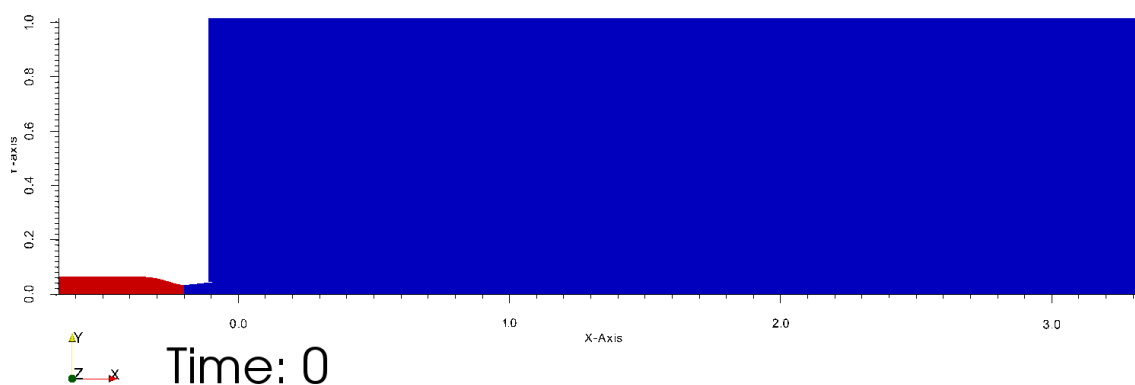


Slika 4.1: Prikaz računalne mreže Seinerove mlaznice.

Izlazni presjek mlaznice ima promjer  $d_{ml} = 91.44 \text{ mm}$ .

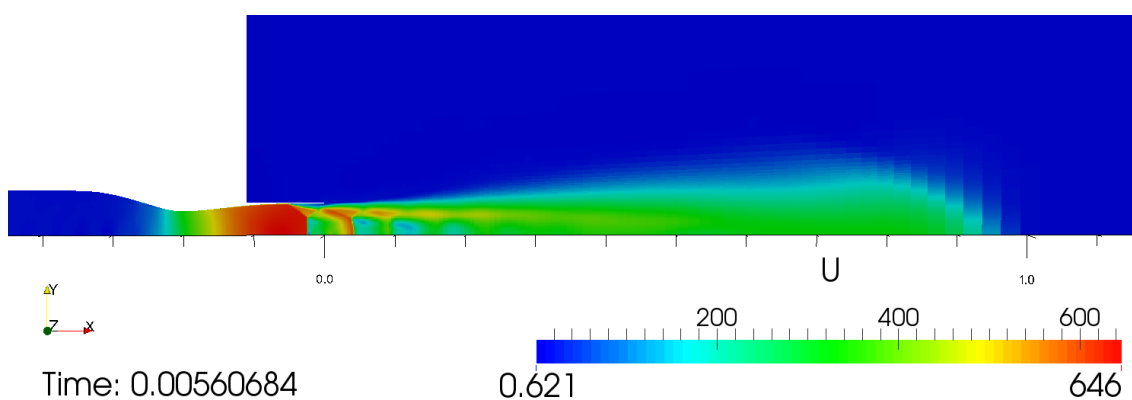
#### 4.1.2. Rubni i početni uvjeti

Rubni i početni uvjeti simulacije imitiraju one iznesene na [52]. Zadani su totalni tlak i temperatura na ulazu te se tim istim parametrima inicijaliziralo polje u cijevi i do grla mlaznice kako je prikazano na slici 4.2. Totalni tlak iznosi  $p_0 = 793034 \text{ Pa}$  i totalna temperatura  $T_0 = 313.14 \text{ K}$ . Brzina je u cijeloj domeni inicijalizirana s iznosom od  $Ma = 0.01$  što izraženo u m/s iznosi  $u_{init} = 3.5 \text{ m/s}$ . Cijev i stijenka mlaznice su postavljeni kao `noSlip` rubni uvjet. Na granici iznad mlaznice, postavljen je uvjet totalnog tlaka u iznosu  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  te na taj način imitira uvjete atmosfere. Totalna temperatura je postavljena na iznos od  $T_0 = 294.4 \text{ K}$ .

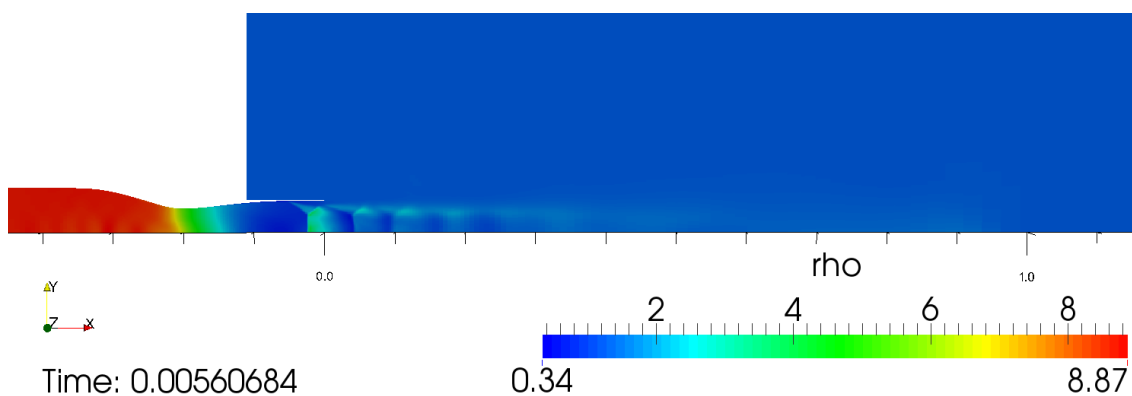


Slika 4.2: Inicijalizirano polje totalnih veličina na ulazu.

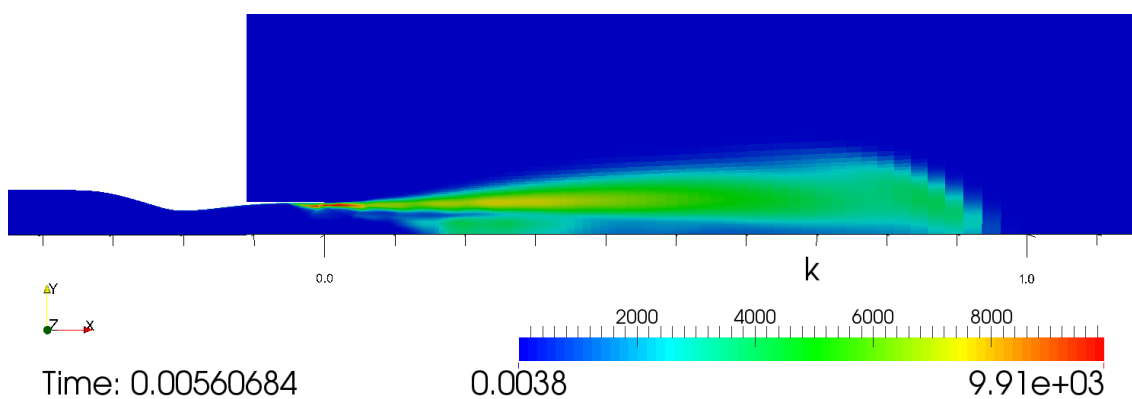
Ova simulacija je računalno vrlo zahtjeva te nije proračunata do stacionarnog stanja. Za to bi bilo potrebno računalno s nekoliko desetaka jezgri zbog malih vremenskih koraka koji se koriste. Proračunsko vrijeme do trenutka prikazanog na slikama 4.3, 4.4 i 4.5 iznosilo je  $\approx 244$  h na IntelCore i7 quad core procesoru takta 3.5 GHz.



Slika 4.3: Polje brzine u mlaznici.



Slika 4.4: Polje gustoće u mlaznici.



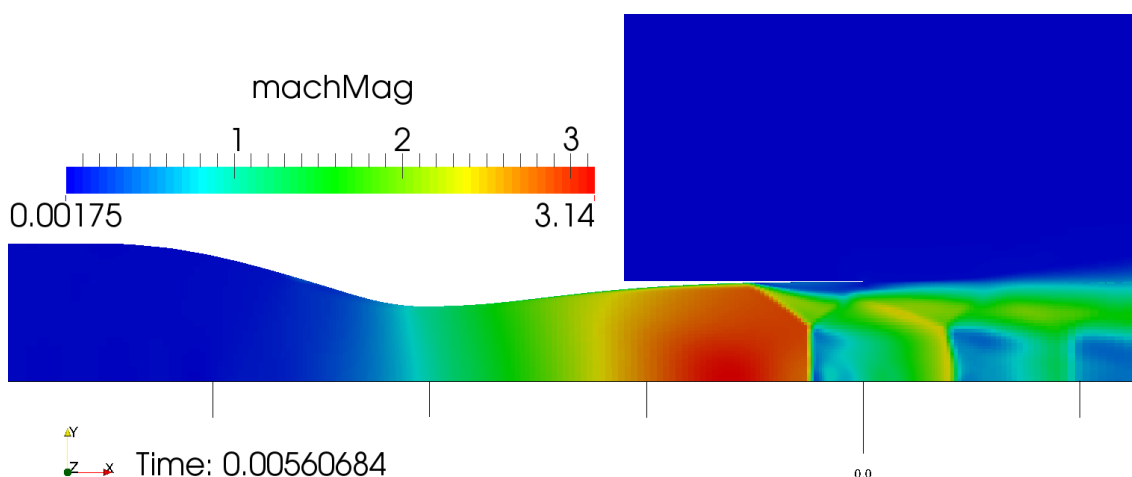
Slika 4.5: Polje turbulentne kinetičke energije.

Međutim, iako nije priveden kraju, proračun je dao fizikalno dobre rezultate. Postoje snimke eksperimenata s mlaznicama koje pokazuju slične rezultate. To se najčešće događa kod mlaznih motora. Jedan takav je prikazan na slici 4.6 preuzet sa [53] gdje se vide formacije udarnih valova postignute simulacijom.

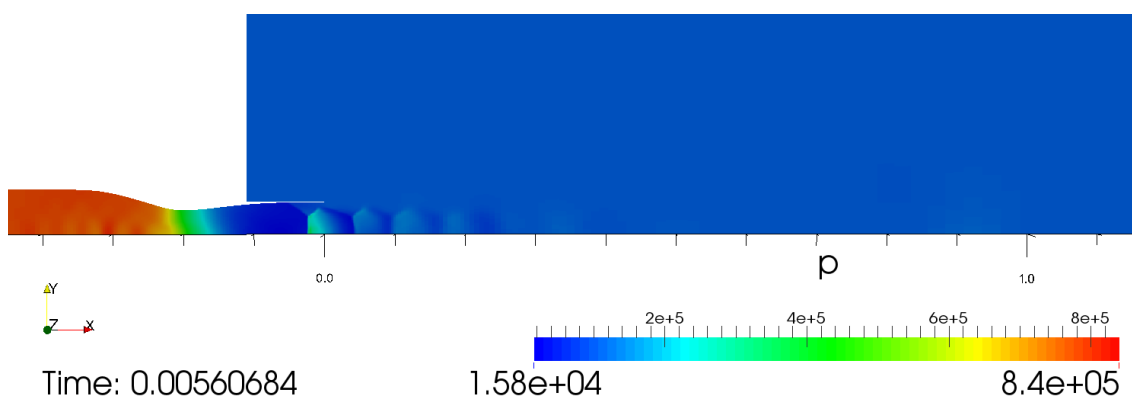


Slika 4.6: Oblik "dijamanata" na izlazu iz mlaznog motora [53].

Potvrda fizikalnosti rezultata je i brzina od  $Ma = 1$  u grlu mlaznice što je prikazano slikom 4.7.

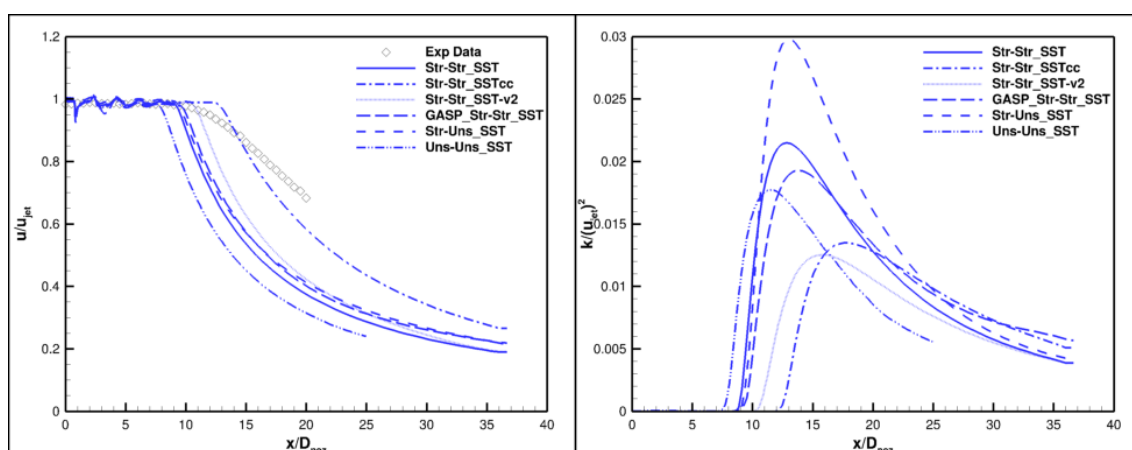


Slika 4.7: Prikaz Machovog broja u grlu mlaznice.



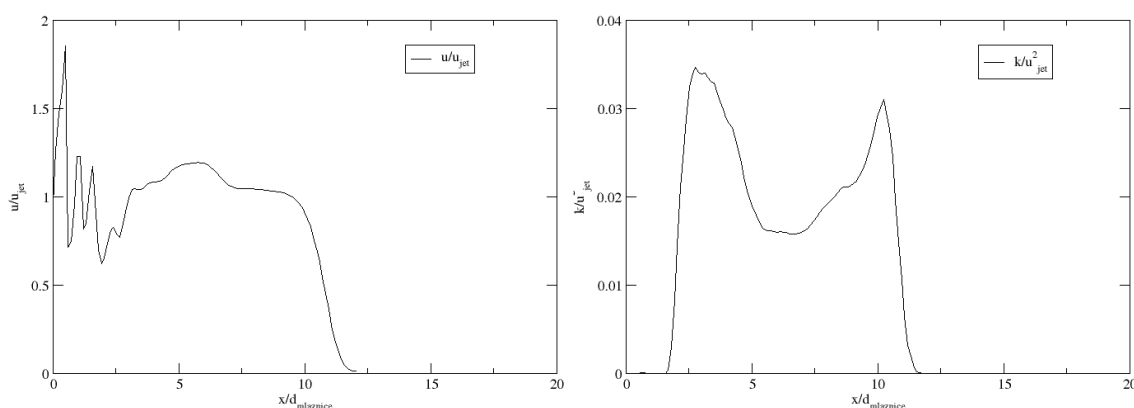
Slika 4.8: Polje tlaka u mlaznici.

U [52] prikazani su grafovi normalizirane brzine i turbulentne kinetičke energije u osi simetrije. Za normalizaciju se koristila brzina u osi simetrije na izlaznom presjeku mlaznice. Koordinatna os je u bezdimenzijskom obliku gdje je referentna vrijednost promjer mlaznice. Na slici 4.9 prikazani su rezultati NASA-e [52] za različite  $k - \omega$  SST modele turbulencije te experimentalne podatke. Referentna krivulja za ovaj rad je označena Str-Uns SST gdje Str-Uns označava mrežu korištenu u ovom radu, a SST odgovarajući model turbulencije.



Slika 4.9: Normalizirana brzina i turbulentna kinetička energija u osi simetrije iz NASA [52].

Djelomično poklapanje rezultata postoji na grafu normalizirane brzine. Slike 4.10a i 4.10b prikazuju rezultate simulacije.



(a) Normalizirana brzina u osi simetrije. (b) Normalizirana turbulentna kinetička energija u osi simetrije.

Slika 4.10: Grafovi normalizirane brzine i turbulentne kinetičke energije dobiveni simulacijom.

Kako rješenje nije postiglo stacionarno stanje teško je donositi konačne zaključke, međutim, usporedbom rezultata eksperimenta na lijevom grafu slike 4.9 i 4.10a vidi se sličan oblik krivulje što ukazuje na mogućnost postizanja dobrog poklapanja. Za potvrdu podudaranja rezultata, potrebno je proračunati ovaj slučaj do uspostave stacionarnog stanja.

Ovaj slučaj može poslužiti kao slučaj za testiranje uspješnosti akceleracije koda. Trebalo bi ubrzati proračunsko vrijeme što je više moguće, a neki okvir bi bio pete-

rostruko kraće vrijeme. Trebalo bi provjeriti koliko je to moguće s danas dostupnim metodama poput "pseudo-time stepping", "dual time stepping", "multigrid" i slično.

## 4.2. MADIC 2D osnosimetrična mlaznica

Ovaj slučaj je opisao Slater u [54], a simulacija je eksperimenta u zračnom tunelu opisanog u [55]. MADIC je skraćenica za: "Multidisciplinary and Design Industrial Consortium". Simulira se model mlaznog motora u zračnom tunelu i ispituje njegova učinkovitost.

Na ovom slučaju je izrađena studija profinjenja mreže u dvije razine finoće te je na ovom primjeru pokazana razlika u rezultatima i vremenu proračuna između DB i PB rješavača. Osim što koriste drukčiju glavnu varijablu ova dva rješavača se razlikuju po tome što je PB stacionarni implicitni za razliku od eksplicitnog tranzijentnog DB rješavača.

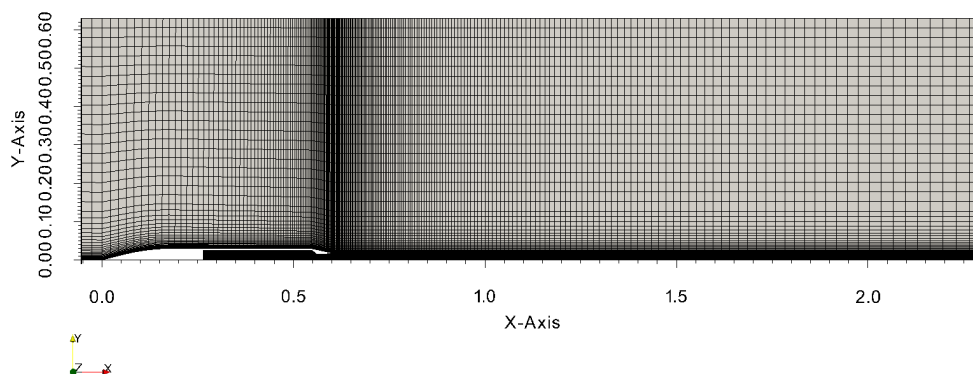
Fluid koji je simuliran odgovara svojstvima zraka čiji su parametri prikazani u tablici 4.1.

Proračuni su rađeni na IntelCore i7 procesoru takta 3.7 GHz s 16 GB radne memorije.

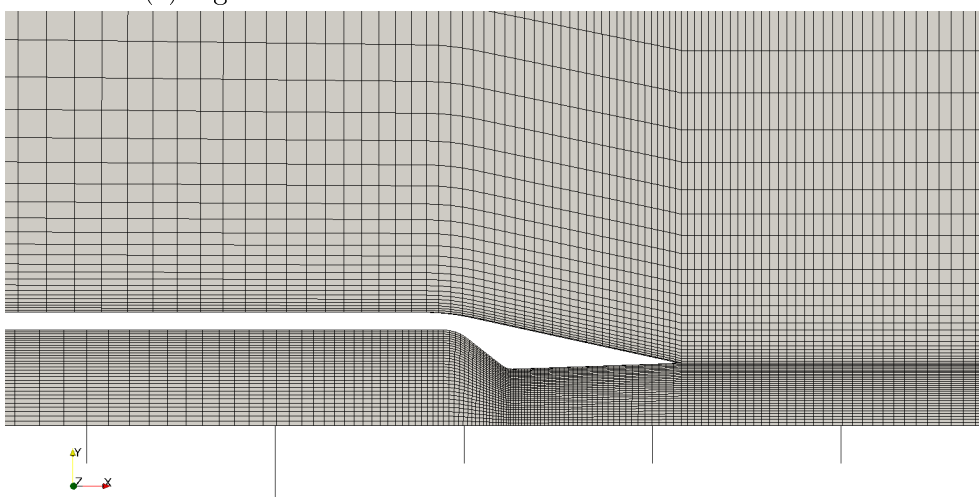
### 4.2.1. Računalna mreža

U ovo će slučaju biti pokazana razlika u rezultatima novog koda i PB stacionarnog koda. Na slici 4.11a prikazan je izgled domene. Ishodište koordinatnog sustava se nalazi na vrhu mlaznog motora. Vidljivo je da se mlazni motor nalazi tik do ulaza u domenu. Na slici 4.11b je prikazan detalj geometrije mlaznice koja je konvergentno-divergentnog tipa. Prikaz se odnosi na grublju verziju mreže.





(a) Izgled domene.



(b) Detalj konvergentno-divergentne mlaznice.

Slika 4.11: Prikaz dvodimenzijske računalne mreže iz projekta MADIC.

Mreža je strukturirana i svi kontrolni volumeni, za obje gustoće mreže su heksagonalni. Ova mreža nije pokazala znakove "carbuncle" efekta.

Podatci o broju kontrolnih volumena i odnosu maksimalnog Courantovog broja i veličine vremenskog koraka ostvarenog tokom simulacije daje se u tablici 4.2

Tablica 4.2: Usporedni prikaz glavnih parametara mreža.

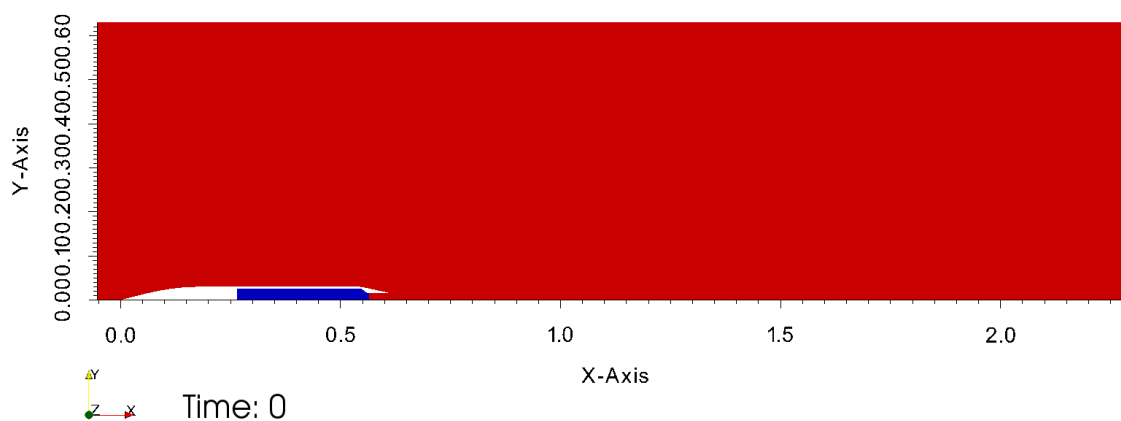
<i>Finoća mreže</i>	<i>Broj kontrolnih volumena</i>	$Co_{max}$	$\Delta t_{Co_{max}}$
Gruba	18090	0.4	$6.5 \cdot 10^{-7}$
Fina	72360	0.3	$2 \cdot 10^{-7}$

Iz gornje tablice vidi se da grublja mreža daje mogućnost korištenja većeg Courantovog broja što omogućava veću brzinu proračuna.

#### 4.2.2. Rubni i početni uvjeti

Za definiciju rubnih uvjeta podzvučnih kompresibilnih strujanja, dovoljno je zadati totalni tlak i temperaturu na ulazu u domenu i statički tlak na izlazu [56]. Kod supersoničnih strujanja a ulazu se zadaju totalne veličine i brzina, a na izlazu su vrijednosti dio rješenja.

Stranica domene koja se poklapa s osi simetrije je zadana kao `symmetry` za sve veličine. U ovom slučaju postoje dva ulaza u domenu, a to su ulaz slobodne struje zraka iznad motora i ulaz koji simulira tok kroz mlaznicu. Za oba ruba zadaju se totalni tlak i temperatura. Temperatura je za oba ulaza jednaka te iznosi  $T_0 = 328.89$  K. Na izlazu iz domene, temperatura se ne zadaje, a na preostalim rubovima zadaje se kao nulti gradijent. Brzina nije zadana niti na jedno ulaznoj ili izlaznoj granici već je zadana kao `noSlip`, to jest da je na površini motora jednaka nuli. Na ulazu slobodne struje zraka, totalni tlak je zadan u iznosu od  $p_0 = 101422$  Pa, a totalni tlak na granici uzvodno od mlaznice je zadan u iznosu od  $p_0 = 99767$  Pa.

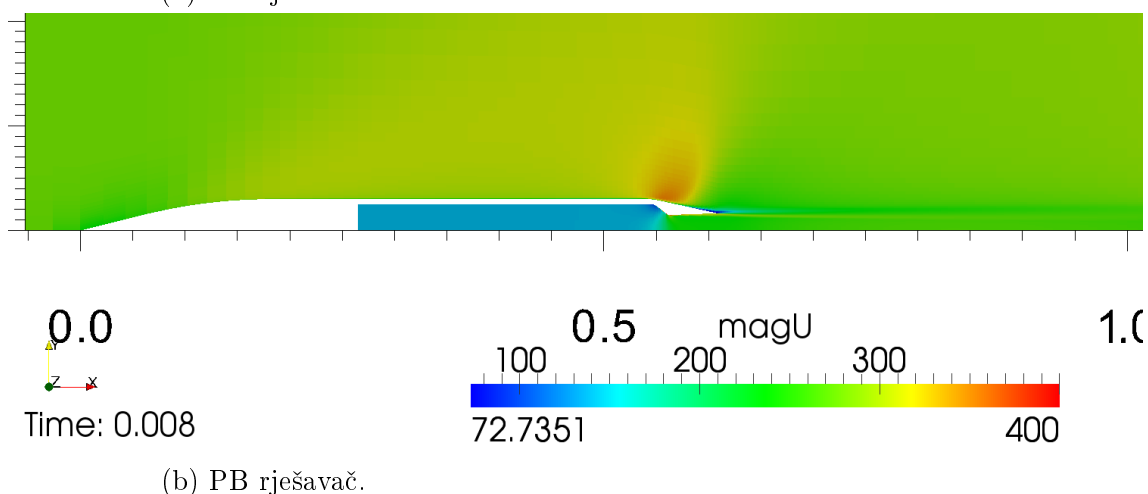
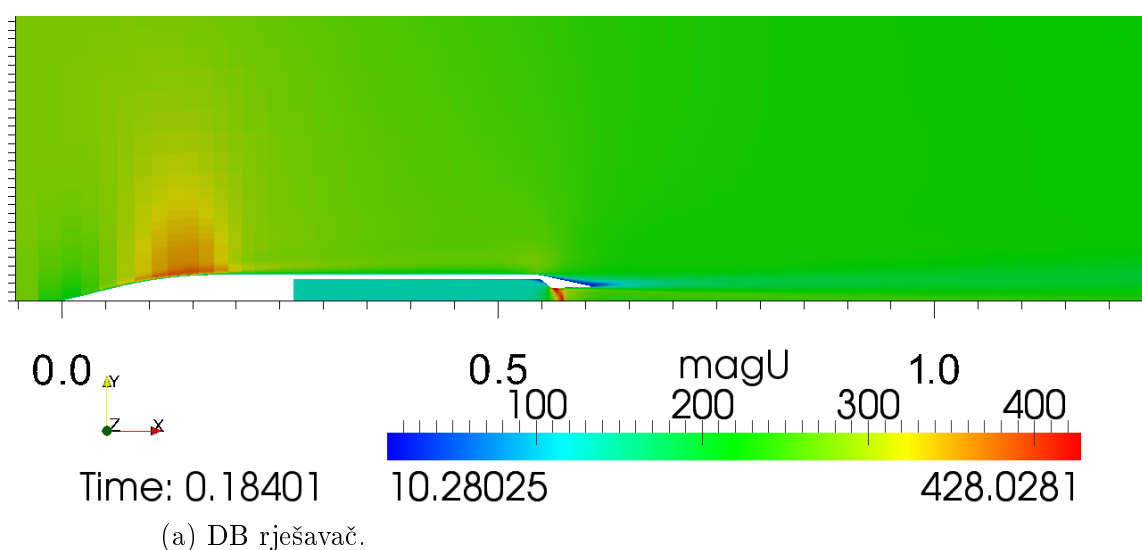


Slika 4.12: Prikaz inicijaliziranog polja tlaka i brzine.

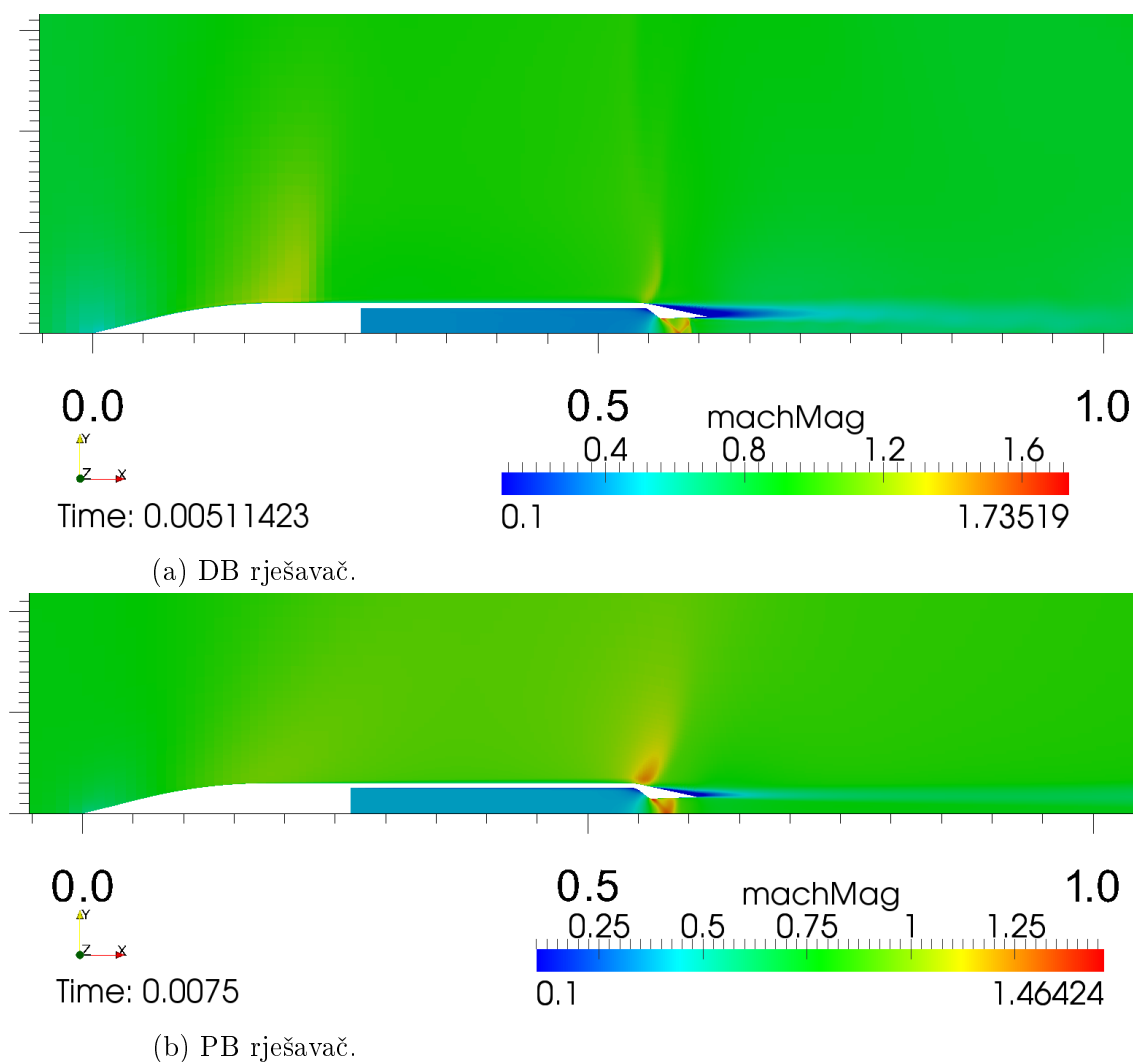
Polje tlaka i brzine za početni trenutak prikazano je slikom 4.12. Temperatura je jednaka u cijeloj domeni s jednakim iznosom kao i na ulaznim rubovima. Tlak je u većini domene zadan u iznosu  $p_{init} = 67000$  Pa, a uzvodno od grla mlaznice u iznosu  $p_{init} = 99767$  Pa, kao i na tom ulazu. Brzina je zadana u većini domene, izraženo u primitivnim varijablama,  $u_{init} = 290.95$  m/s ili kao Machov broj  $Ma = 0.8$ . Iz navedenih podataka dobije se Reynoldsov broj u iznosu  $Re = 1.222 \cdot 10^7$  prema

vertikalnoj dimenziji domene. U području uzvodno od grla mlaznice, brzina iznosi  $u_{init} = 36.3$  m/s ili  $Ma = 0.1$ . Na izlazu iz domene zadan je fiksni statički tlak s iznosom od  $p_{init} = 66500$  Pa. U svim slučajevima su rubni uvjeti i inicijalizacija polja jednaki.

Rezultati provedenih simulacija i rezultati prikazani u [54] i [57] nisu jednaki. Naime, postoji jedan vrlo kratki period kada se polje brzine u blizini motora i u mlaznici te koeficijent tlaka na krmi motora poklapaju barem kvalitativno. Trenutak u kojem se to dogodi nije jednak za istu gustoću mreže niti za isti rješavač. Također, dolazi do razlike u maksimalnim iznosima brzina strujanja između sva četiri slučaja. Ovo je prikazano slikama 4.13 i 4.14.



Slika 4.13: Prikaz djelomičnog poklapanja na gruboj mreži.



Slika 4.14: Prikaz trenutka djelomičnog poklapanja na finijoj mreži.

Razlog zbog kojega dolazi do razilaženja u rješenju nije u potpunosti jasan. Međutim, jasno je na koji se način razilaženje dogodi. Naime, nakon kratkog vremena stvori se val razrjeđenja odmah nakon pramca motora. To je uzrokovano naglim ubrzanjem zbog skretanja struje zraka koji nailazi na vrh mlaznog motora. Kada taj val dođe do krme, pretvori se u udarni val koji putuje nizvodno. Kada dođe do izlaza iz domene, za sobom povuče polje vrlo niskog tlaka koje nailazi na narinuti fiksni tlak, dvostruko većeg iznosa. Tu sve simulacija stanuje, jer uvjeti strujanja postanu nefizikalni.

Ovo nepoklapanje rezultata je motivacija za daljnje istraživanje razloga nepoklapanja te postizanje kvalitativno i kvantitativno točnih rezultata. Vidljiva je velika razlika u izgledima polja. Na slici 4.13a vidljiv je udarni val koji u vremenu titra, to jest seli se naprijed-nazad. To se događa vjerojatno zbog niže brzine strujanja zraka kroz domenu koju rješavač može izračunati zbog finoće mreže. U nekom kasnijem

vremenskom trenutku bi bilo za očekivati da propagira do kraja domene kao i u ostalim slučajevima.

Potrebno je pronaći način da se pojava udarnih valova u domeni izbjegne ili zaobiđe. Jedno od mogućih rješenja bilo bi staviti rubni uvjet koji propušta valove.

Jedna pozitivna posljedica ovog neslaganja je pojava udarnih valova koji se protežu od krme motora prema vrhu i izlazu domene. Također se javljaju kosi udarni valovi s odbijanjem u divergentnom dijelu mlaznice. Ove pojave su vrlo pogodne za prikazati razlike DB i PB rješavača.

### 4.2.3. Usporedba DB i PB rješavača

Glavni smisao ovoga slučaja je usporediti kvalitetu rezultata između DB i PB pristupa. Prije samih simulacija, bilo je za očekivati da će DB dati bolje rezultate, te da će PB pokazati razmazane udarne valove i možda na krivom mjestu.

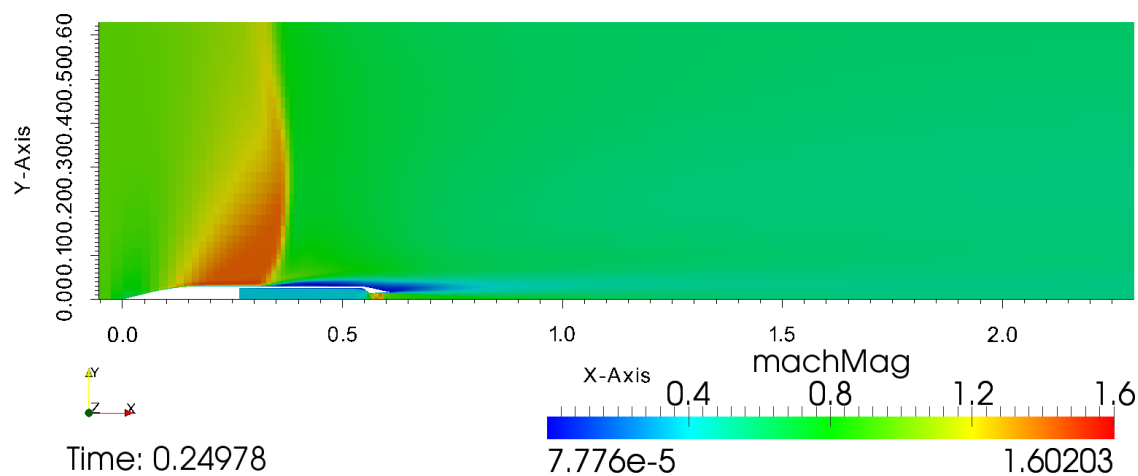
Prije predstavljanja samih rezultata, mogu se usporediti vremena trajanja proračuna. Ova usporedba donosi se u tablici 4.3.

Tablica 4.3: Usporedba vremena proračuna.

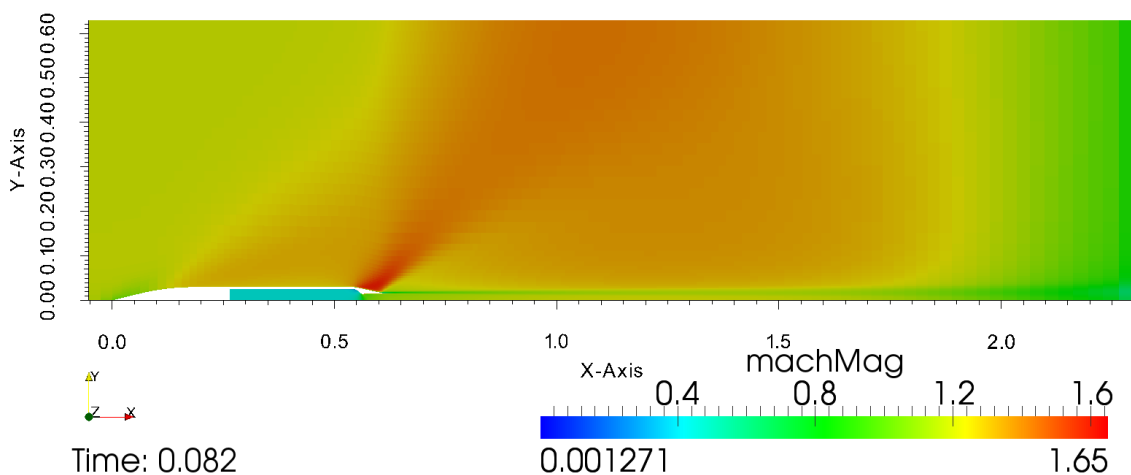
Mreže	Tip rješavača	$t_{sim}$ u s	$t_{calc}$ u h	Broj procesorskih jezgri	Co
Gruba	DB	0.25	14.7	1	0.4
	PB	0.085	1.5	1	
Fina	DB	0.076	19	4	0.3
	PB	0.176	1.4	4	

Vidljiva je velika razlika u vremenima proračuna. Vremena proračuna implicitnim PB rješavačem mogu biti cilj kojem bi se trebalo težiti i eventualno pokušati nadići u brzini proračuna.

Na slikama 4.15a i 4.15b vidi se usporedba rezultata DB i PB rješavača za grublju mrežu. Iako rezultat za DB rješavač nije došao do forme koje je trebao kao i ostali slučajevi, daje dobar temelj za usporedbu rezultata koje daju ova dva pristupa. Kod PB rješavača se vidi razmazanost rezultata te da nije uspio uhvatiti udarne valove u mlaznici dok DB rješavač je. Na slici 4.15a je prikazan trenutak u kojem udarni val propagira prema pramcu rakete, to jest povlači se. Nije ispitivana frekvencija nastanka i povlačenja udarnog vala jer nije relevantna za ovaj rad.



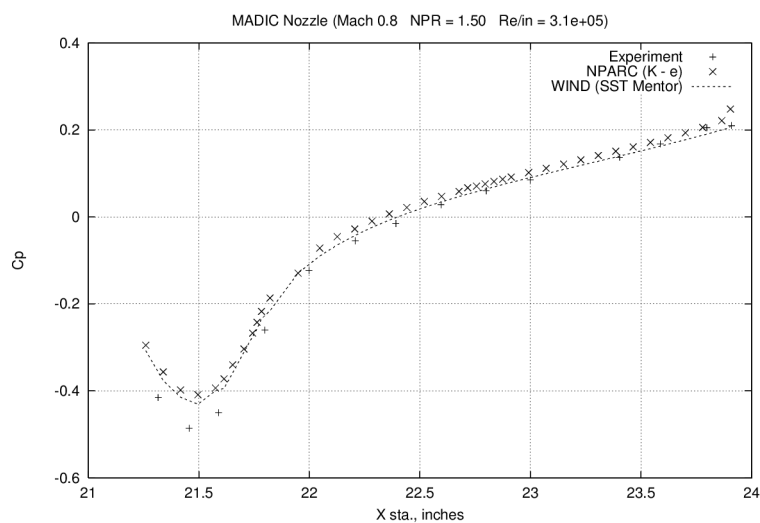
(a) DB rješavač.



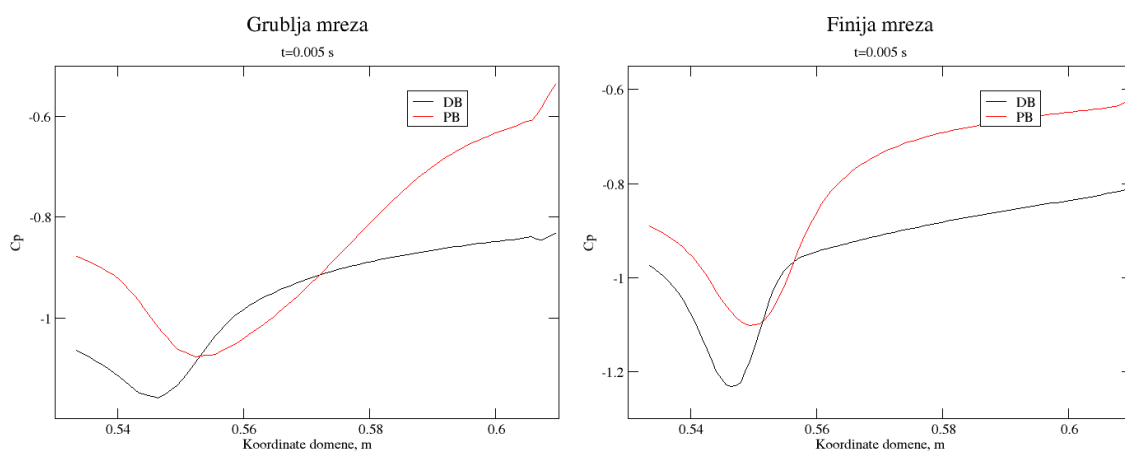
(b) PB rješavač.

Slika 4.15: Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na grubljoj mreži.

Na gornjim slikama prikazano je polje brzine izraženo Machovim brojem. Za usporedbu s rezultatima predstavjenim u [54] i [57] usporedilo se polje tlaka na krmi motora izraženo koeficijentom tlaka. Na slici 4.16 su prikazani rezultati simulacije NASA-e [54] u odnosu na eksperiment [55]. S tim rezultatima se uspoređuju rezultati simulacija za dva trenutka gdje postoji djelomično kvalitativno poklapanje rezultata te trenutak u kojem dolazi do razilaženja.



Slika 4.16: Rezultati NASA-e [54] za koeficijent tlaka na krmi motora.

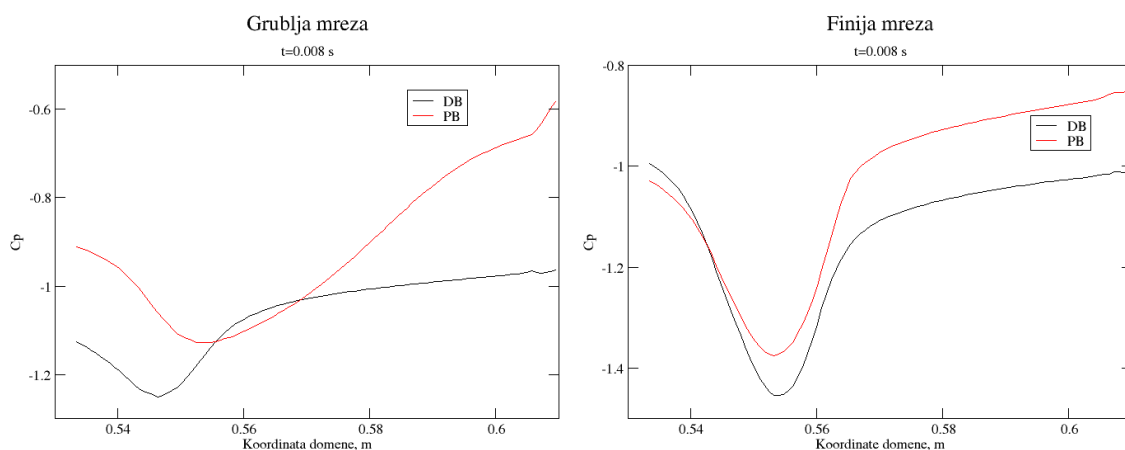


(a) Gruba mreža.

(b) Fina mreža.

Slika 4.17: Usporedba koeficijenta tlaka na krmi motora u vremenskom trenutku  $t = 0.005$  s grube i fine mreže.

Iz grafova na slikama 4.17a i 4.17b vidi se da DB rješavač dobro proračunava mjesto najnižeg tlaka. Na slici 4.16 mjesto najnižeg tlaka je na  $x(C_{p,min}) = 21.5$  " (inch) što odgovara  $x(C_{p,min}) = 0.5461$  m koje DB dobro pogađa. Rezultati PB rješavača su na krivom mjestu i krivulja nema kvalitativno poklapanje. Postoji razlika u iznosu koeficijenta tlaka, a tome može biti uzrok neodgovarajući profil strujanja.



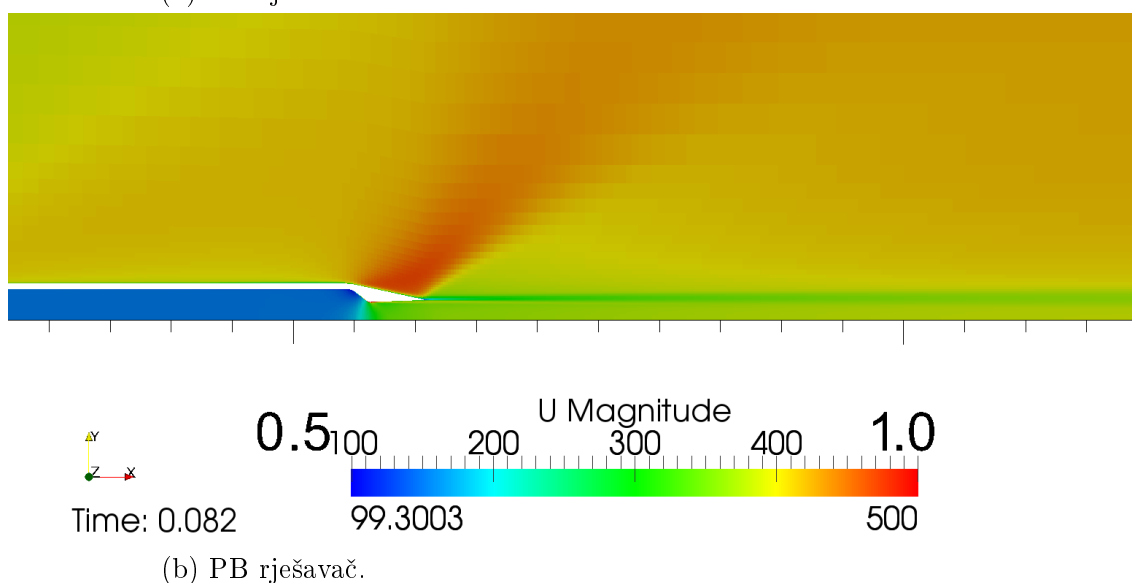
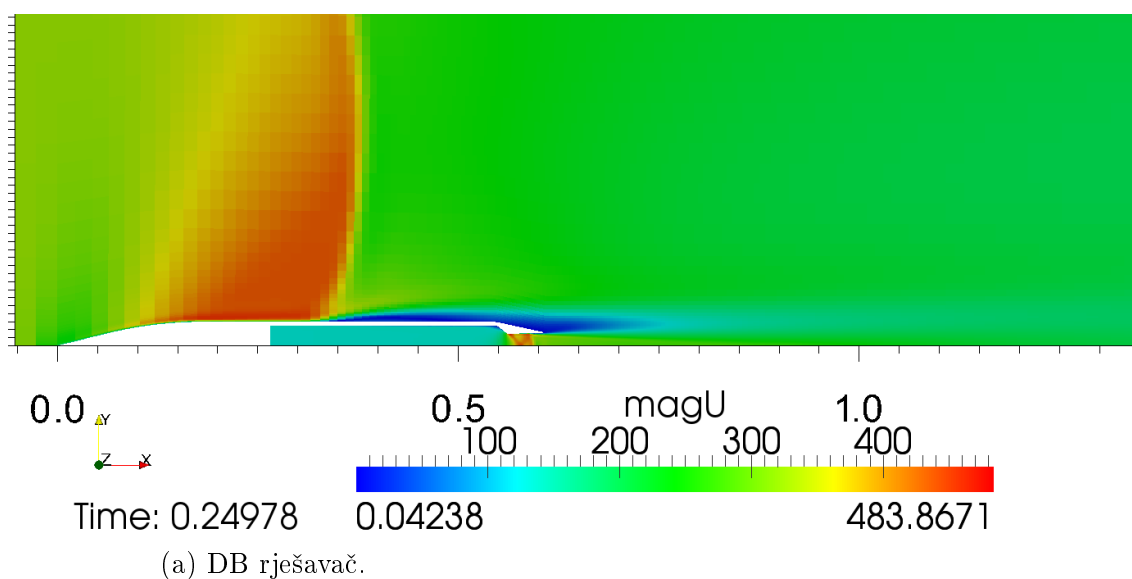
(a) Gruba mreža.

(b) Fina mreža.

Slika 4.18: Usporedba koeficijenta tlaka na krmi motora u vremenskom trenutku  $t = 0.008$  s grube i fine mreže.

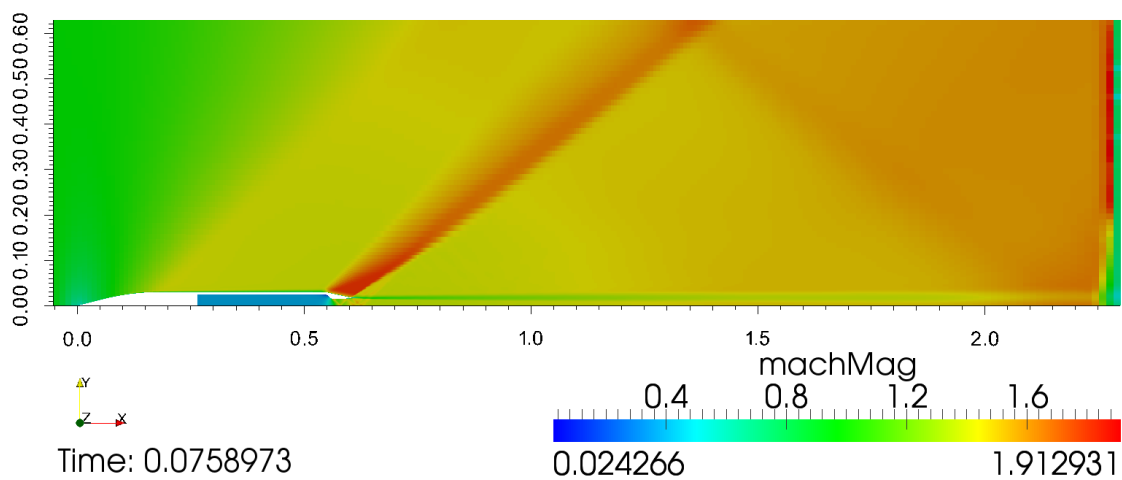
Na slikama 4.18a i 4.18b prikazan je trenutak kada rješenja simulacije počinju odstupati od referentnog [54]. Na finijoj mreži i DB solver sada ima polje niskog tlaka pomaknuto od traženog.



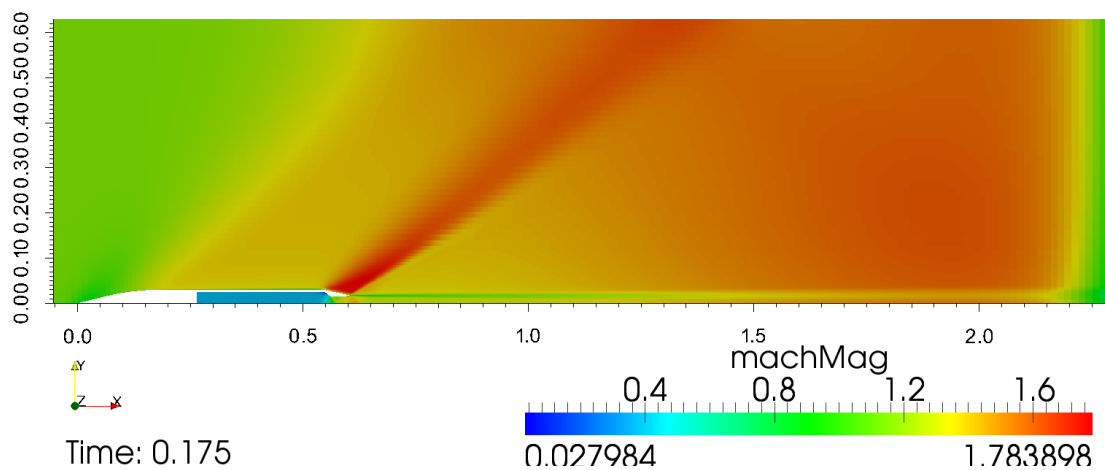


Slika 4.19: Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na grubljoj mreži, detalj mlaznice.

Slike 4.19a i 4.19b prikazuju detalj mlaznice na kojima je vidljiva velika razlika u prikazu stanja unutar mlaznice. DB pristup daje udarne valove dok ih kod PB pristupa uopće nema. Također val razrjeđenja koji putuje od krme motora je vrlo razmazan te se ne vidi refleksija nego samo difuzivno polje povišene brzine što je vrlo neprecizno. Na slikama 4.20a i 4.20b je prikazana usporedba rezultata za DB i PB rješavače na finijim mrežama. Prikazana je cijela domena kako bi se vidio udarni val na izlazu koji je posljedica nefizikalnih uvjeta strujanja. Također se može vidjeti razlika u prikazima vala razrjeđenja koji putuje od krme. Kod DB pristupa se vidi odbijanje tog vala dok kod PB pristupa se val toliko razmaže da se više ni ne vidi. Izgleda poput polja povišene brzine bez jasne granice.



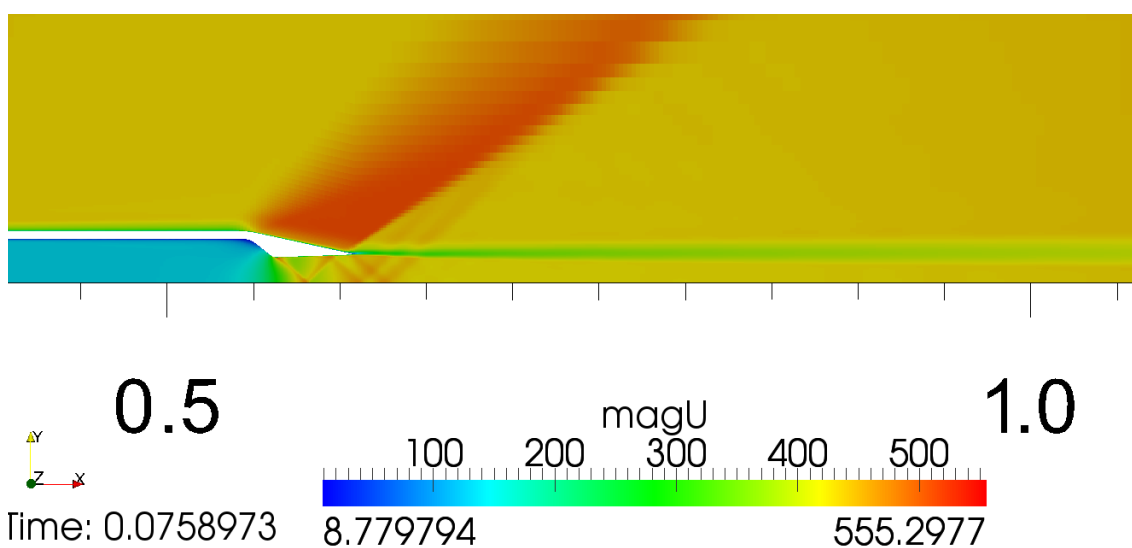
(a) DB rješavač.



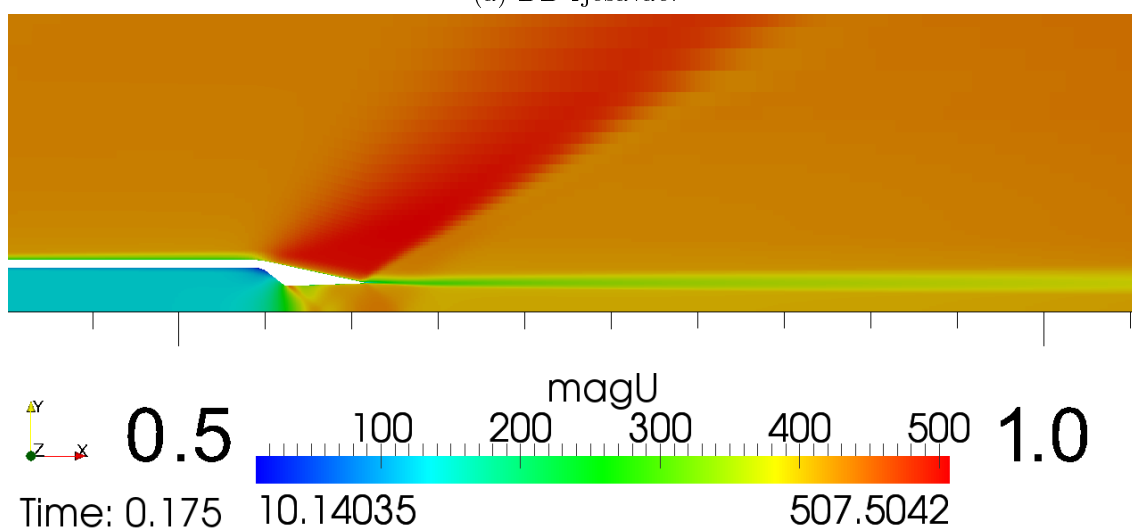
(b) PB rješavač.

Slika 4.20: Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na finijoj mreži.

Na slikama 4.21a i 4.21b su prikazani detalji strujanja u mlaznici gdje nastaju kosi udarni valovi. Vidljiva je znatna razlika između rezultata DB i PB rješavača. Dok DB jasno pokazuje kose udarne valove koji čine dobro poznati oblik dijamanata PB ne može prikazati nikakvu refleksiju.



(a) DB rješavač.



(b) PB rješavač.

Slika 4.21: Usporedba rezultata s naglaskom na udarnim valovima za različite rješavače na finijoj mreži, detalj mlaznice.

Vidljiva je znatna razlika u rezultatima. Globalni maksimumi i minimumi se ne poklapaju. Kod DB rješavača, osim kosih udarnih valova u mlaznici vide se i njihove refleksije te su valovi malih dimenzija. Kod PB rješavača vidi se udarni val, međutim, refleksije su praktički nevidljive, to jest vrlo su razmazane.

Ovime je potvrđena bolja kvaliteta rezultata DB pristupa spram PB pristupa. Slijedeći korak bi bio pronaći uzroke nepoklapanja rezultata s onima u referencama i ispraviti ga i opisati. Nadalje, trebalo bi usporediti različite rješavače Riemannovog problema jedne nasuprot drugih i nasuprot PB rješavača. Ovaj slučaj bi mogao biti dobra polazišna točka za daljnja istraživanja zbog kompleksne geometrije mlaznice

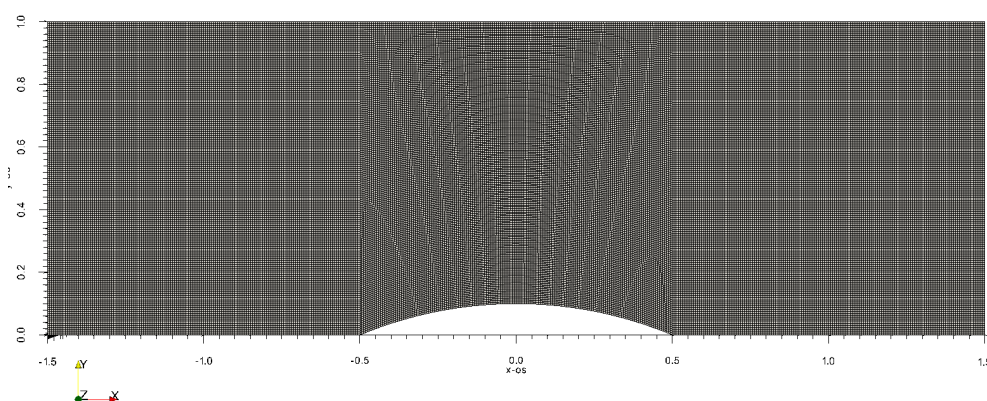
i dva različita ulaza u domenu.

### 4.3. Kružni isječak u zračnom tunelu

Ovo je jedan od jednostavnijih validacijskih slučajeva koji se često pojavljuje u literaturi. Često za transonična strujanja kada se proučava nastanak udarnog vala, ali i u supersoničnim strujanjima [58], [59]. U ovom radu će poslužiti za usporedbu različitih aproksimacijskih Riemannovih rješavača kod strujanja s Machovim brojem  $Ma = 1.8$ . Usporedba se vrši u odnosu na slučaj simulacije  $Ma = 1.4$  iz [58] uz napomenu da se nisu postigli istovjetni uvjeti strujanja zbog razlike u geometrijama i nedostatka vremena. Ideja članka [58] je bila postići strujanje u domeni da bude  $> Ma = 1$  kako bi se ostvarili slabi kosi udarni valovi. U ovom radu su postignuti jaki kosi valovi što znači da lokalno brzina pada ispod  $Ma = 1$ . Međutim, ovaj slučaj može poslužiti za usporedbu Riemannovih rješavača međusobno. Fluid u simulaciji je zrak s konstantnim termodinamičkim svojstvima kao u tablici 4.1.

#### 4.3.1. Računalna mreža

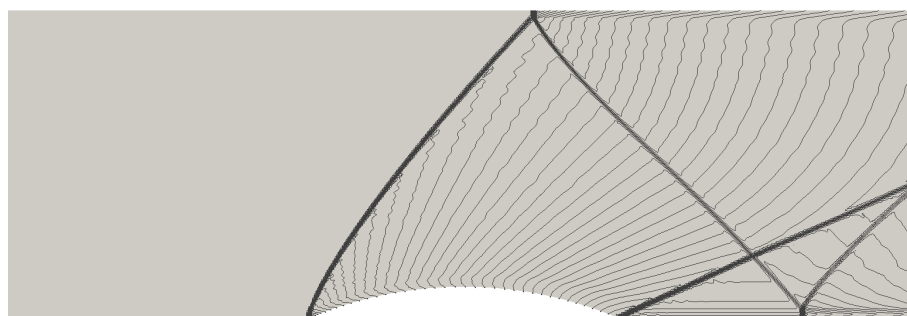
Mreža je jednostavne geometrije. Predstavlja zračni tunel u kojem se nalazi kružni isječak visine  $h = 0.1$  m. Slika 4.22 prikazuje geometriju i računalnu mrežu. Mreža je strukturirana sa 76800 heksagonalnih kontrolnih volumena.



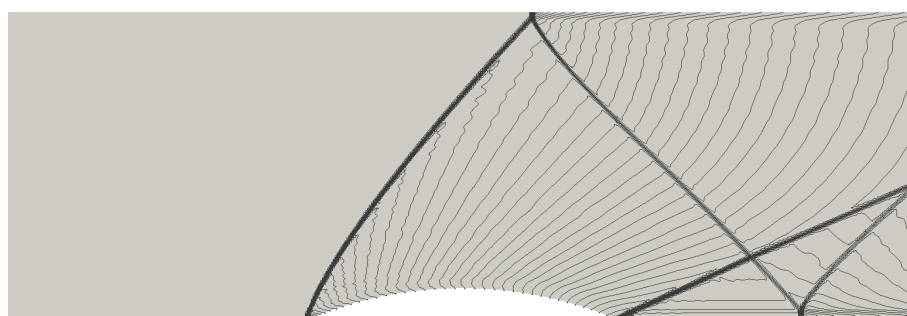
Slika 4.22: Računalna mreža tunela s kružnim isječkom.

### 4.3.2. Rubni i početni uvjeti

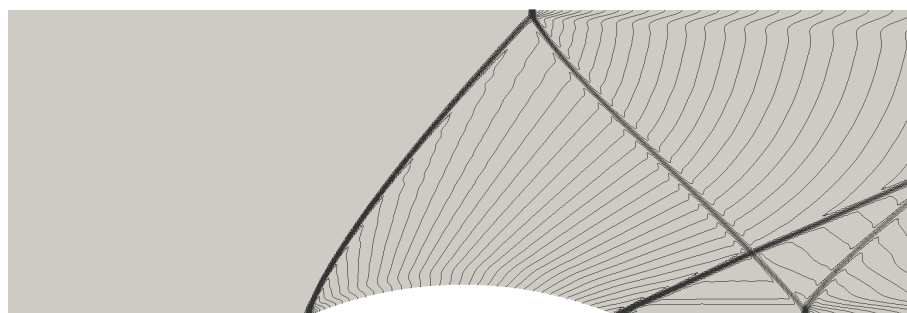
Rubni i početni uvjeti su vrlo jednostavni. Kako je nadzvučno strujanje u pitanju, na ulazu se zadaju tri varijable, a stanje na izlazu je dio rješenja. Zadane su konstantne vrijednosti tlaka, temperature i brzine to jest `fixedValue` za sve tri veličine. Njihovi iznosi su  $p = 350000$  Pa,  $T = 300$  K i brzina  $u = 625$  m/s što daje navedeni Machov broj od  $Ma = 1.8$ . Na izlazu je za sve tri veličine postavljen `zeroGradient` rubni uvjet. Kako bi se mogla pokazati raspodjela Machovog broja na zidu, na gornjem i donjem zidu je postavljen `slip` rubni uvjet.



(a) Roeov rješavač.



(b) HLLC rješavač.



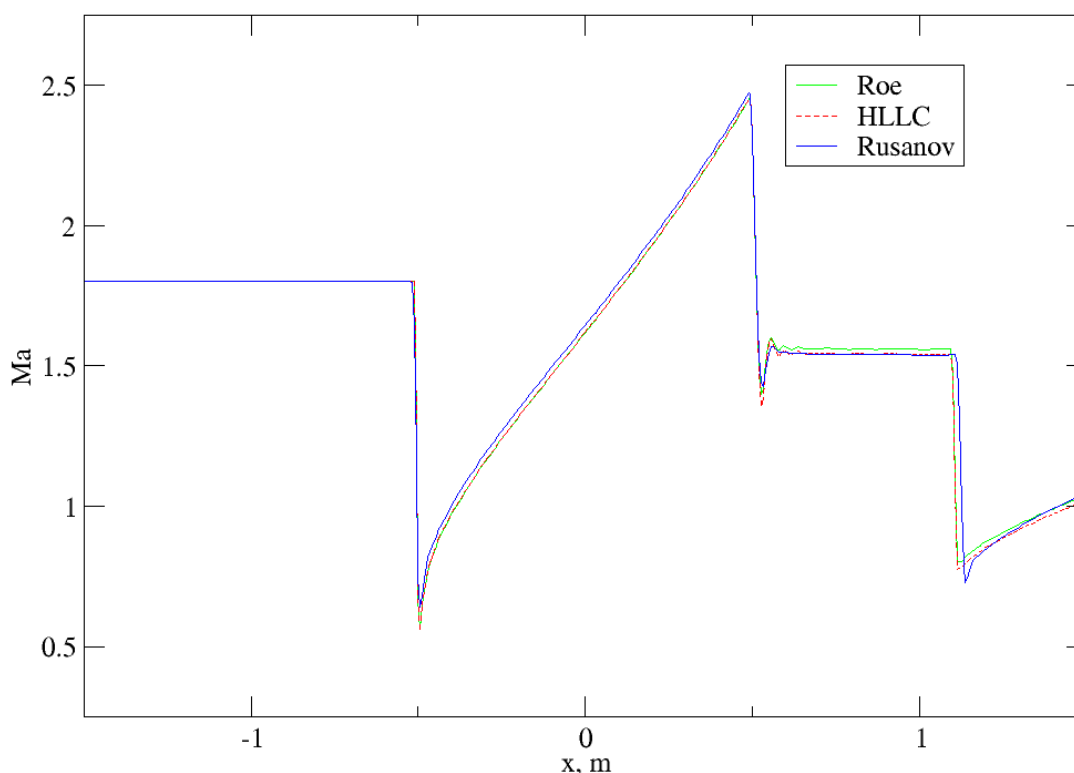
(c) Rusanovljev rješavač.

Slika 4.23: Usporedba kontura Machovog broja za različite Riemannove aproksimacijske rješavače.

Na slikama 4.23a i 4.23b vidljive su oscilacije kontura u blizini udarnog vala dok kod Rusanovljevog rješavača taj efekt nije izražen.

Usporedba raspodjele Machovog broja na donjem zidu prikazana je na slici 4.24.

Iz slike 4.24 vide se razlike u rezultatima različitih rješavača. Kod blažih gra-



Slika 4.24: Usporedba rješavača prema Machovom broju na donjem zidu domene.

dijenata Roeov i HLLC rješavač se dobro poklapaju dok Rusanovljev daje udarne valove malo ispred ili iza ostala dva rješavača. Također, Rusanovljev pokazuje manje oscilacije u rješenju to jest jače su prigušene. Također se može primjetiti da je kod Rusanovljevog rješavača drugi kut refleksije blaži od druga dva. To se odražava i na položaj udara u donji rub domene što će biti vidljivo i na grafu usporedbe Machovog broja na slici 4.24.

U tablici 4.4 prikazana je usporedba vremena proračuna. Svi slučajevi su bili ograničeni Courantovim brojem  $Co = 0.5$ . Proračun je proveden na IntelCore i7 quad procesoru takta 3.5 GHz.

Tablica 4.4: Usporedba vremena proračuna.

<i>Rješavač</i>	$t_{calc}$ u s
Roe	3530
HLLC	3523
Rus	3495

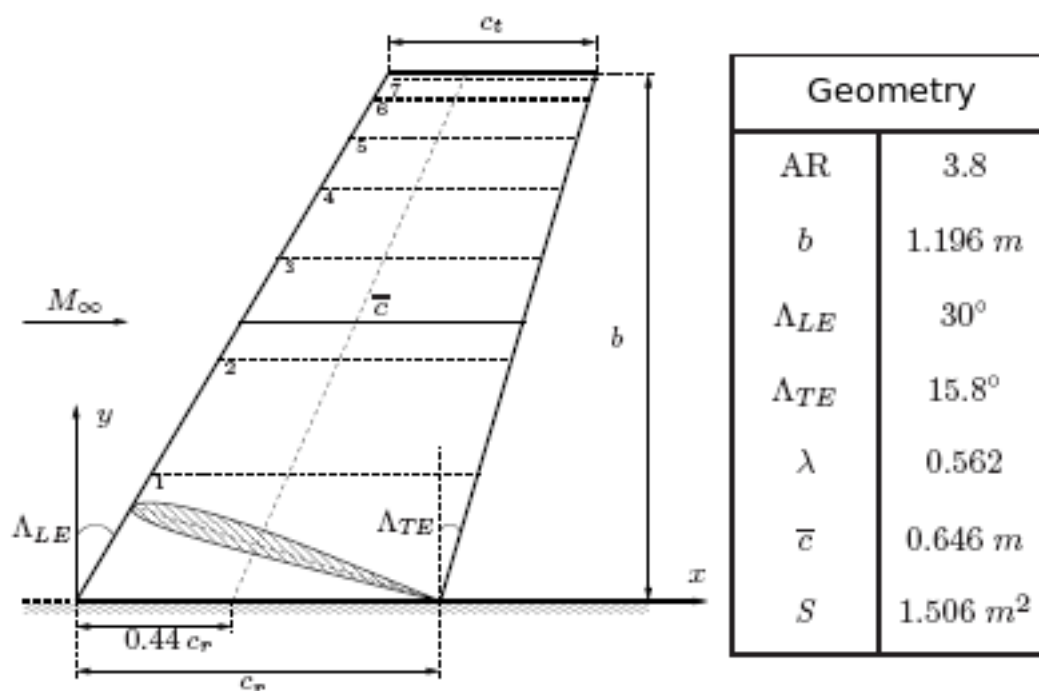
Iz tablice 4.4 vidljivo je da je Rusanovljev rješavač nešto brži od ostala dva. Slijedeći korak u vezi rješavača je implementirati AUSM+ rješavač te ga usporediti s

postojećima u strogo subsoničnom, transoničnom i supersoničnom režimu strujanja.

## 4.4. Onera transonično krilo

Zbog prisutnosti strujanja s kompresibilnim efektom u aeroindustriji, dobri slučajevi za validaciju su upravo iz tog područja. Zrakoplovna tehnika se dugo proučava i postoji puno modela na kojima se može validirati kod. Jedan od najpopularniji modela krila je Onerin model transoničnog M6 krila.

Fluid koji se simuliralo je zrak s konstantnim termodinamičkim svojstvima. Svojstva fluida navedena su u tablici 4.1. Dimenzije krila su detaljno opisane u [60] te je moguće doći do točaka koje definiraju geometriju krila. Neki detalji geometrije dani su na slici 4.25 iz [61]

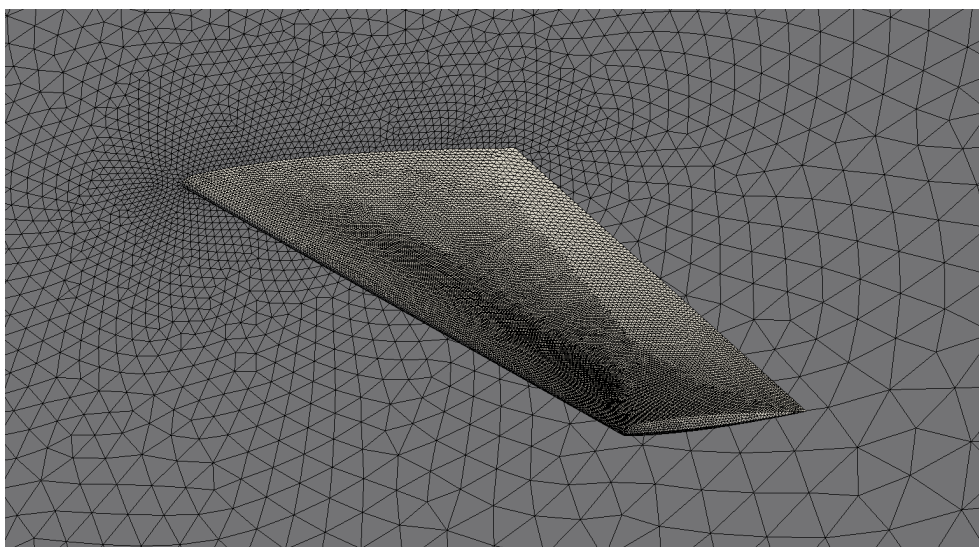


Slika 4.25: Detalji geometrije krila [61].

### 4.4.1. Računalna mreža

M6 profil je simetričan i pogodan za testiranja na brzinama bliskim brzini zvuka. Računalna mreža koja se koristila u radu prikazana je na slici 4.26.





Slika 4.26: Prikaz geometrije i mreže krila Onera M6.

Dimenzije krila su detaljno opisane u [60] te je moguće doći do točaka koje definiraju geometriju krila.

Mreža se sastoji od 341797 tetragonalnih kontrolnih volumena. Vanjski rubovi domene imaju dimenzije 11 m x 5 m x 10 m i oblik kvadra. Kao što je već navedeno, profil korišten za dobivanje krila je simetričan. Kako bi se ostvario uzgon, potrebno je da krilo ima napadni kut. U ovom radu, simuliralo se strujanje s napadnim kutom od  $\alpha_{AoA} = 3.06^\circ$ . Napadni kut se nije podešavao zakretanjem geometrije već postavljanjem rubnih uvjeta brzine za taj isti kut. Mreža je preuzeta s [61].

Tablica 4.5: Imena stranica domene.

<i>Naziv ruba</i>	<i>Opis položaja ruba</i>
<b>wing</b>	površina krila
<b>symmetry</b>	stranica uz krilo
<b>lateral</b>	stranica nasuprot krila
<b>inlet</b>	stranica uzvodno od krila
<b>outlet</b>	stranica nizvodno od krila
<b>top</b>	stranica iznad krila
<b>bottom</b>	stranica ispod krila

U tablici 4.5 su prikazani nazivi rubova domene na kojima će se u nastavku definirati rubni uvjeti s iznosima veličina.

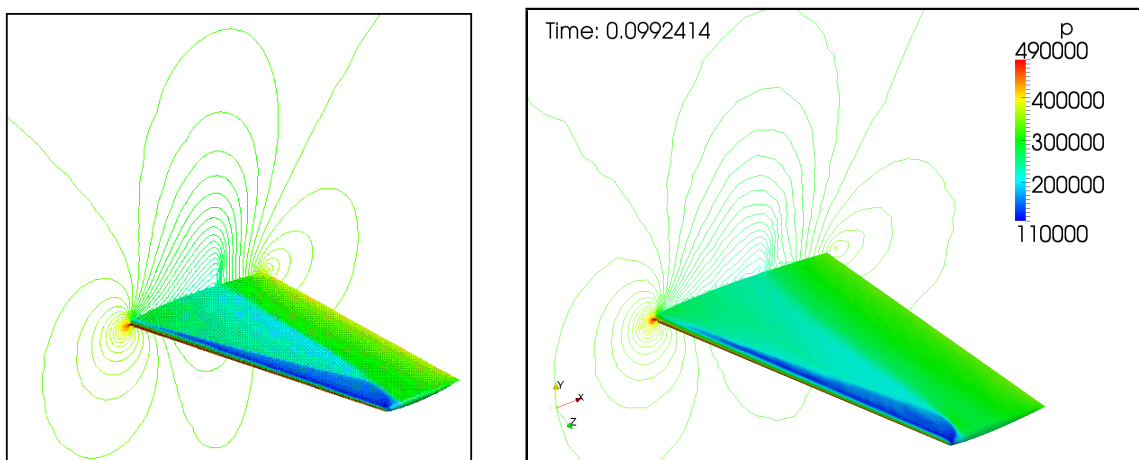
#### 4.4.2. Rubni i početni uvjeti

Rubni uvjeti definirani na NASA-inoj internetskoj stranici [62] su imitirani u radu. Cijelo polje tlaka je inicijalizirano statičkim tlakom čiji je iznos  $p = 315979$  Pa. Stavljen je `fixedValue` na inlet, te `outletInlet` na rubove lateral, top i bottom. Na rubovima outlet i wing stavljen je rubni uvjet `zeroGradient` za tlak.

Temperatura je postavljena u cijeloj domeni i rubovima domene na iznos od  $T = 255.55K$ . Na rubu inlet postavljen je `fixedValue` rubni uvjet. Na rubove lateral, top i bottom stavljen je rubni uvjet `inletOutlet`, a `zeroGradient` na rubove outlet i wing. Iznos brzine je  $u = 285.67$  m/s pod kutem od  $3.06^\circ$  u odnosu na horizontalnu ravninu što daje Machov broj u iznosu  $Ma = 0.8395$  i Reynoldsov broj prema srednjoj tetivi krila  $Re = 1.23 \cdot 10^7$ . Rubni uvjeti postavljeni su kao i za temperaturu s razlikom da je na krilo stavljen rubni uvjet `noSlip` koji nalaže brzinu  $u = 0$  m/s fluida na toj površini.

Proračun je izvršen na IntelCore quad na četiri jezgre takta 2.4 GHz. Vrijeme proračuna jednog vremenskog koraka iznosilo je  $\approx 4.1$  s. Simulacija se vršila do vremenskog trenutka `endTime = 0.1` s te je ukupno vrijeme proračuna iznosilo  $\approx 127$  h. Najveći Courantov broj iznosio je  $Co = 0.5$  što je dalo najveći vremenski korak  $\Delta t \approx 1.6 \cdot 10^{-6}$  s. Treba napomenuti da Courantov broj nije bio konstantan tokom simulacije.

Na slikama 4.27a i 4.27b prikazana je usporedba polja tlaka na krilu. Na slici a) su rezultati NASA-inog "WIND" koda, a pokraj njih rezultati dobiveni spregnutim DB rješavačem kojeg se testira. Iz usporedbe je vidljivo da se kvalitativno rezultati dobro poklapaju. Raspodjela polja niskog i visokog tlaka su gotovo istovjetnih oblika i dimenzija.

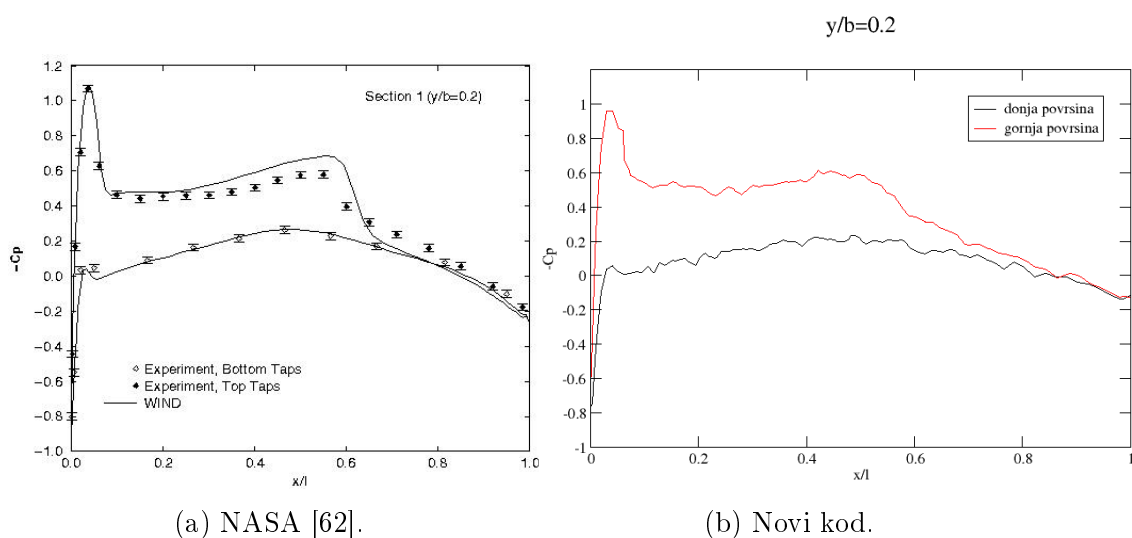


(a) Rezultati NASA-e [62].

(b) Rezultati novog koda.

Slika 4.27: Polje tlaka na krilu i konture tlaka na presjeku u korjenu krila.

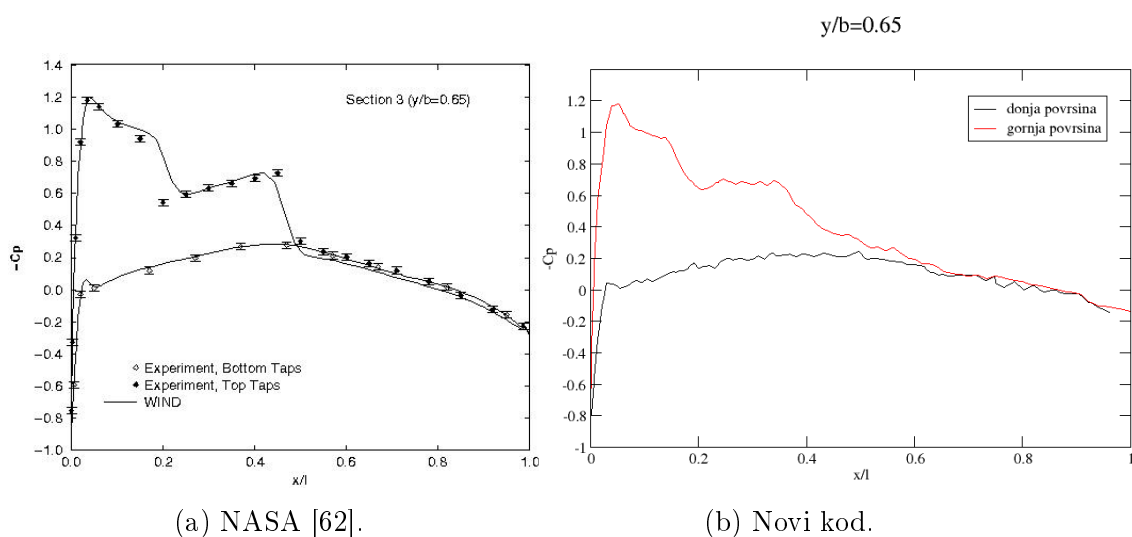
Za precizniju usporedbu prikazat će se raspodjela koeficijenta tlaka na površini krila. Na istom grafu prikazani su koeficijenti s gornje i donje površine krila. U literaturi se prikazuju rezultati koeficijenta tlaka sa suprotnim predznakom te će se tako postupiti i u ovom radu. Na ordinati je prikazan položaj na krilu u obliku  $\frac{x}{l}$  gdje  $l$  predstavlja tetivu krila paralelnu s  $x$ -osi, a  $x$  označava položaj promatrane točke na krilu.



(a) NASA [62].

(b) Novi kod.

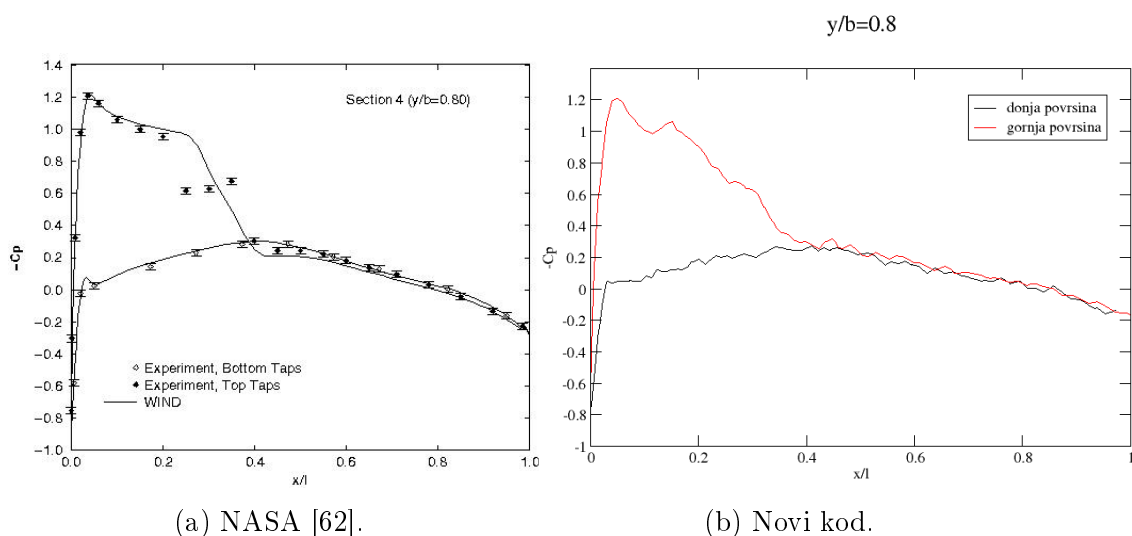
Slika 4.28: Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku  $y/b=0.2$ .



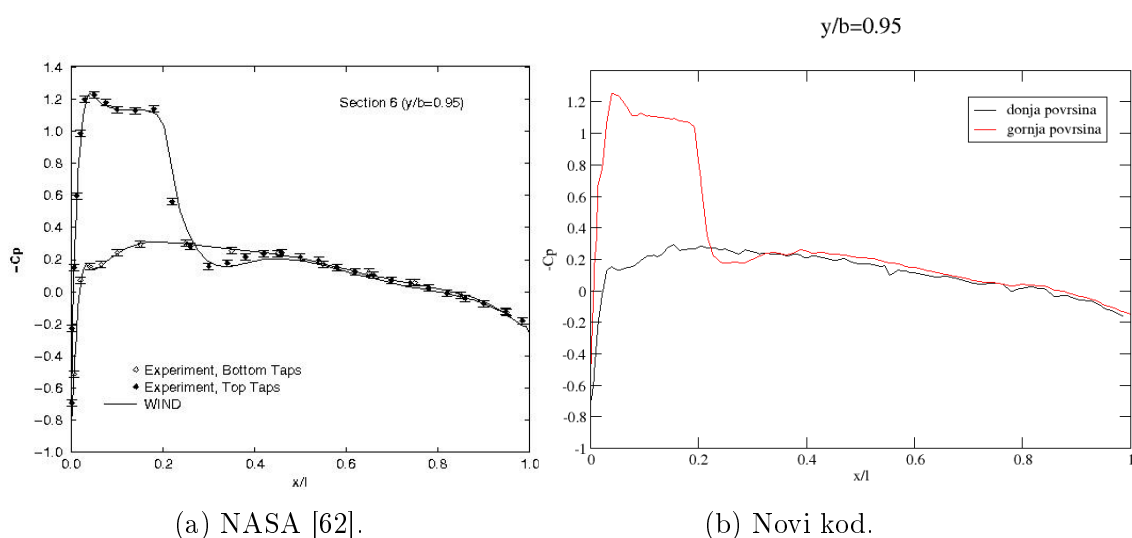
(a) NASA [62].

(b) Novi kod.

Slika 4.29: Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku  $y/b=0.65$ .



Slika 4.30: Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku  $y/b=0.8$ .



Slika 4.31: Usporedba raspodjele tlaka izražene koeficijentom tlaka na presjeku  $y/b=0.95$ .

Na slikama 4.28b do 4.31b prikazana je usporedba rezultata novog koda i NASA-e iz [62]. Može se vidjeti vrlo dobro kvalitativno i kvantitativno poklapanje rezultata, iako postoje male rezlike. Razlomljenost krivulja je posljedica tetraedarske nesstrukturirane mreže. Gotovo istovjentni rezultati mogu se pronaći i na slijedećim internetskim stranicama [61], [63] i [64]. Vidljivo je vrlo dobro poklapanje polja tlaka na površini krila.

## 4.5. Interakcija graničnog sloja i udarnog vala

Interakcija graničnog sloja i udarnog vala je prirodna pojava u kojoj se odvija vrlo kompleksna fizika. Tu dolazi do interakcije jakog tlačnog poremećaja i graničnog sloja. U aeroindustriji se pojavljuje kod transoničnih i supersoničnih brzina te negativno utječe na performanse krila. Na primjer kod transportnih zrakoplova, gotovo normalni udarni val prekida nadzvučno polje strujanja kada do njega dolazi. Kod supersoničnih letova, udarni valovi nastaju na ulazu u usis zraka jer je potrebno usporiti tok zraka u motor. Kod hipersoničnih strujanja, ova interakcija dovodi do vrlo visokih temperatura [65]. Iz tog razloga je vrlo pogodan slučaj za testiranje. Rezultate simulacije može se usporediti i s fotografijama te pojave u prirodi i eksperimenata kao na primjer u [66] i [65]. Kod ove pojave ne dolazi do udara vala o stijenku na primjer krila ili stijenke zračnog tunela jer mu se granični sloj ispriječi. Međutim na mjestu udara vala tlak poraste znatno, što će kasnije biti i pokazano, te u ekstremnim slučajevima mogu izazvati odvajanje graničnog sloja [65].

U ovom radu pristupilo se ugađanju svojstava fluida koji po parametrima slični zraku, kako bi se visinom povećala interakcija udarnog vala i graničnog sloja. To se postiglo povećavanjem viskoznosti fluida. Dinamička viskoznost je povećana za tri reda veličine. Parametri fluida su konstantni za sve tri razine finoće mreže te su njihovi iznosi prikazani u tablici 4.6

Tablica 4.6: Tablični prikaz svojstava fluida korištenih u simulacijama.

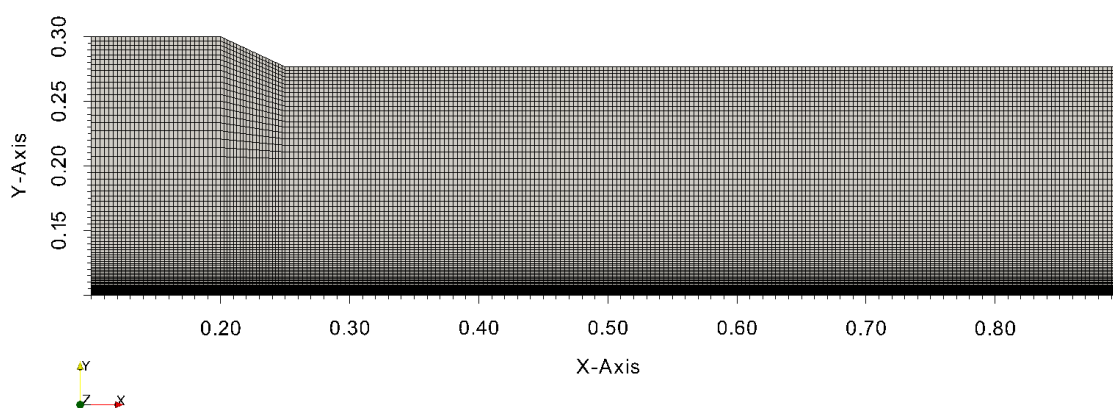
Svojstva zraka	
$M = 28.9 \text{ kg / kmol}$	molarna masa
$C_p = 1007 \text{ J/kg K}$	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$\mu = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$	dinamička viskoznost
$Pr = 0.7$	Prandtlov broj
$\gamma = 1.4$	izentropski koeficijent ekspanzije

### 4.5.1. Računalna mreža

Računalna mreža nije preuzeta iz već postojećeg slučaja nego je proizvoljno zadana. Cilj je bio odabrati kut suženja domene koji bi izazvao kosi udarni val. Za taj kut uzeta je vrijednost od  $25^\circ$  u odnosu na horizontalnu ravninu jer taj kut još uvijek neće izazvati zagušenje toka. Kut klina i kut odbijanja vala imaju zavisnost preko Machovog broja. Ova zavisnost je dostupna u literaturi [67] te uvjeti simulacije odgovaraju vrijednostima u tablicama. Na ovaj način pokazana je točnost

simulacije i poklapanje s već poznatim i očekivanim rezultatima.

Geometrija ovog slučaja je vrlo jednostavna i podsjeća na poznati slučaj pod nazivom "shock tube". Za što precizniji proračun strujanja u području graničnog sloja računalna mreža je lokalno profinjena u području donjeg ruba domene. Slika 4.32 prikazuje računalnu mrežu na kojoj se vidi profinjenje.



Slika 4.32: Računalna mreža s dimenzijama.

Na ovom slučaju je provedena studija profinjenja mreže kako bi se provjerilo ovisi li i u kojoj mjeri kvaliteta rješenja o finoći mreže. To je naravno logično, ako se uzme u obzir da su udarni valovi jako malih dimenzija.

Računalna mreža je strukturirana i svi su kontrolni volumeni heksagonalni. Gotovo su svi i ortogonalni osim onih u blizini klina. U nastavku slijedi tablica 4.7 s usporednim prikazom broja kontrolnih volumena mreže. Također su prikazani Courantovi brojevi i pripadajući vremenski koraci. Iz tih podataka je vidljivo da finija mreža zahtjeva manji vremenski korak.

Tablica 4.7: Usporedni prikaz glavnih parametara mreža.

<i>Finoća mreže</i>	<i>Broj kontrolnih volumena</i>	$Co_{max}$	$\Delta t_{Co_{max}}$
Gruba	19600	0.5	$6.62 \cdot 10^{-7}$
Srednja	76800	0.5	$2.99 \cdot 10^{-7}$
Fina	1254400	0.7	$9.5 \cdot 10^{-8}$

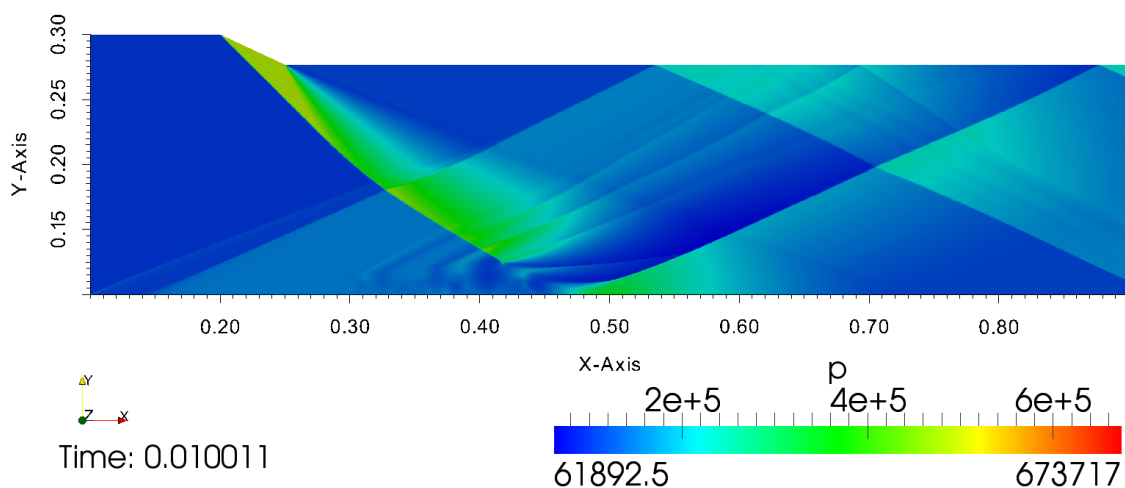
Na sve tri mreže se pristupilo lokalnom profinjenju uz donji rub domene s istim koeficijentima.

## 4.5.2. Rubni i početni uvjeti

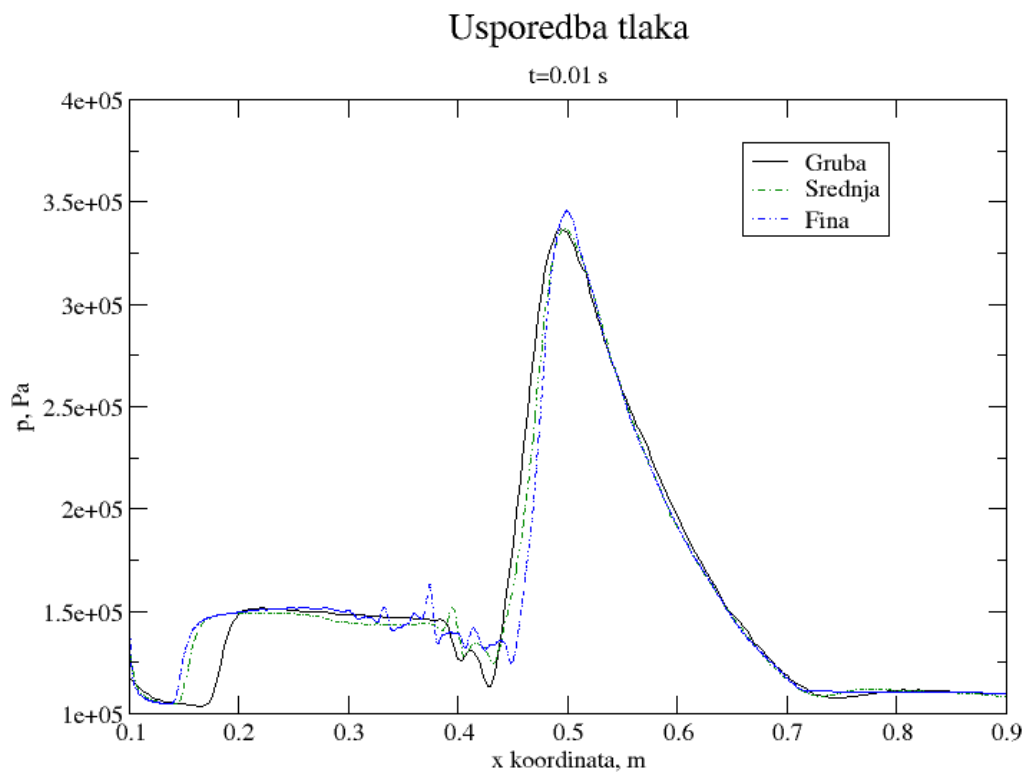
Simulacija se provodila za supersonično strujanje čiji Machov broj na ulazu iznosu iznosi  $Ma = 2.9376$ . Uz odabir visine domene na ulazu kao karakteristične duljine i dinamičke viskoznosti kako je predstavljeno u tablici 4.6 dobije se Reynoldsov broj  $Re = 136000$ . Iako taj iznos Reynoldsovog broja označava izrazito turbulentno strujanje, pretpostavljeno je laminarno strujanje. Zbog toga se u ovom nizu simulacija nije koristio model turbulencije.

Kako bi se stvorio granični sloj uz pod domene za rubni uvjet brzine odabran je `noSlip`, a za tlak i temperaturu `zeroGradient`. Na ulazu je narinuta konstantna brzina od  $u_{ul} = 1020$  m/s što u kombinaciji s ulaznom temperaturom zraka  $T_{ul} = 300$  K daje već spomenutih  $Ma = 2.9376$ . Zadan je statički tlak u iznosu od  $p_{ul} = 100000$  Pa. Na gornjem rubu domene je zadan `slip` rubni uvjet za sve tri varijable dok je na izlazu za sve zadan uvjet `zeroGradient`.

Rezultati simulacije se daju u nastavku. Usporedit će se polja iste varijable za različite finoće mreže kako bi se mogao vidjeti utjecaj finoće mreže na kvalitetu rezultata. Na slici 4.33 je prikazano polje tlaka u domeni. Mjesto udara vala u donji rub domene je mjesto gdje tlak postiže svoju najvišu vrijednost. Ovo je prikazano na slici 4.34 gdje se vidi da se na sve tri mreže poklapa mjesto maksimuma.



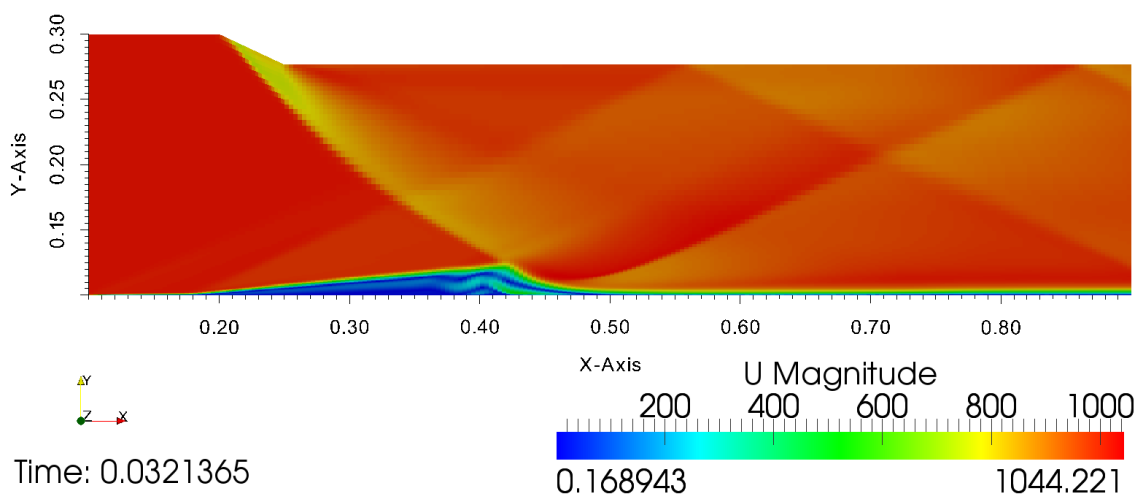
Slika 4.33: Polje tlaka izraženo u Pa za najfiniju mrežu.



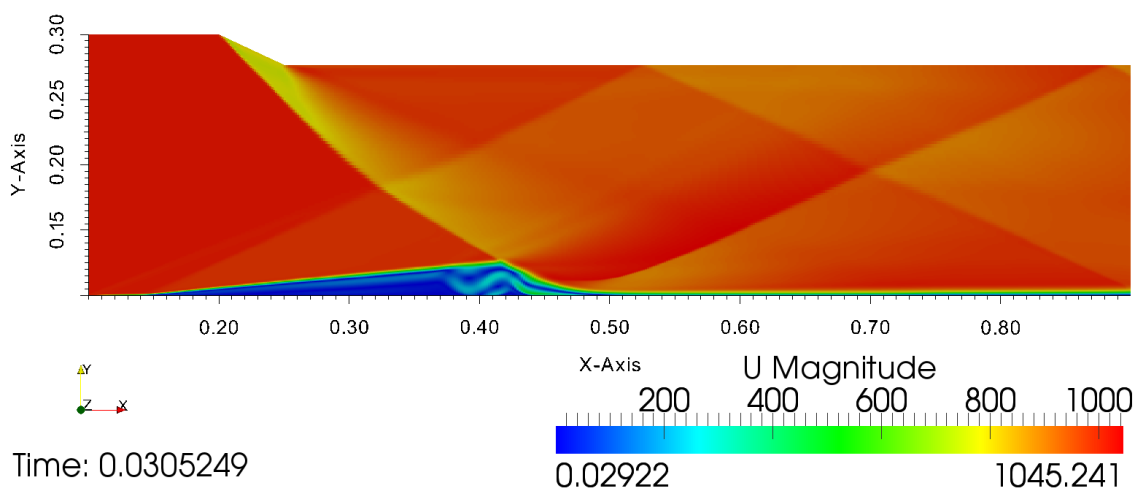
Slika 4.34: Tlak na donjoj površini domene. Usporedno su prikazani podaci za sve tri finoće mreže.

Veća gustoća mreže omogućava preciznije hvatanje mjesta pojave i nestanka interakcije. To je naročito izraženo u područjima s nestacionarnijim strujanjem kao što je mjesto ispred interakcije. Tu fina mreža može uhvatiti znatno više nestacionarnost nego gruba. Također, kod fine mreže uzlazni gradijent je najstrmiji.

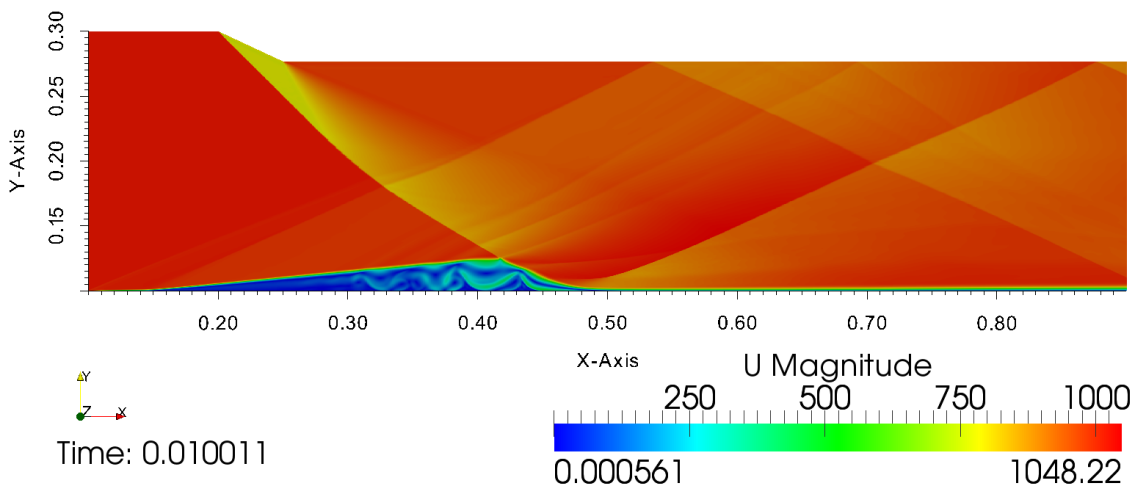




(a) Gruba mreža.



(b) Srednje gruba mreža.



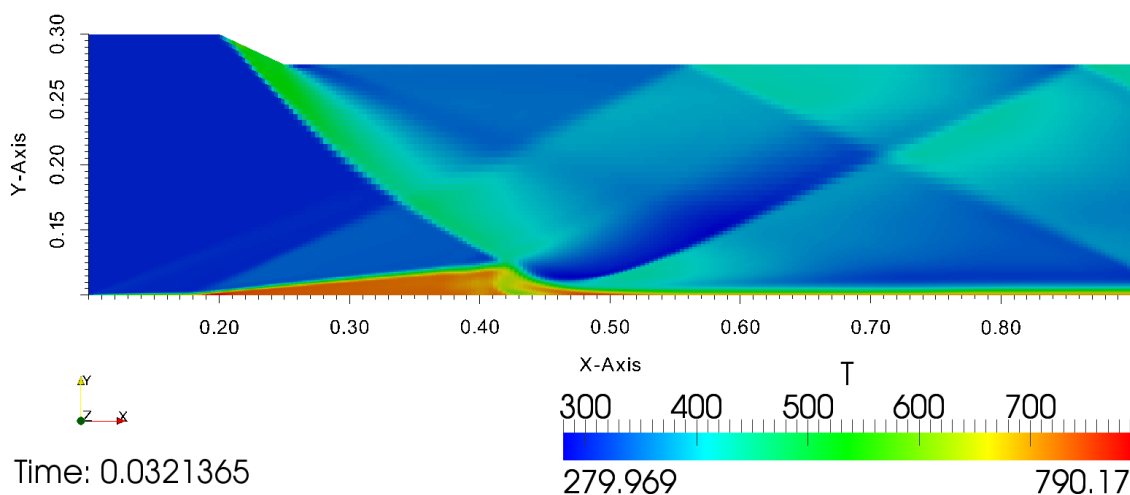
(c) Fina mreža.

Slika 4.35: Polje brzine izraženo m/s.

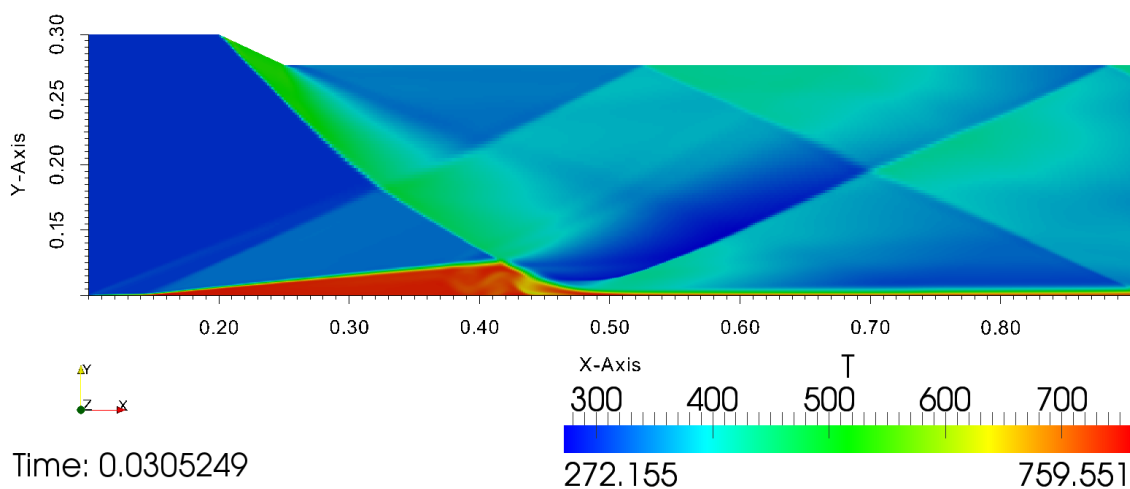
Na slikama 4.35a, 4.35b i 4.35c vidi se polje brzine u domeni. Ulaz fluida je na lijevoj strani domene. Unutar domene vidljivi su kosi udarni valovi koji se međusobno presjecaju te stvaraju uzorak koji se često naziva dijamantima. Najzanimljivije područje prikazano je plavom bojom. To je mjesto interakcije graničnog sloja i vala te je ovdje brzina jako mala. Izgledom se vrlo dobro poklapa s eksperimentom [66].

Kod sve veće finoće mreže, rješavač je u stanju "uhvatiti" sve manje poremećaje. Dok je rješenje na gruboj mreži jako razliveno, na finoj mreži vide se oštri bridovi udarnih valova. Takav izgled je bliskiji stvarnosti te je moguće vidjeti da svaki poremećaj unutar graničnog sloja utječe na stvaranje novih kosih udarnih valova. Vidljiv je i lom udarnih valova u kontaktu s drugim udarnim valovima što je također fizikalno ponašanje.

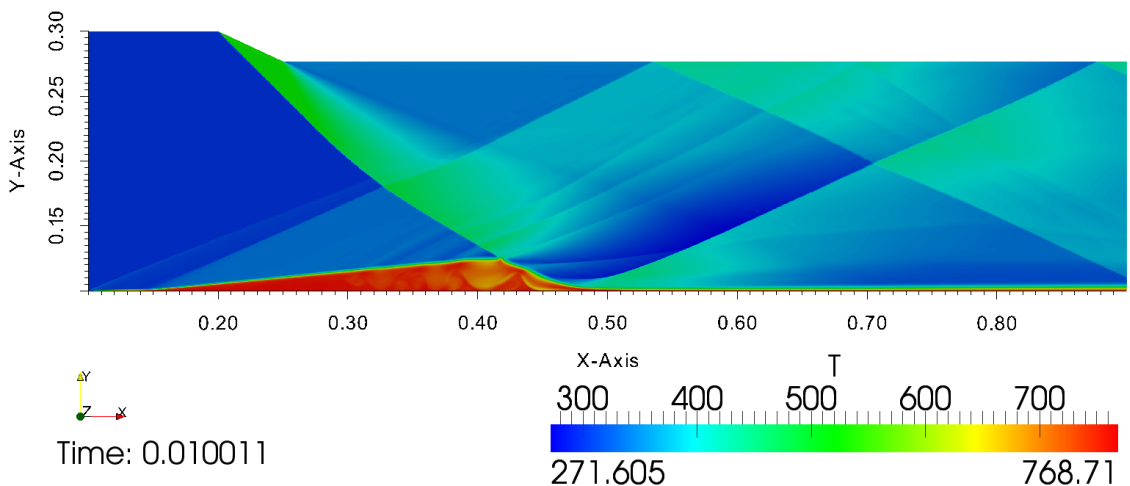
Granični sloj na mjestu gdje dolazi do interakcije s udarnim valom je relativno je velike visine. To je posljedica odabira tri reda veličine veće viskoznosti fluida. Takav odabir viskoznosti također utječe na povećanu generaciju topline u graničnom sloju jer se fluid vrlo brzo zaustavlja s jako visoke na jako nisku brzinu strujanja. Zagrijavanje u području interakcije vidljivo je na slikama 4.36a, 4.36b i 4.36c koje slijede u nastavku.



(a) Gruba mreža.



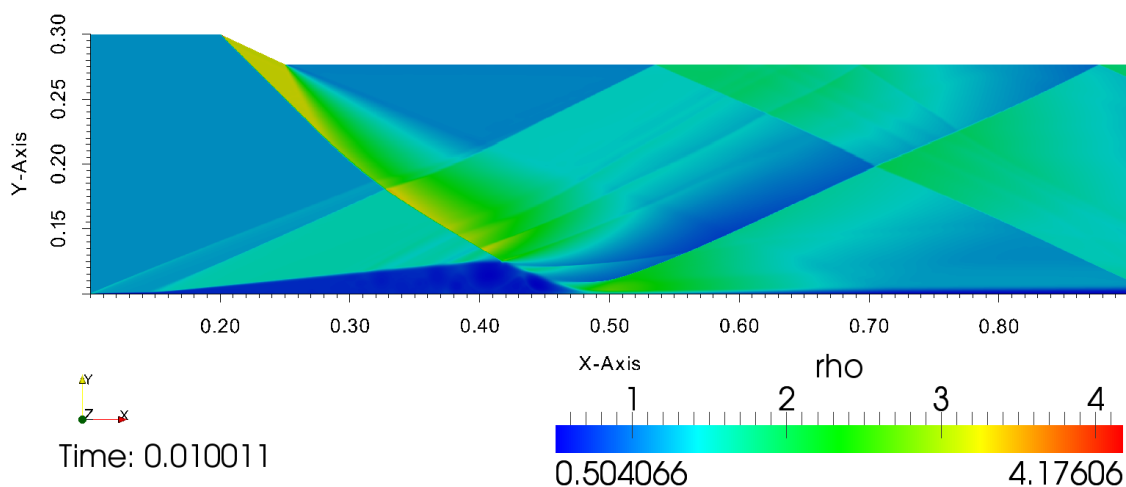
(b) Srednja mreža.



(c) Fina mreža.

Slika 4.36: Polje temperature izraženo u Kelvinima.

Na slikama 4.33 i 4.37 prikazana su još polja tlaka i gustoće za najfiniju mrežu iz kojih je vidljiva njihova promjena u karakterističnim interakcijama.



Slika 4.37: Polje gustoće izraženo  $\text{kg/m}^3$  za najfiniju mrežu.

Iz izloženih rezultata vidljivo je dobro poklapanje fizikalnih pojava sa stvarnim. Također je vidljivo da finoća mreže značajno utječe na kvalitetu rješenja.

U ovom poglavlju izneseni su dosad napravljeni validacijski slučajevi i dan je osvrt i komentar na rezultate u smislu usporedbe s drugim dostupnim kodovima i eksperimentima. Uočeni su neki nedostaci koje bi trebalo ukloniti. U slijedećem poglavlju će se dati kratki pregled rada i predložiti budući koraci koje je potrebno učiniti kako bi se novi kod unaprijedio.

## 5. Zaključak

U uvodu je dan kratak osvrt na metode računalne dinamike fluida, postavljen je cilj rada i predstavljena struktura. Ovdje se daje osvrt na postignuto i predstavljaju se potrebne buduće radnje u svrhu validacije i razvoja koda.

U ovom radu pristupilo se validaciji novog algoritma koji koristi gustoću kao glavnu proračunsku varijablu. Validacija je provedena na dvije 3-D i tri 2-D mreže, te su napravljene dvije studije profinjenja. Na jednom od 2-D slučajeva novi kod je uspoređen s kodom koji koristi tlak kao glavnu proračunsku varijablu. Rezultati su uspoređeni s rezultatima dostupnim u literaturi i internetu.

Prvi slijedeći korak je otkriti uzrok nepoklapanja rezultata u MADIC slučaju. Eliminirati probleme zbog rubnih uvjeta. Kada se otkrije uzrok i ispravi, trebalo bi izvršiti dodatno proračun na mreži koja je još finija. Na taj način dobila bi se još jedna usporedba sa PB rješavačem i još jedan podatak o trajanju proračuna.

Iz svih prikazanih rezultata može se zaključiti da novi kod daje jako kvalitetne rezultate u pogledu udarnih valova. Pokazalo se na koji način finoća mreže utječe na kvalitetu rezultata i na vrijeme proračuna. Rezultati bi možda mogli biti i bolji uz korištenje nekog drugog dostupnog Riemannovog rješavača. Zato se predlaže usporedba svih dostupnih Riemannovih rješavača na jednom slučaju. Također se predlaže implementacija nekih novijih, u literaturi opisanih rješavača poput AUSM+. Kod je pokazao osjetljivost na "carbuncle" efekt na strukturiranim mrežama. Zbog toga je potrebno usporediti sve u kodu dostupne Riemannove rješavače kako bi se pronašli najbolji kod kojih ne dolazi do pojave navedenog efekta. U onima u kojima se pojavljuje, treba primjeniti metode opisne u literaturi kojima bi se eliminirao.

Pokazalo se, također, da su vremena proračuna jako dugačka kao kod Seinerove mlaznice s otprilike 223000 kontrolnih volumena gdje je za 0.0056 s simulacije proračunsko vrijeme iznosilo 244 h. Ovim je pokazano da je potrebna velika računalna snaga da bi se simuliralo neki imalo zahtjevniji slučaj. Zbog toga se predlaže akceleracija koda nekom od dostupnih metoda poput "pseudo-time stepping" i "multigrid" postupaka kako bi se moglo proračunavati na osobnim računalima. Također je moguće napisati kod u implicitnom obliku te provjeriti skraćuje li takav oblik koda vrijeme proračuna.

## 6. Bibliografija

- [1] P. D. Lax. Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical approximations. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 7:159–193, 1954.
- [2] P. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math*, 13:217–237, 1960.
- [3] R. W. MacCormack. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA*, 69:0354, 1969.
- [4] S. K. Godunov. Finite-difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sbornik*, 47:271–237, 1959.
- [5] V. V. Rusanov. On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 5:507–516, 1970.
- [6] E. Turkel, S. Abarbanel, and D. Gottlieb. Multidimensional difference schemes with fourth-order accuracy. *Journal of Computational Physics*, 21:85–133, 1976.
- [7] G. Moretti. Three-dimensional supersonic flow computations. *AIAA Journal*, 1:92–93, 1963.
- [8] G. Moretti and M. Abbett. A time-dependent computational method for blunt body flows. *AIAA Journal*, 4:36–41, 1966.
- [9] W.R. Briley and H. McDonald. Solution of the multidimensional compressible navier stokes equations by a generalized implicit method. *Journal of Computational Physics*, 24:372–397, 1977.
- [10] R.M. Beam and R.F. Warming. Implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. *Journal of Computational Physics*, 22:87–110, 1976.
- [11] R.M. Beam and R.F. Warming. An implicit factored scheme for the compressible navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 16:393–402, 1978.

- [12] S. Osher and S. Chakravarthy. Upwind schemes and boundary conditions with applications to euler equations in general geometries. *Journal of Computational Physics*, 50:447–481, 1983.
- [13] A. Jameson. Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings, including flows at mach 1. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27:283–309, 1974.
- [14] T.H. Pulliam and J.L. Steger. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow. *AIAA Journal*, 18:159–167, 1980.
- [15] T.H. Pulliam and D.S. Chaussee. A diagonal form of an implicit approximate factorization algorithm. *Journal of Computational Physics*, 39:347–363, 1981.
- [16] H.C. Yee. On symmetric and upwind tvd schemes. NASA Technical Memorandum 88325, 1986.
- [17] A. Jameson and S. Yoon. Multigrid solutions of the euler equations using implicit schemes. *AIAA Journal*, 24:1737–1743, 1986.
- [18] R.H. Ni. A multiple-grid scheme for solving the euler equations. *AIAA Journal*, 20:1565–1571, 1982.
- [19] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [20] P.L. Roe. Characteristics-based schemes for the euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18:337–365, 1986.
- [21] A. Jameson and S. Yoon. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the euler equations. *AIAA Journal*, 25:929–935, 1987.
- [22] Berger Bell, J. and J et al. M., Saltzman. Three-dimensional adaptive mesh refinement for hyperbolic conservation-laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15:127–138, 1994.
- [23] E.M. Murman and J.D. Cole. Calculation of plane steady transonic flows. *AIAA Journal*, 9:114–121, 1971.
- [24] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Mathematics of Computation*, 34:45–75, 1980.

- [25] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40:263–293, 1981.
- [26] B. Van Leer. Flux-vector splitting for the euler equations. *Lecture Notes in Physics*, 170:507–512, 1982.
- [27] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme v: A second-order sequel to godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32:101–136, 1979.
- [28] Harten A. High-resolution schemes for hyperbolic conservation-laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
- [29] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61, 1983.
- [30] E. F. Toro, M. Spence, and Spears. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock Waves*, 4:25–34, 1994.
- [31] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D.M. Causon. On the choice of wavespeeds for the hllc riemann solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18:1553–1570, 1997.
- [32] E.L. Toro. A multi-stage numerical flux. *Applied Numerical Mathematics*, 56:1464–1479, 2006.
- [33] E.L. Toro. Riemann solvers with evolved initial conditions. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 52:433–453, 2006.
- [34] M.-S. Liou and C. Steffen. A new flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.*, 107:23–39, 1993.
- [35] M.-S. Liou. A sequel to ausm, part ii: Ausm+-up. *J. Comput. Phys.*, 214:137–170, 2006.
- [36] Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [37] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*, volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Birkhäuser, 1992.



- [38] A. Galović. *Termodinamika 1*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2007.
- [39] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, 2007.
- [40] D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 1993.
- [41] CFD Online. *k- $\omega$  sst turbulence model*. [http://www.cfd-online.com/Wiki/SST\\_k-omega\\_model](http://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model), 2014. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [42] P. L. Roe and J. Pike. Efficient construction and utilisation of approximate riemann solutions. In *Proc. of the sixth int'l. symposium on Computing methods in applied sciences and engineering*, pages 499–518, 1985.
- [43] K. C. Hansen, G. Tóth, A. Ridley, and D. DeZeeuw. Design document. In *BATS-R-US MANUALS*, 2002.
- [44] E. F. Toro. Lecture 4: Some approximate riemann solvers for the euler equations. In *School-Worshop JETSET*, 2007. Presentacija.
- [45] P. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Num. Anal.*, 21, 1984.
- [46] S. T. Zalesak. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, 31:335–362, 1979.
- [47] M. Berger, M. J. Aftosmis, and S. M. Murman. Analysis of slope limiters on irregular grids. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2005.
- [48] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, and S. Singer. Numerička analiza. Predavanja i vježbe, PMF Matematički odjel, 2003.
- [49] D. I. Ketcheson. Runge-kutta methods with minimum-storage implementations. Unpublished.
- [50] H. Rusche. *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two - Phase Flows at High Phase Fractions*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, 2002.
- [51] J. M. Seiner, M. K. Ponton, B. J. Jansen, and N. T. Lagen. The effect of temperature on jet noise emission. In *DGLR/AIAA 14th Aeroacoustics Conference*, 1992.

- [52] V. Dippold. Seiner nozzle with mach 2.0, heated jet flow. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/seiner/Seiner.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [53] U.S. Rockets. Custom motors. <http://v-serv.com/usr/crr457mm.htm>, 2014. Pristupljeno: 8.7.2014.
- [54] D. Vinteler. Madic 2d axisymmetric cd boattail nozzle: Study 1. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/madicnoz/madicnoz.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [55] Bobby L. Berrier and Richard J. Re. Investigation of convergent-divergent nozzles applicable to reduced-power supersonic cruise aircraft. Technical report, NASA, 1980.
- [56] J. H. Ferziger and Perić M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [57] ESI-CFD. Axisymmetric 2d convergent/divergent boattail nozzle simulation using cfd/fastran. <http://www.esi-cfd/content/view/718/197/>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [58] C. M. Xisto, J. C. Pácoa, P. J. Oliveira, and D. A. Nicolini. A hybrid pressure–density-based algorithm for the euler equations at all mach number regimes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 70:961–976, 2011.
- [59] J. Mendonca and M. A. R. Sharif. Effects of surface roughness on turbulent transonic flow over circular arc bumps in a channel. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 4:164–180, 2010.
- [60] V. Schmitt and F. Charpin. Pressure distributions on the onera-m6-wing at transonic mach numbers. In *Experimental Data Base for Computer Program Assessment*, 1979. Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138.
- [61] Politecnico di Milano. Onera m6 wing. [https://www.aero.polimi.it/freecase/?OpenFOAM\\_%2B\\_Code\\_Aster:Aerodynamic\\_problems:ONERA\\_M6\\_wing](https://www.aero.polimi.it/freecase/?OpenFOAM_%2B_Code_Aster:Aerodynamic_problems:ONERA_M6_wing). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [62] J. W. Slater. Onera m6 wing: Study 1. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m6wing/m6wing01/m6wing01.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.

- 
- [63] TTC Tech. Onera-m6-wing. [http://www.ttctech.com/Samples/Onera\\_M6\\_Wing\\_Multiblock/onera\\_mb.htm](http://www.ttctech.com/Samples/Onera_M6_Wing_Multiblock/onera_mb.htm). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [64] SCOREC. M6 wing simulation problem definition and results. [http://www.scorec.rpi.edu/~cwsmith/NASA\\_m6WingSimulations/M6WingSimulation\\_ProblemDefinitionSimulationControlsAdaptationControls\\_20110120.pdf](http://www.scorec.rpi.edu/~cwsmith/NASA_m6WingSimulations/M6WingSimulation_ProblemDefinitionSimulationControlsAdaptationControls_20110120.pdf). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [65] J. Délery and J. P. Daussage. Some physical aspects of shock wave/boundary layer interactions. *Shock Waves*, 19:453–468, 2009.
- [66] G. Smeets. Shock tube investigations of combustion phenomena in supersonic flows. In *Hypersonics, Shock Tube & Shock Tunnel Flow*, 1993.
- [67] FSB Katedra za mehaniku fluida. Dijagram za kosi udarni val. Unpublished. Skripta.

UNIVERSITY OF ZAGREB  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE

# MASTER'S THESIS

**Karlo Šunjo**

Zagreb, 2014.

UNIVERSITY OF ZAGREB  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE

**MASTER'S THESIS**  
**Extended Summary**

Supervisor:  
Ph.D DIC Hrvoje Jasak, CEng MIMechE

Student:  
Karlo Šunjo

Zagreb, 2014.

# Contents

<b>List of Figures</b>	<b>iii</b>
<b>List of Tables</b>	<b>vi</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2. Mathematical Model</b>	<b>2</b>
2.1. The Euler Equations . . . . .	2
2.2. The Riemann Problem . . . . .	3
2.2.1. Rankine-Hugoniot Condition . . . . .	5
2.3. Navier-Stokes System of Equations . . . . .	6
<b>3. Numerical Considerations</b>	<b>7</b>
3.1. Approximate Riemann Solvers . . . . .	7
3.1.1. HLLC Approximate Riemann Solvers . . . . .	7
3.1.2. Roe Approximate Riemann Solvers . . . . .	8
3.1.3. Rusanov Flux Approximate Riemann Solvers . . . . .	9
<b>4. Algorithm Validation</b>	<b>10</b>
4.1. Seiner Nozzle . . . . .	10
4.1.1. Mesh . . . . .	11
4.1.2. Boundary and Initial Conditions . . . . .	11
4.2. MADIC 2D Axisymmetric CD Boattail Nozzle . . . . .	16
4.2.1. Mesh . . . . .	16
4.2.2. Boundary and Initial conditions . . . . .	18
4.2.3. Comparison of DB and PB Solvers . . . . .	21
4.3. Bump in a Channel . . . . .	28
4.3.1. Mesh . . . . .	28
4.3.2. Boundary and Initial Conditions . . . . .	28
4.4. Onera M6 Transonic Wing . . . . .	31
4.4.1. Mesh . . . . .	31
4.4.2. Boundary and Initial Conditions . . . . .	32
4.5. Shock-Wave Boundary Layer Interaction . . . . .	35
4.5.1. Mesh . . . . .	36

4.5.2. Boundary and Initial conditions . . . . .	37
<b>5. Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>6. Bibliography</b>	<b>44</b>

# List of Figures

2.1	Shock wave [1]. . . . .	4
2.2	Entropy-violating shock [1]. . . . .	4
2.3	Rarefaction wave [1]. . . . .	5
4.1	Geometry of the domain and nozzle. . . . .	11
	a Domain. . . . .	11
	b Detail of convergent-divergent nozzle. . . . .	11
4.2	Initialized fields of total conditions on the inlet into the nozzle. . . . .	12
4.3	Velocity in the nozzle. . . . .	12
4.4	Field of density in the nozzle. . . . .	13
4.5	Field of turbulent kinetic dissipation in the nozzle. . . . .	13
4.6	Diamond shaped shock waves in the flumes of jet engine [11]. . . . .	14
4.7	Distribution of Mach number within nozzle. . . . .	14
4.8	Normalized velocity and turbulent kinetic energy in the axis of symmetry [10]. . . . .	15
4.9	Plots of normalized values in the axis of symmetry of simulation. . . . .	15
	a Velocity. . . . .	15
	b Kinetic turbulent energy. . . . .	15
4.10	2D mesh of MADIC case. . . . .	17
	a Domain. . . . .	17
	b Detail of con-di nozzle. . . . .	17
4.11	Initialized field of pressure and velocity. . . . .	18
4.12	Moments of partial superposition for coarse meshes. . . . .	19
	a DB solver. . . . .	19
	b PB solver. . . . .	19
4.13	Moments of partial superposition for fine meshes. . . . .	20
	a DB solver. . . . .	20
	b PB solver. . . . .	20
4.14	Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on coarse level mesh. . . . .	22
	a DB solver. . . . .	22
	b PB solver. . . . .	22



4.15	Plot of coefficient of pressure on the aft of the boattail nozzle from NASA [15]. . . . .	23
4.16	Comparison of pressure coefficients on the aft of the boattail nozzle at time $t = 0.005$ of different meshes. . . . .	23
	a    Coarse mesh. . . . .	23
	b    Fine mesh. . . . .	23
4.17	Comparison of pressure coefficients on the aft of the boattail nozzle at time $t = 0.008$ of different meshes. . . . .	24
	a    Coarse mesh. . . . .	24
	b    Fine mesh. . . . .	24
4.18	Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on coarse level mesh, nozzle detail. . . . .	25
	a    DB solver. . . . .	25
	b    PB solver. . . . .	25
4.19	Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on fine level mesh. . . . .	26
	a    DB solver. . . . .	26
	b    PB solver. . . . .	26
4.20	Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on fine level mesh, nozzle detail. . . . .	27
	a    DB solver. . . . .	27
	b    PB solver. . . . .	27
4.21	Mesh of bump in a channel. . . . .	28
4.22	Comparison of Mach contours for different solvers. . . . .	29
	a    Roe solver. . . . .	29
	b    HLLC solver. . . . .	29
	c    Rusanov solver. . . . .	29
4.23	Usporedba rješavača prema Machovom broju na donjem zidu domene. . . . .	30
4.24	Representation of geometry and mesh of a M6 wing. . . . .	31
4.25	Field of pressure on the surface of the wing and contours of pressure on slice through domain near the root of the wing. . . . .	33
	a    Results from NASA [19]. . . . .	33
	b    Results of new algorithm. . . . .	33
4.26	Comparison of distribution of coefficient of pressure on section $y/b=0.2$ . . . . .	33
	a    NASA [19]. . . . .	33
	b    New algorithm. . . . .	33
4.27	Comparison of distribution of coefficient of pressure on section $y/b=0.65$ . . . . .	34

a	NASA [19]. . . . .	34
b	New algorithm. . . . .	34
4.28	Comparison of distribution of coefficient of pressure on section $y/b=0.8$ . . . . .	34
a	NASA [19]. . . . .	34
b	New algorithm. . . . .	34
4.29	Comparison of distribution of coefficient of pressure on section $y/b=0.95$ . . . . .	35
a	NASA [19]. . . . .	35
b	New algorithm. . . . .	35
4.30	Coarse mesh. . . . .	36
4.31	Field of pressure given in Pa for finest mesh level. . . . .	38
4.32	Pressure on bottom boundary of domain. Results from all three meshes are shown. . . . .	38
4.33	Field of velocity given in m/s. . . . .	39
a	Coarse mesh. . . . .	39
b	Medium mesh. . . . .	39
c	Fine mesh. . . . .	39
4.34	Field of temperature given in K. . . . .	41
a	Coarse mesh. . . . .	41
b	Medium mesh. . . . .	41
c	Fine mesh. . . . .	41
4.35	Field of density given in $\text{kg/m}^3$ for finest mesh level. . . . .	42

## List of Tables

4.1	Thermophysical properties of air used in simulation. . . . .	11
4.2	Comparison of main mesh and calculation parameters. . . . .	17
4.3	Comparison of calculation time. . . . .	21
4.4	Comparison of duration of calculations. . . . .	30
4.5	Names of boundaries of domain. . . . .	32
4.6	Properties of fluid used in simulations. . . . .	36
4.7	Comparison of meshes and temporal performance. . . . .	37

# Nomenclature

## Roman Symbols

Symbol	Units	Description
$C$		constant
$c$	m/s	Speed of sound
$\mathbf{d}$	m	Vector between two cells centres
$c_p$	J/kg K	Specific heat capacity with constant pressure
$c_v$	J/kg K	Specific heat capacity with constant volume
$E$	J/kg	Total energy
$\mathbf{F}$		Flux vector
$e$	J/kg	Specific energy
$k$	J/kg	Turbulent kinetic energy
$L$	m	Characteristic length
$p$	Pa	Pressure
$p_0$	Pa	Total pressure
$R$	J/kgK	Universal gas constant
$R_{spec}$	J/kgK	Specific gas constant
$S$	J/kg K	Entropy
$\mathbf{S}$	$m^2$	Surface area vector
$s$	m/s	System signal speed
$T$	K	Thermodynamic temperature
$T_0$	K	Total temperature
$t$	s	Time
$u$	m/s	One-dimensional velocity
$\mathbf{U}$		Vector of conserved variables
$V$	$m^3$	Volume
$\mathbf{u}$	m/s	Velocity vector
$w$		Scalar quantity
$w_L$		Scalar quantity left of shock
$w_R$		Scalar quantity right of shock
$\mathbf{x}$	m	Spatial position vector

## Greek Symbols

Symbol	Units	Description
$\alpha_{AoA}$		Angle of attack
$\tilde{\alpha}$		Roe averaged shock strength
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Density
$\Gamma$		Diffusivity
$\gamma$		Isentropic expansion coefficient
$\mu$	Pa s	Dynamic viscosity
$\mu_t$	Pa s	Turbulent dynamic viscosity
$\kappa$		Constant
$\lambda$		Eigenvalue of matrix
$\tilde{\lambda}$		Roe averaged eigenvalue of constant coefficient matrix
$\varepsilon$	J/kg s	Turbulent kinetic energy dissipation rate
$\omega$	s <sup>-1</sup>	Specific dissipation
$\phi$		Tensorial quantity
$\tilde{\phi}$		Roe averaged tensorial quantity

## Dimensionless Numbers

Symbol	Definition	Description
$Co$	$Co = \frac{\mathbf{U}_f \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}} \Delta t$	Courant number
$Ma$	$Ma = \frac{u}{\sqrt{\gamma R_{spec} T}}$	Mach number
$Pr$		Prandtl number
$Re$	$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$	Reynolds number

## Sažetak

### Numeričke simulacije stlačivog strujanja fluida korištenjem spregnutog algoritma

U ovom radu pristupilo se validaciji numeričkog algoritma za rješavanje strujanja visoke brzine. Algoritam je pisan u okruženju OpenFOAM te je nov u tom kontekstu. Prvo se predstavilo glavne matematičke i numeričke probleme koje se susreće u teoriji poput Riemannovog problema te načina rješavanja tog problema. Opisani su ponuđeni rješavači Riemannovog problema uz ostale diskretizacijske sheme koje su standardne u računalnoj dinamici fluida. Algoritam koji koristi gustoću kao glavnu proračunsku varijablu se validiralo na temelju slučajeva za koje se moglo naći eksperimentalne i numeričke rezultate. Pokazalo se kako djeluje profinjenje proračunske mreže na rezultate te kakve rezultate daje u odnosu na algoritme koji koriste tlak kao glavnu proračunsku varijablu. U proračunima je korišten isključivo  $k - \omega$  SST model turbulencije zbog visokih iznosa Reynoldsovog broja, osim u jednom slučaju za kojeg se pretpostavilo kvazilaminarno strujanje. Slučajevi koji su uzeti su geometrije krila, jednostavni "shock tube" i kovergentno-divergentne mlaznice, dakle relevantni i za industrijsku primjenu. Rezultati proračuna su prikazani grafički u vidu polja primitivnih varijabli i bezdimenzijskih značajki.

## Abstract

### **Numerical Simulaton of Compressible Flows using a Coupled Density-Based Solution Algorithm**

In this work the validation of new algorithm was done. Algorithm is written in OpenFOAM environment and it is new in that context. Firstly, main mathematical and numerical problems were introduced as well as ways to solve those problems such as Riemann problem. Approximate Riemann solvers which are available in new code were theoretically described. This algorithm which uses density as main calculation variable was validated against cases for wich results were available in literature or internet. The impact of mesh refinement was shown and also the comparison against pressure-based algorithm. In all cases except one  $k - \omega SST$  turbulence model was used because of very high Reynolds numbers. In one of cases quasi-laminar flow was assumed. Geometries in simulated cases are a transonic wing, shock-tube and convergent-deivergent nozzles, namely, cases that are of interes of industry. Results of simulations were graphically shown as fields of primitive variables and dimensionless numbers.

# 1. Introduction

Modern engineering methods of calculation and visualisation have greatly changed compared to traditional ones. Today they mostly rely on computational resources which develop with astonishingly quick pace. One of the most propulsive areas of engineering is computational fluid dynamics or CFD for short. Basis for that are already developed mathematical and numerical models along with many experiments conducted so far. One of most relevant code libraries is called OpenFOAM which is also open source. This makes it ideal for academic circles because it allows great environment for developing special applications based on finite volumes method.

One area of engineering that uses CFD for long now is aircraft industry. It problems are related to gas dynamics and specific effects that can be found there. These effects include shock waves in transonic, supersonic and hypersonic flights. Some interactions of those shocks can deteriorate performance of wings greatly, therefore these should be modeled to find a way to avoid them. Algorithms that are of significance to this area are mostly density-based or DB for short with some kind of Riemann solvers. These kinds of flows are governed by set of hyperbolic equations. There is new algorithm in OpenFOAM that does just that: solves hyperbolic equations and Riemann problem using density as main calculating variable.

As it is new in context of OpenFOAM it needs to be validated and tested against available experiment results and results from other relevant computational codes. Validation process in this work will include comparison against pressure-based or PB solver to show adequacy of DB solver for these specific problems.

In the first Chapter main mathematical ideas considering hyperbolic equations, Riemann problem and both Euler and Navier-Stokes systems of equations will be presented. After that main numerical procedures and methods specific for this work and solver will very briefly be presented and explained. After that, presentation of validation cases results will be made. There will be short explanation of problems found within algorithm and next steps that should be made to improve algorithm.



## 2. Mathematical Model

In this section governing equations of flow model will be presented. Some specific phenomenon considering high-speed compressible flow will also be included.

### 2.1. The Euler Equations

The Euler equations are system of non-linear hyperbolic equations of conservation laws that govern fluid flow. It has time derivation which makes it transient. To complete the system, equations of state need to be defined. In one dimension Euler equations are:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (2.1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u + p)_x = 0, \quad (2.2)$$

$$E_t + (u(E + p))_x = 0. \quad (2.3)$$

Here, index  $t$  states that this is time derivative and  $x$  that this is spatial derivative.

Total energy  $E$  is defined by:

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e, \quad (2.4)$$

in which first term on the right hand side is kinetic energy and second is internal energy of the fluid. Specific internal energy is  $e$ .

To complete system of equations, equation of state for perfect gas is defined:

$$p = \rho RT, \quad (2.5)$$

in which  $R$  is constant depending on fluid in question and caloric equation of state:

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (2.6)$$

in which  $\gamma$  is constant depending on fluid. Combining equations (2.4) and (2.6), gives  $E$  in form of  $E = E(\rho, p)$ :

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}\rho u^2. \quad (2.7)$$

One more thermodynamical quantity is entropy  $S$  which. Roughly speaking, this

measures the disorder in the system [1]. The entropy is defined up to an additive constant by:

$$S = c_v \log(p/\rho^\gamma) + \text{constant}. \quad (2.8)$$

This can be solved for  $p$  to give:

$$p = \kappa e^{S/c_v} \rho^\gamma, \quad (2.9)$$

where  $\kappa$  is constant.

From the Euler equations next relation is obtained:

$$S_t + uS_x = 0 \quad (2.10)$$

which says that entropy is constant along particle paths in regions of smooth flow. It turns out that the equation of state gives  $p$  as function of  $\rho$  and  $S$  alone as (2.9) for polytropic gas. In this form partial derivative of  $p$  plays fundamental role: its square root  $c$  is the local speed of sound. For polytropic gas this gives:

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{constant}} = \gamma \kappa e^{S/c_v} \rho^{\gamma-1} = \gamma p / \rho \quad (2.11)$$

which gives:

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho}. \quad (2.12)$$

The most important property of entropy is the fact that in smooth flow entropy remains constant on each particle path. While if particle crosses a shock the entropy may jump, but must increase.

## 2.2. The Riemann Problem

Conservation laws together with piecewise constant data having a single discontinuity is known as Riemann problem [1]. As an example, Burgers' equation is given [1]:

$$w_t + Aw_x = 0 \quad (2.13)$$

with piecewise constant initial data:

$$w(x, 0) = w_0(x) = \begin{cases} w_L & x < 0 \\ w_R & x > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

The form of the solution depends on relation between  $w_L$  and  $w_R$ .

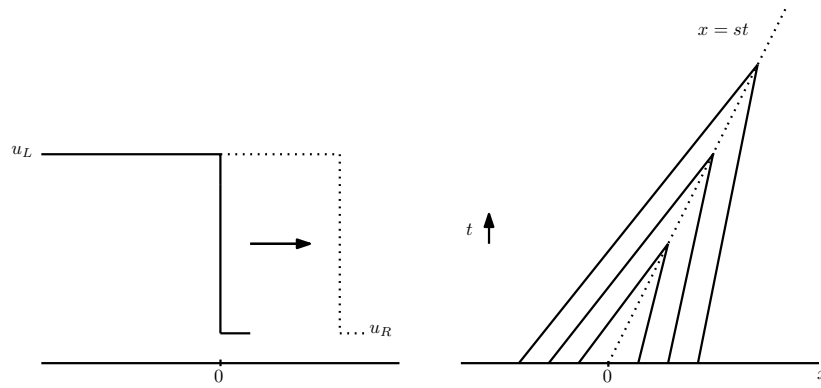


Figure 2.1: Shock wave [1].

**Case 1**  $w_L > w_R$ .

In this case there is a unique weak solution:

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & x < st \\ w_R & x > st \end{cases} \quad (2.15)$$

where  $s$ :

$$s = \frac{w_L + w_R}{2} \quad (2.16)$$

is the shock speed, the speed at which discontinuity travels. In Figure 2.1 shows that characteristics in each of the regions where  $w$  is constant go into the shock as time advances.

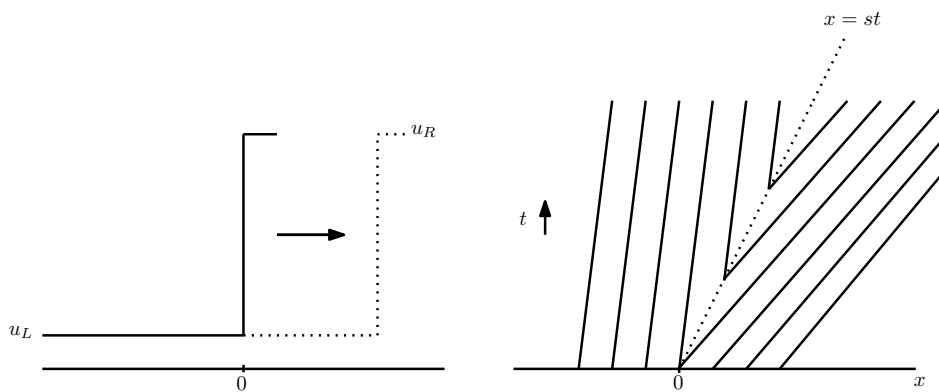


Figure 2.2: Entropy-violating shock [1].

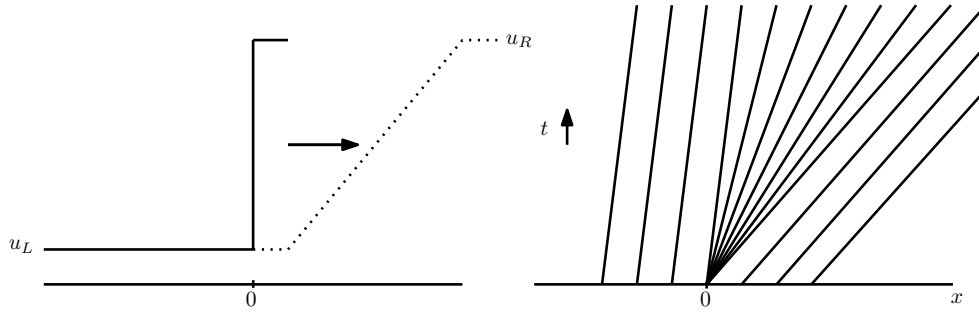


Figure 2.3: Rarefaction wave [1].

**Case 2**  $w_L < w_R$ .

In this case there are infinitely many weak solutions. One of these is again (2.15), (2.16) in which discontinuity propagates with speed  $s$ . Here characteristic go out of the shock as shown in Figure 2.2. This solution is not stable to perturbations. If data is smeared out slightly, or if small amount of viscosity is added to equation, the solution changes completely.

Another weak solution is rarefaction wave [1]:

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & x < w_L t \\ x/t & w_L t \leq x \leq w_R t \\ w_R & x > w_R t \end{cases} \quad (2.17)$$

This solution is stable to perturbations and is in fact the vanishing viscosity generalized solution 2.3.

### 2.2.1. Rankine-Hugoniot Condition

For arbitrary flux function  $f(w)$  this same argument gives the following relation between the shock speed  $s$  and the states  $w_L$  and  $w_R$ , called Rankine-Hugoniot jump condition:

$$f(w_L) - f(w_R) = s(w_L - w_R). \quad (2.18)$$

For scalar problems this gives simply:

$$s = \frac{f(w_L) - f(w_R)}{(w_L - w_R)} = \frac{[f]}{[w]}, \quad (2.19)$$

where  $[\cdot]$  indicates the jump in some quantity across discontinuity.

For systems of equations such as the Euler,  $w_L - w_R$  and  $f(w_L) - f(w_R)$  are both vectors while  $s$  is still a scalar.  $s$  cannot be always solved to make 2.18 hold. Instead, only certain jumps  $w_L - w_R$  are allowed, namely those for which the vectors

$f(w_L) - f(w_R)$  and  $w_L - w_R$  are linearly independent.

As an example in [1] linear system with  $f(w) = Aw$  and 2.18 is given:

$$A(w_L - w_R) = s(w_L - w_R) \quad (2.20)$$

where  $w_L - w_R$  must be an eigenvector of the matrix  $A$  and  $s$  is the associated eigenvalue.

### 2.3. Navier-Stokes System of Equations

In both [2] and [1] the effect of introducing diffusion and viscosity is shown in detail. Here, only system of Navier-Stokes equations is given with short description of each term of the equation. Governing system of equations of fluid flow is given:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] = 0. \quad (2.23)$$

Terms of equation (2.22) from left to right are:

- Time derivative - rate of change per unit of volume.
- Convection term - the efflux by convection per unit volume.
- Diffusion term - the rate of transport due to diffusion.
- Pressure gradient term.

Viscosity in fluid is modelled by diffusion term. Convection term is the source of non-linearity and therefore needs to be linearised in discretisation process.

## 3. Numerical Considerations

In former Chapter main mathematical issues were briefly presented. In this Chapter only approximate Riemann solvers available in new algorithm will be introduced.

### 3.1. Approximate Riemann Solvers

#### 3.1.1. HLLC Approximate Riemann Solvers

HLLC approximate Riemann solver was developed by Toro, Spencer and Spears [3] based on HLL solver which was developed by Harten, Lax and van Leer [4]. The HLL could not resolve contact discontinuities, shear waves and material interfaces or any other intermediate waves. These were simply taken as average of the star field. HLLC introduced missing middle waves back into approximate Riemann solver. Therefore it has four constant data regions. This gives three different signal speeds namely  $s_L$ ,  $s_*$  i  $s_R$ . Integration over time gives:

$$\left(\frac{s_* - s_L}{s_R - s_L}\right) \mathbf{U}_{*L} + \left(\frac{s_R - s_*}{s_R - s_L}\right) \mathbf{U}_{*R} = \mathbf{U}^{hll}. \quad (3.1)$$

In equation (3.2)  $\mathbf{U}^{hll}$  is described in HLL method:

$$\mathbf{U}^{hll} = \frac{s_R \mathbf{U}_R - s_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{s_R - s_L}. \quad (3.2)$$

Solution to the Riemann problem in HLLC is given by:

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & , \text{ if } \frac{x}{t} \leq s_L \\ \mathbf{U}_{*L} & , \text{ if } s_L \leq \frac{x}{t} \leq s_* \\ \mathbf{U}_{*R} & , \text{ if } s_* \leq \frac{x}{t} \leq s_R \\ \mathbf{U}_R & , \text{ if } \frac{x}{t} \geq s_R \end{cases}. \quad (3.3)$$

This definition of Riemann problem makes obvious that fluxes  $F_{*L}$  i  $F_{*R}$  need to be determined. By directly applying Rankine-Hugoniot Conditions across each of the

waves of speed  $s_L$ ,  $s_*$ , and  $s_R$  gives:

$$\mathbf{F}_{*L} = \mathbf{F}_L + s_L(\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_{*R} = \mathbf{F}_{*L} + s_*(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_{*L}), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F}_{*R} = \mathbf{F}_R + s_R(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_R). \quad (3.6)$$

There are more unknowns than equations and some extra conditions need to be imposed in order to solve algebraic problem. For pressure and normal component of velocity it is:

$$\begin{aligned} p_{*L} &= p_{*R} = p_*, \\ u_{*L} &= u_{*R} = u_*, \end{aligned} \quad (3.7)$$

and tangential velocity components it is:

$$\begin{aligned} v_{*L} &= v_L, \quad v_{*R} = v_R, \\ u_{*L} &= u_L, \quad u_{*R} = u_R. \end{aligned} \quad (3.8)$$

In addition, it is convenient to set [2]:

$$s_* = u_*, \quad (3.9)$$

thus if an estimate for  $s_*$  is known, the normal velocity component  $u_*$  in the *star region* is known. From 3.7 expression for the speed  $s_*$  purely in terms of speeds  $s_L$  and  $s_R$  can be obtained:

$$s_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (s_L - u_L) - \rho_R u_R (s_R - u_R)}{\rho_L (s_L - u_L) - \rho_R (s_R - u_R)}. \quad (3.10)$$

Thus, only estimation for  $s_L$  and  $s_R$  need to be known.

### 3.1.2. Roe Approximate Riemann Solvers

One of mostly used approximate Riemann solvers is work from Roe, who presented it in a paper in 1981 in [5]. Solver was refined by Roe and Pike in 1985 [6] whereby the computation of the necessary items in information does not explicitly require the Roe averaged Jacobian matrix. This second methodology appears to be simpler and thus is useful in solving Riemann problem for new, complicated sets of hyperbolic conservation laws, or for conventional systems but for complex media. This Roe and Pike refined version will be briefly introduced.

The main issue is again to calculate numerical fluxes defined with equations [2]:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_L + \sum_{\tilde{\lambda} \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \quad (3.11)$$

or

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}_R - \sum_{\tilde{\lambda} \geq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (3.12)$$

To calculate fluxes, eigenvalues  $\tilde{\lambda}_i$ , and eigenvectors  $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$  of matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  need to be calculated. It is also necessary to calculate wave strengths  $\tilde{\alpha}_i$  for solution to be obtained. Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  is *constant* coefficient matrix that replaces Jacobian. This approach linearises non-linear system. Using parameter vectors (for more detailed description see [2, 5]) and averaged parameter vectors one can obtain Roe averaged variables using equation:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\sqrt{\rho_L} \varphi_L + \sqrt{\rho_R} \varphi_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (3.13)$$

Hence, to calculate numerical flux following algorithm is used [2]:

1. Compute the Roe averaged values for  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{H}$  i  $\tilde{c}$  according to 3.13.
2. Compute the averaged eigenvalues  $\tilde{\lambda}_i$ .
3. Compute the averaged right eigenvectors  $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ .
4. Compute the wave strengths  $\tilde{\alpha}_i$ .
5. Use all of the above quantities to compute  $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$  according to any of the formulae 3.11, 3.12.

### 3.1.3. Rusanov Flux Approximate Riemann Solvers

Rusanov flux algorithm is simplification of Roe approximate solver [7]. Same algorithm is used, but after computing eigenvalues only maximum is chosen using expression [8, 7]:

$$\lambda^{max} = \max_i |\lambda^i| = c + |u|. \quad (3.14)$$

When  $\lambda^{max}$  is obtained this way, then flux is computed using:

$$\mathbf{F}^{Rus} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \lambda^{max} (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L), \quad (3.15)$$

where  $\mathbf{Q}_L$  and  $\mathbf{Q}_R$  are parameter vectors.

In this work, only Rusanov flux solver was used.



## 4. Algorithm Validation

Main numerical methods which are included in new algorithm were introduced in former Chapter. In this Chapter, overview and commentary of calculated validation cases will be made. Results will be shown as graphical representation of field of primitive variables such as velocity, pressure, density, temperature and turbulence parameters. Results will be compared against same cases described in literature. Also, commentary of quality of results will be given. All cases were simulated using algorithm with Navier-Stokes system of equations. Also, in all cases  $k - \omega SST$  turbulence model was used, except in SWBLI.

### 4.1. Seiner Nozzle

Nozzles are widely used in industry and technology because they allow acceleration of flow to very high values. One of mostly used applications is propulsion of aeroplanes and rockets. But besides that, they are often used in metallurgy for decarbonisation of steel. There are three main types of nozzles:

- convergent,
- divergent,
- convergent-divergent or con-di or de Laval nozzle.

Convergent-divergent is used to accelerate fluid flow to supersonic speeds. In the throat of the nozzle maximum velocity of  $Ma = 1$  is achieved assuming pressure at the inlet is sufficiently high. This state is called the choked flow. After that comes expansion of fluid in which pressure drops and flow accelerates which can be seen in Figures 4.7 and ???. On one such nozzle, Seiner conducted experiment with heated jet flow which is described in [9]. This experiment was used as basis for series of numerical simulations at NPARC. In this work, both are used as references.

Fluid that was simulated was air. Properties are specified in 4.1 and are constant. This case is specific due to higher temperature of air which is  $T_0 = 313.14$  K. In literature there are experiments with somewhat higher temperatures of air. These can be used for further validation of new algorithm.

Table 4.1: Thermophysical properties of air used in simulation.

Property	
$M = 28.9 \text{ kg/kmol}$	Molar weight
$C_p = 1007 \text{ J/kg K}$	Specific heat capacity with constant pressure
$\mu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$	Dynamic viscosity
$Pr = 0.7$	Prandtl number
$\gamma = 1.4$	Isentropic expansion coefficient

#### 4.1.1. Mesh

Geometry and mesh was obtained from [10]. Axisymmetric flow was assumed. Therefore, wedge geometry with 5 degrees azimuthal angle was made. Mesh is structured and consists of 223120 hexagonal cells. Domain and details of convergent-divergent nozzle are shown on figure 4.1.

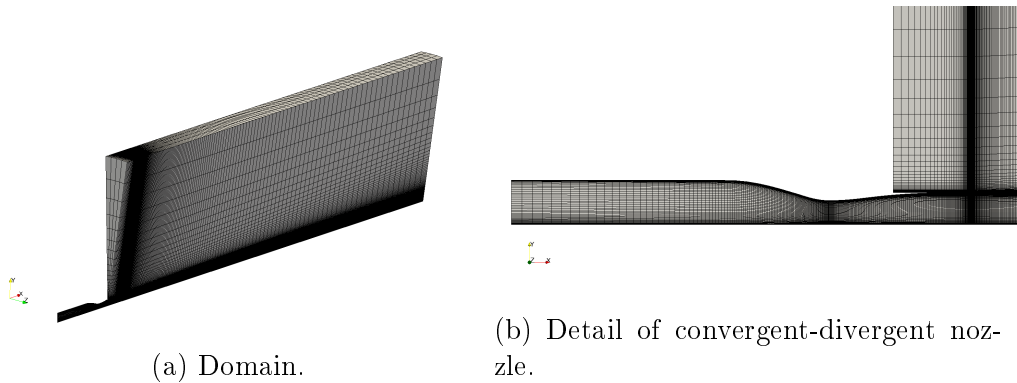


Figure 4.1: Geometry of the domain and nozzle.

Exit diameter of the nozzle is  $d_{ml} = 91.44 \text{ mm}$ .

#### 4.1.2. Boundary and Initial Conditions

Boundary and initial conditions were taken from [10]. Total pressure and temperature were given at the inlet of the nozzle. Area of tube upwind of the nozzle and nozzle until the throat was initialized with same conditions as inlet. This is shown in figure 4.2. Total pressure was set at  $p_0 = 793034 \text{ Pa}$  and temperature at  $T_0 = 313.14 \text{ K}$ . Velocity was initialised throughout of domain at  $Ma = 0.01$  wich equals to  $u_{init} = 3.5 \text{ m/s}$ . Tube surface and surface of the nozzle were considered as viscous walls so the velocity condition for those was chosen as `noSlip` boundary condition. On the inlet into domain above nozzle total pressure condition of

$T_0 = 313.14$  K was set imitating condition of the atmosphere. Total temperature was set at  $T_0 = 294.4$  K.

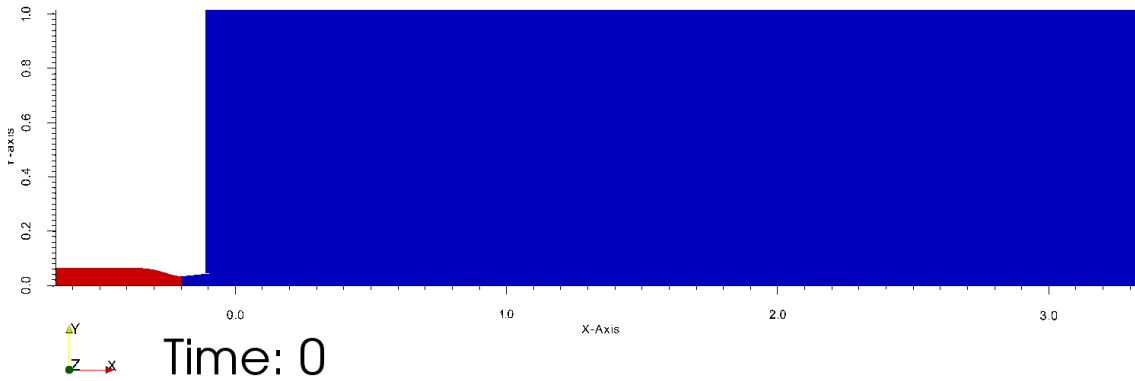


Figure 4.2: Initialized fields of total conditions on the inlet into the nozzle.

This particular simulation was very demanding in terms of computational resources and therefore was not calculated until full convergence. Full simulation of few seconds perhaps would require at least small cluster computer with few tenths of processing units. Calculation time until moment shown in figures 4.3, 4.4, 4.5 and 4.7 was  $\approx 244$  h on IntelCore i7 quad 3.5 GHz using four cores . But in spite of insufficiently long time of calculation simulation gave physically valid results.

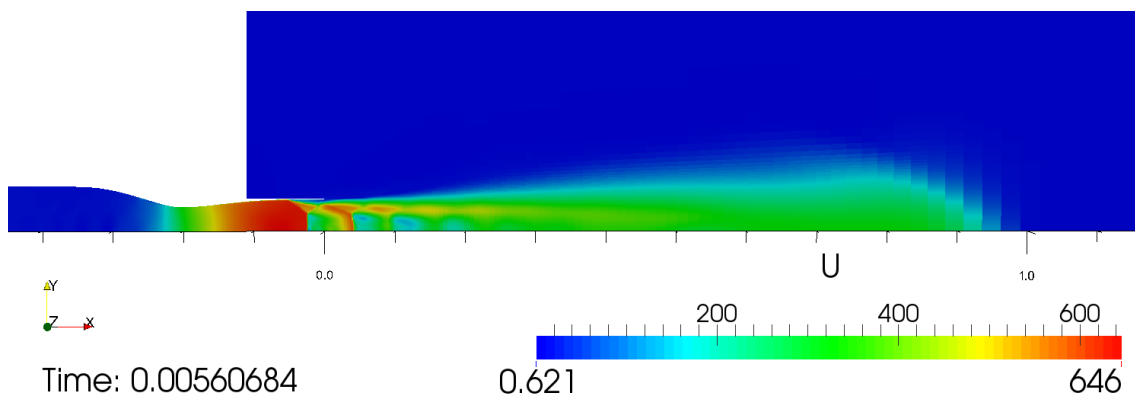


Figure 4.3: Velocity in the nozzle.

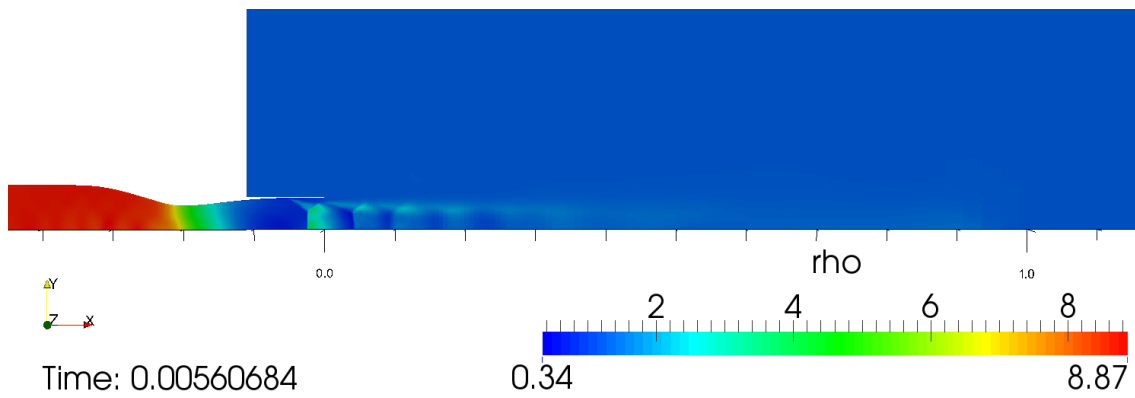


Figure 4.4: Field of density in the nozzle.

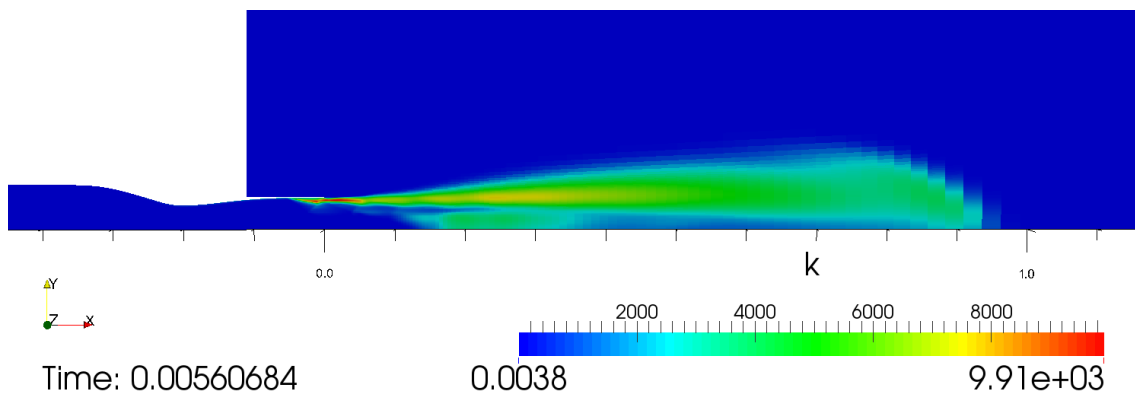


Figure 4.5: Field of turbulent kinetic dissipation in the nozzle.

Although simulation did not reach steady state, partial results show physical behaviour. Formations in the shape of diamonds can be seen. This often happens in the exhaust of jet engines. One such example is shown in Figure 4.6 taken from [11] where diamond shaped shocks can be seen.



Figure 4.6: Diamond shaped shock waves in the flumes of jet engine [11].

Confirmation of physicality of the results is  $Ma = 1$  in the throat of the nozzle shown in figure 4.7. This case can serve as validation of acceleration of algorithm in future. Calculation time should be shortened to around  $1/5$  of current calculation time. Acceleration methods which are available in literature should be implemented. These include but are not restricted to pseudo-time stepping, dual time stepping, and multigrid.

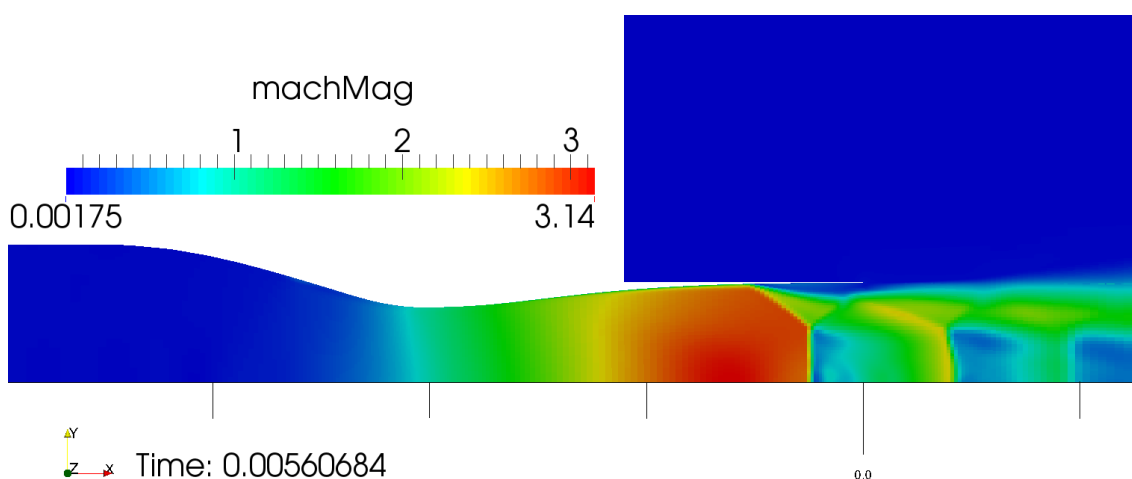


Figure 4.7: Distribution of Mach number within nozzle.

In [10] graphs of normalized velocity and turbulent kinetic energy on the axis of symmetry are presented. Velocity of normalisation was taken as velocity on the

axis of symmetry on the exit diameter of nozzle. On Figure 4.8 plots of results [10] are given compared also against experiment.

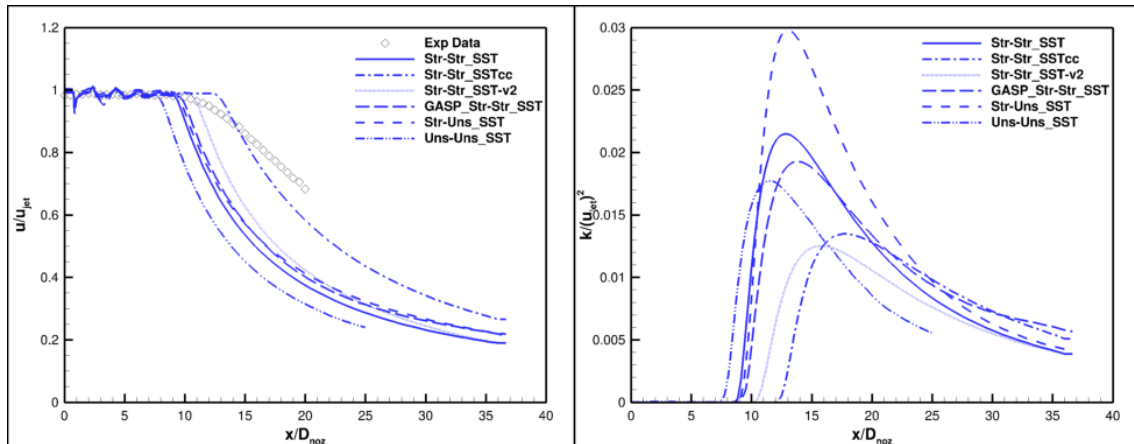


Figure 4.8: Normalized velocity and turbulent kinetic energy in the axis of symmetry [10].

Some similarities in plot of normalized velocity exist. Figures 4.9a and 4.9b are graphs retrieved from simulations.

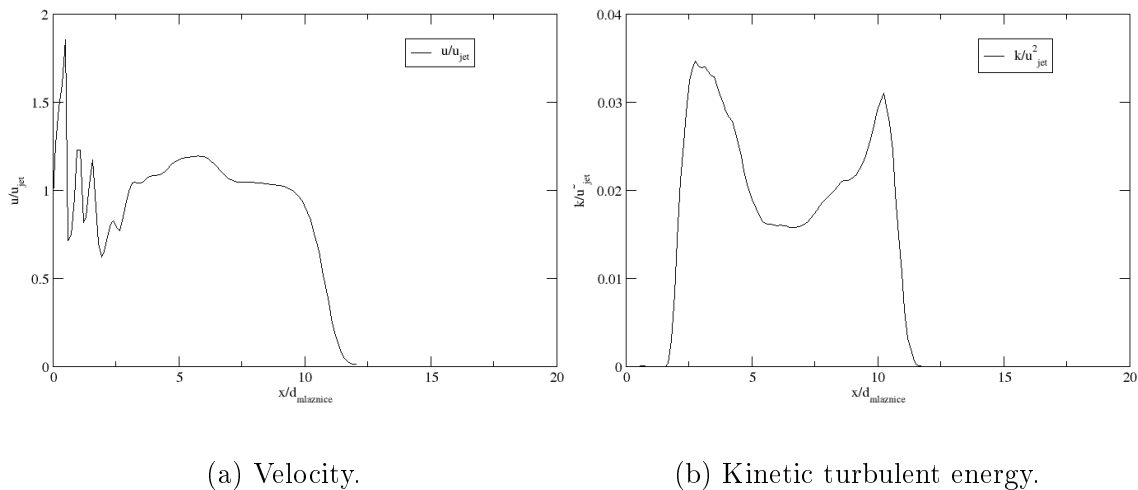


Figure 4.9: Plots of normalized values in the axis of symmetry of simulation.

Results of simulation shown in Figures 4.8 and 4.9a some similarities, for example curve of velocity begins decending at the same distance. Shape of the curve might be sign of good concurrence even to experiment, but that is far from definitive. This simulation has tu be calculated until it reaches steady state.

## 4.2. MADIC 2D Axisymmetric CD Boattail Nozzle

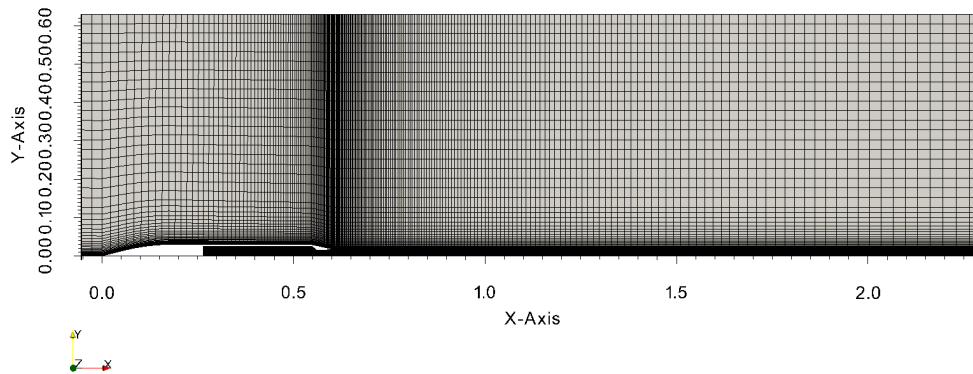
This case is documented and available at [12] and it is simulation of wind tunnel experiment described in [13]. MADIC stands for "Multidisciplinary and Design Industrial Consortium". It is a simulation of jet engine to test its efficiency. To shorten calculation time, axial symmetry was assumed. This means that 2D mesh is actually half of section through the axis of symmetry.

In this case, mesh refinement is also done in two levels of refinement. It was also basis for comparing density-based and pressure-based approach to solving compressible high-speed flow. Compared solvers are significantly different, where DB is transient and explicit, the PB is steady implicit.

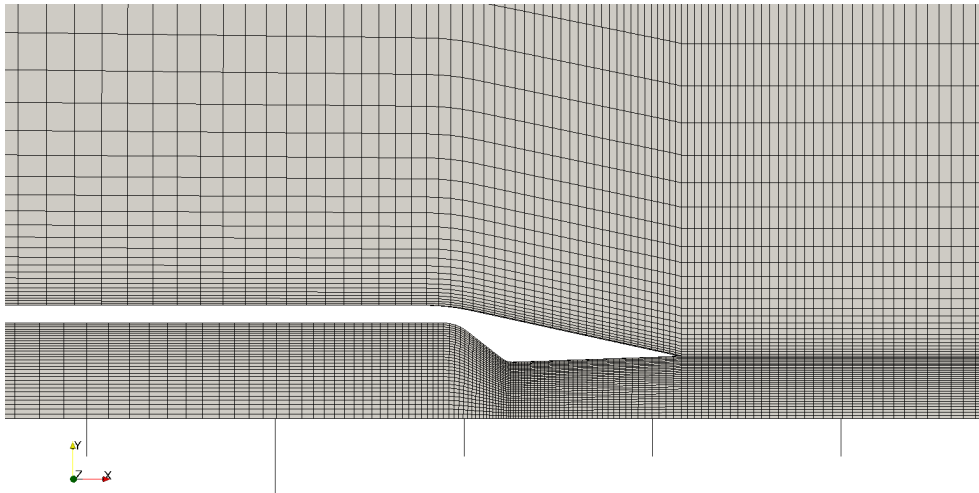
Fluid used in simulation is again air with properties same as already stated in Table 4.1 with assumption of constance in whole range of temperature and pressure.

### 4.2.1. Mesh

This case will show the difference between DB and PB approach alongside difference in mesh level of refinement. Domain of calculation and mesh is shown in Figure 4.10a for the coarse level. Origin of the coordinates is placed at the tip of the engine stern. Figure 4.10b shows detail of nozzle geometry which is again con-di type of nozzle.



(a) Domain.



(b) Detail of con-di nozzle.

Figure 4.10: 2D mesh of MADIC case.

Mesh is structured with all cells hexahedral.

Data on number of cells, maximum Courant number and maximum time step are given in Table 4.2.

Table 4.2: Comparison of main mesh and calculation parameters.

<i>Mesh Refinement Level</i>	<i>Number of Cells</i>	$Co_{max}$	$\Delta t_{Co_{max}}$
Coarse	18090	0.4	$6.5 \cdot 10^{-7}$
Fine	72360	0.3	$2 \cdot 10^{-7}$

Table 4.2 shows that using coarser mesh allows higher value of Courant number



which speeds up the calculation.

#### 4.2.2. Boundary and Initial conditions

To define problem of compressible flow, total pressure and temperature at the inlet of domain and static pressure at the outlet have to be given [14]. In supersonic flow, velocity and total conditions are given at the inlet and no boundary conditions are necessary at the outlet.

The boundary that coincides with the axis of symmetry is set as `symmetry` for all variables.

There are two inlets into domain in this case and both are subsonic. One is a freestream and one is inlet into the nozzle. Total temperature and pressure is given at both inlets. Temperature is equal for both inlets and has value of  $T_0 = 328.89$  K. At the outlet of the domain temperature is not given, and for all other boundaries `zeroGradient` boundary condition is imposed. Velocity is not given on any of boundaries except as `noSlip` on boundaries that coincide with engine surface. At freestream inlet total pressure is  $p_0 = 101422$  Pa and total pressure at the

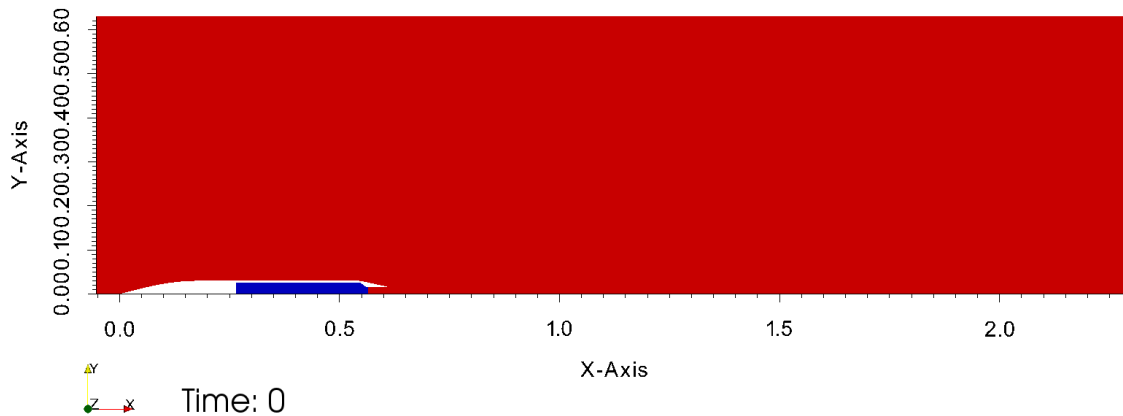


Figure 4.11: Initialized field of pressure and velocity.

Fields of pressure and velocity initial conditions are shown in Figure 4.11. Temperature is equal throughout domain with same value as at the inlet. Pressure is initialized through most of domain with value of  $p_{init} = 67000$  Pa. From nozzle throat to inlet, pressure is set at  $p_{init} = 99767$  Pa. Velocity is given throughout domain at  $u_{init} = 290.95$  m/s or in Mach number as  $Ma = 0.8$ . These conditions give Reynolds number of  $Re = 1.222 \cdot 10^7$  taking height of the domain as characteristic length. In the area upwind of nozzle throat velocity is set at  $u_{init} = 36.3$  m/s or

$Ma = 0.1$ . Fixed static pressure is set at the outlet with value of  $p_{init} = 66500$  Pa. All cases had same boundary and initial conditions.

Results of simulations differ significantly from ones described in [12] and [15]. Though there is one moment in time when there is some qualitative similarity of velocities in the vicinity of engine and pressure coefficient at the aft of the engine. That moment is different for every case. Also, there is difference in maximum values of variables between all cases. This can be seen in figures 4.12 and 4.13.

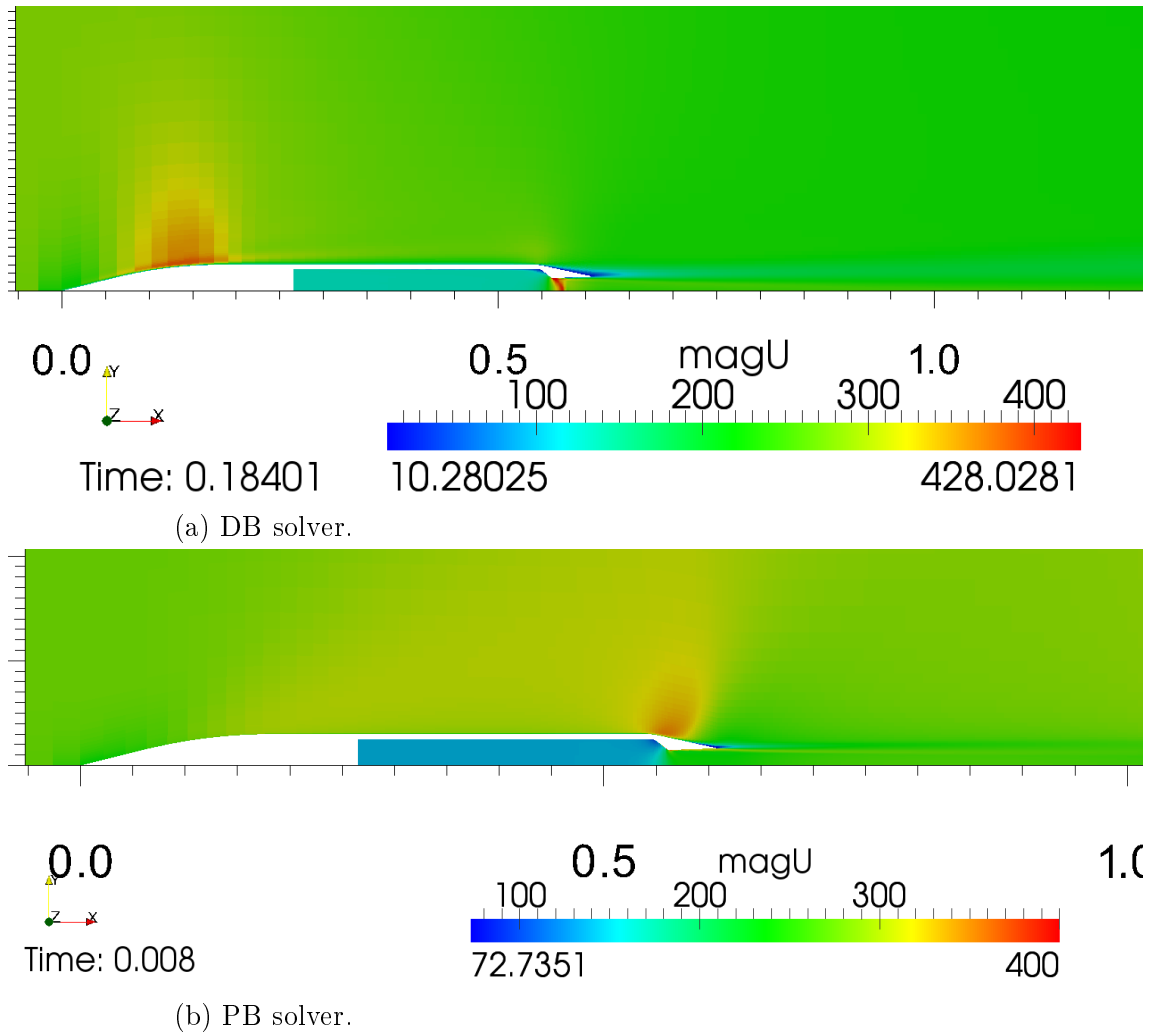


Figure 4.12: Moments of partial superposition for coarse meshes.

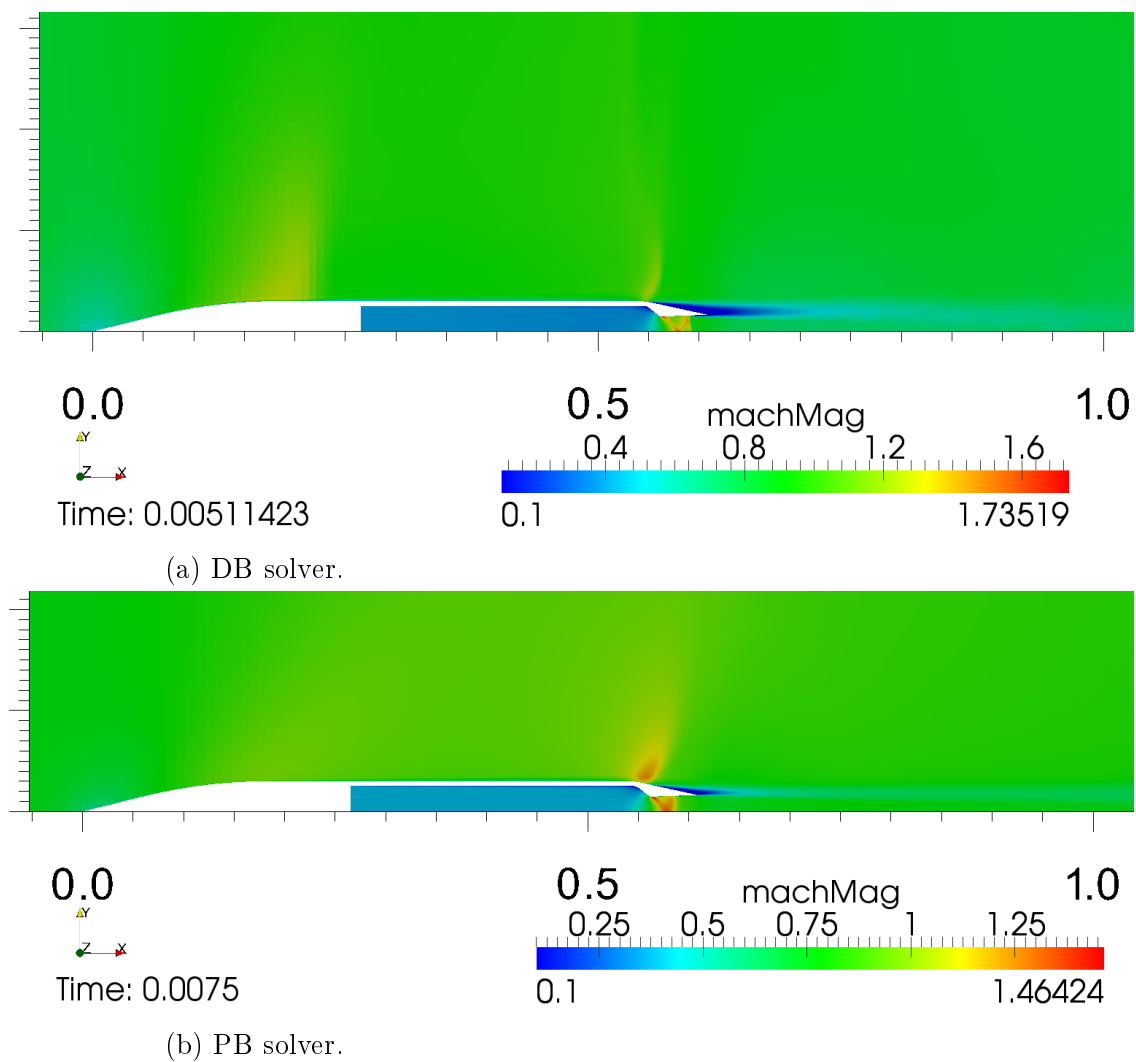


Figure 4.13: Moments of partial superposition for fine meshes.

Reason for difference of results is not fully known although it is clear how it happens. Namely, shortly after simulation starts, rarefaction wave creates on front of the engine. It collides afterwards with higher pressure downwind of the engine and creates strong shock somewhere around the aft of the engine. That shock then propagates downwind to the outlet of domain and pulls area of very low pressure to the outlet. That pressure is two or three times lower than fixed outlet pressure. All simulations end at this moment because of lack of physicality.

This difference in results is motivation for further work and investigation of causes of this problem and of course finally achieving superposition of results. Great differences in fields can be seen. Figure 4.12a shows shock that flickers in time that is moves back and forth. This is perhaps caused by lower values of velocity that is captured by solver because of mesh level. It can be expected for that wave to propagate downwind like in other cases.

It is necessary to find a way to avoid shock waves within the domain or to transmit them out of the domain. This perhaps can be achieved with wave transmissive or zero gradient boundary condition.

One positive consequence of difference of the results is that flow conditions made possible for shocks at the nozzle to create. These are very convenient for showing the difference between DB and PB approach.

### 4.2.3. Comparison of DB and PB Solvers

Main idea behind this case is to compare quality of results between DB and PB approach. Even before any simulations were made it was expected that DB will give better results in terms of shock resolution and place of shock.

Before presentation of results, comparison of computation time is given. Data are given in Table 4.3.

Table 4.3: Comparison of calculation time.

<i>Mesh level</i>	<i>Solver</i>	$t_{sim}$ in s	$t_{calc}$ in h	Number of CPU cores used	Co
Coarse	DB	0.25	14.7	1	0.4
	PB	0.085	1.5	1	
Fine	DB	0.076	19	4	0.3
	PB	0.176	1.4	4	

Big difference can be seen in terms of calculation times between DB and PB solver. PB which is implicit steady state is several times quicker than DB. PB solvers times of calculation should be at least reached with DB.

Figures 4.14a and 4.14b show comparison of results of both DB and PB solvers for coarse level mesh. Results that PB has given are very diffusive compared to DB and also it did not catch some of the shocks in the nozzle. Figure 4.14a shows the moment in which shock propagates towards bow of the engine that is recedes.

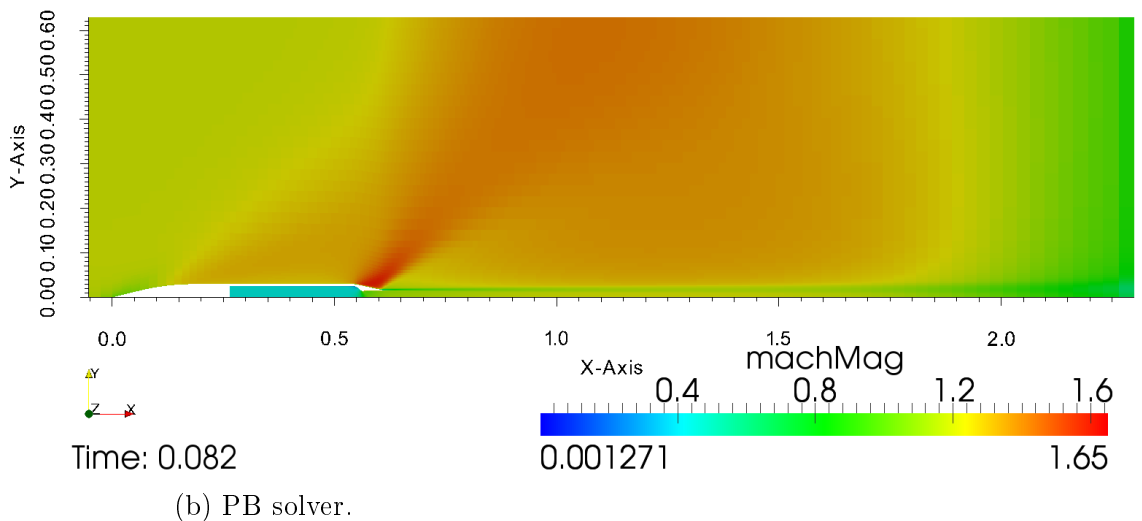
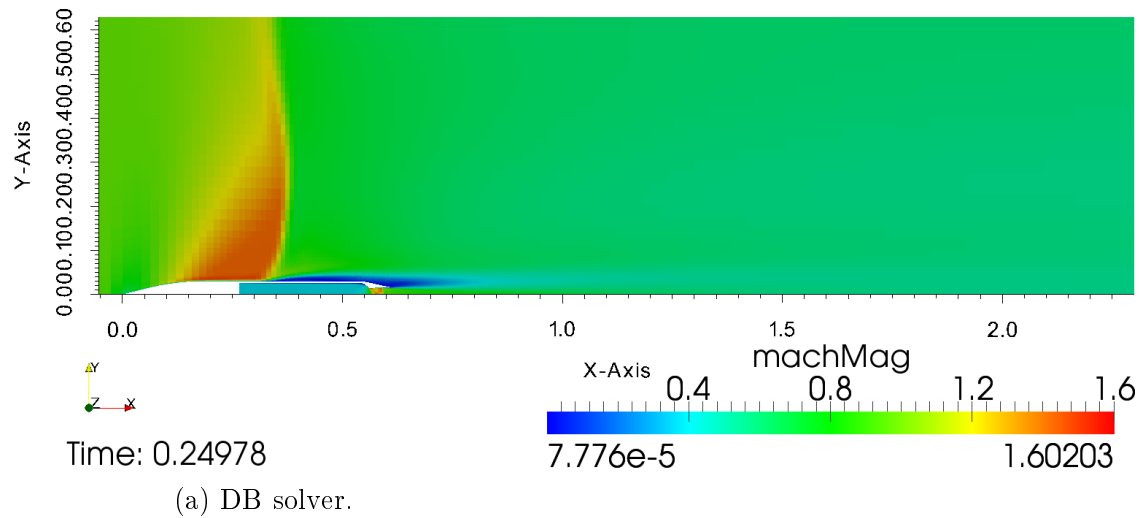


Figure 4.14: Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on coarse level mesh.

Former figures show velocity field given in Mach number. It can be seen that PB solver gives somewhat high velocities of freestream. To confirm validity of results coefficient of pressure on the aft of the engine is plotted over coordinates in x direction and compared to [12] and [15].

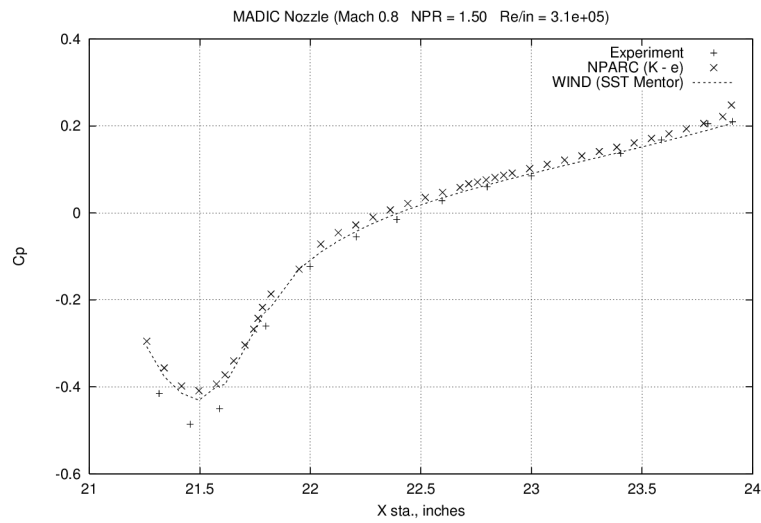


Figure 4.15: Plot of coefficient of pressure on the aft of the boattail nozzle from NASA [15].

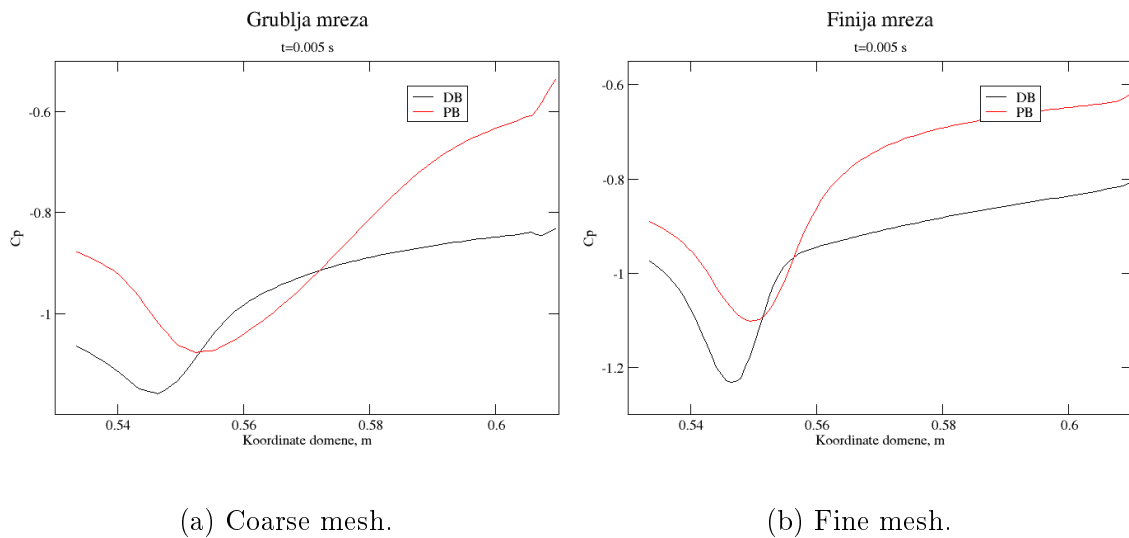


Figure 4.16: Comparison of pressure coefficients on the aft of the boattail nozzle at time  $t = 0.005$  of different meshes.

Graphs on Figures 4.16a and 4.16b show point of lowest pressure. In Figure 4.15 x coordinate is  $x(C_{p_{min}}) = 21.5$  inch which expressed in metric system is  $x(C_{p_{min}}) = 0.5461$  m. This is the point at which pressure has its minimum in simulations using DB solver. PB gives this minimum on wrong coordinate. There is difference in values of coefficient, but that might be due to wrong flow parameters.

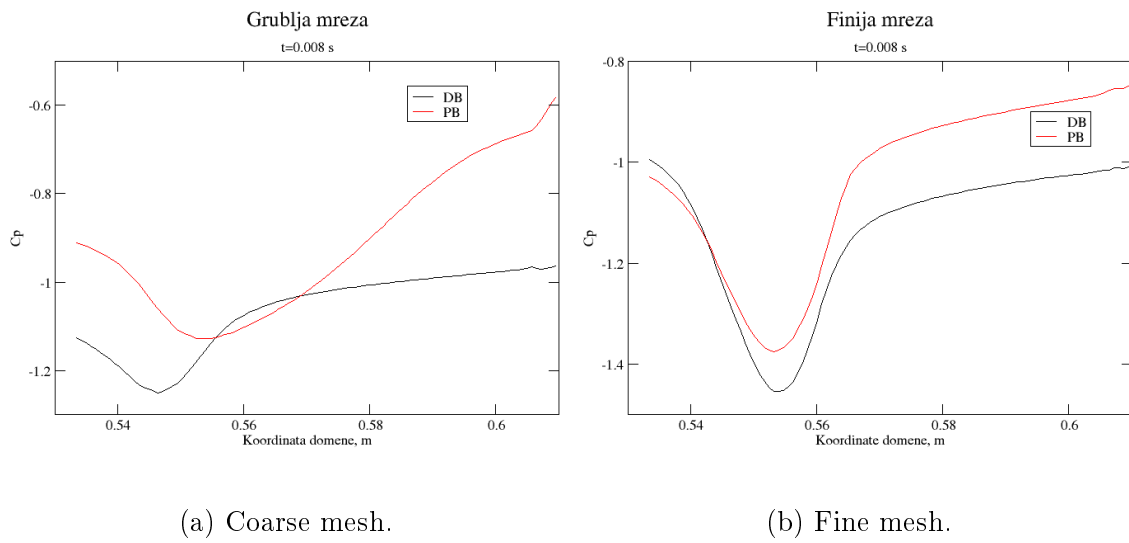


Figure 4.17: Comparison of pressure coefficients on the aft of the boattail nozzle at time  $t = 0.008$  of different meshes.

Figures 4.17a and 4.17b show moment in time in which solution begins to increasingly diverge from referent case [12]. Fine mesh with DB solver now has minimum point of pressure at the wrong coordinate.

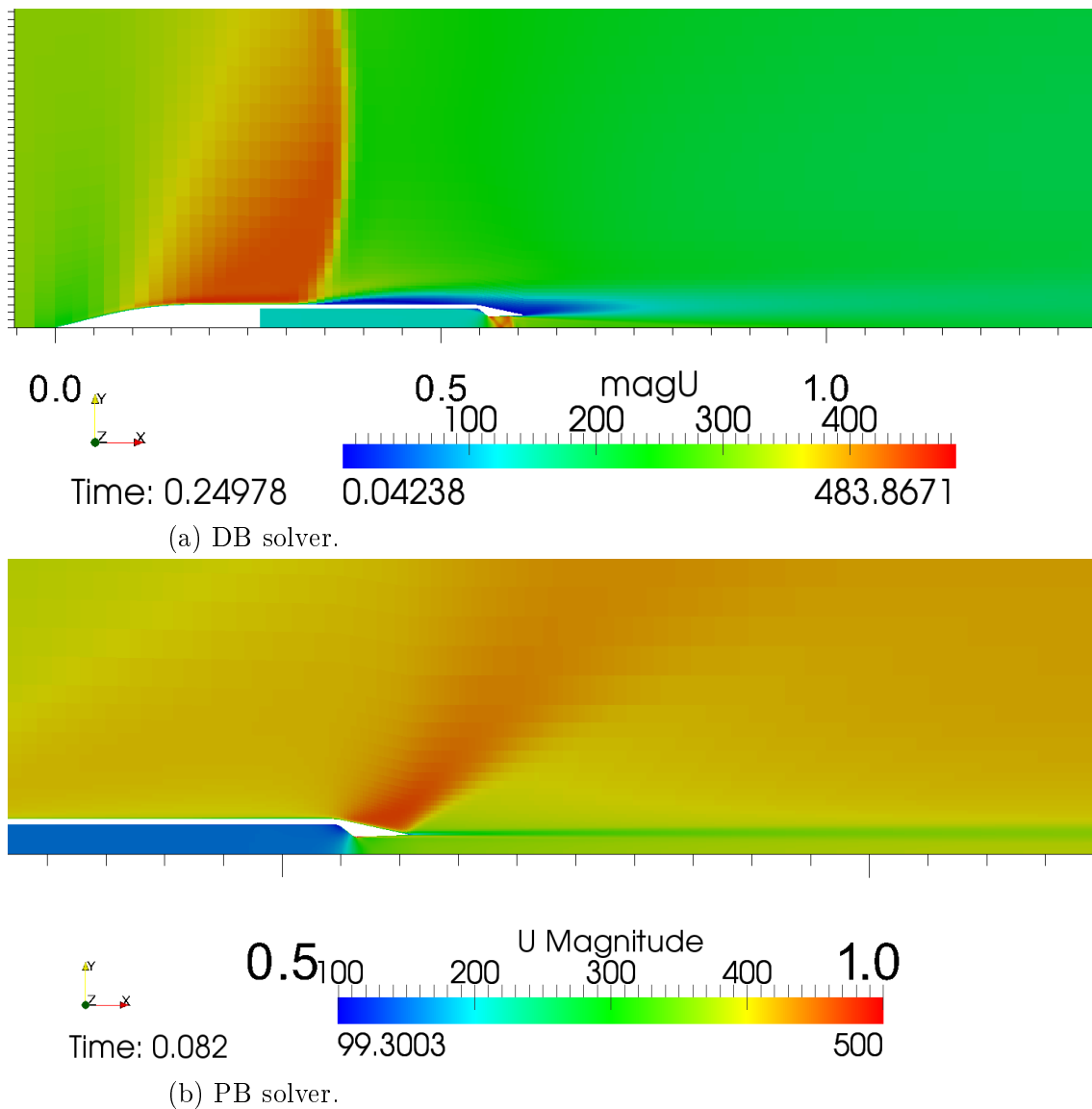


Figure 4.18: Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on coarse level mesh, nozzle detail.

Figures 4.18a and 4.18b show detail of nozzle in which great difference can be seen. DB solver gives shocks at the nozzle and with PB they can not even be seen, and they should be compared to 4.20b because strong shock propagated to the outlet of the domain. Also, rarefaction wave that travels from aft of the engine is very diffusive and no reflection can be seen. Only field of higher velocity which is very imprecise.

Figures 4.19a i 4.19b show comparison of results for DB and PB solvers on fine level mesh. Whole domain is shown to point at shock at the exit out of domain which creates non-physical conditions. Also, significant difference can be seen in representation of rarefaction wave from aft of the engine. DB gives much sharper



line and even reflection. With PB solver there exists no reflection just field of higher velocity.

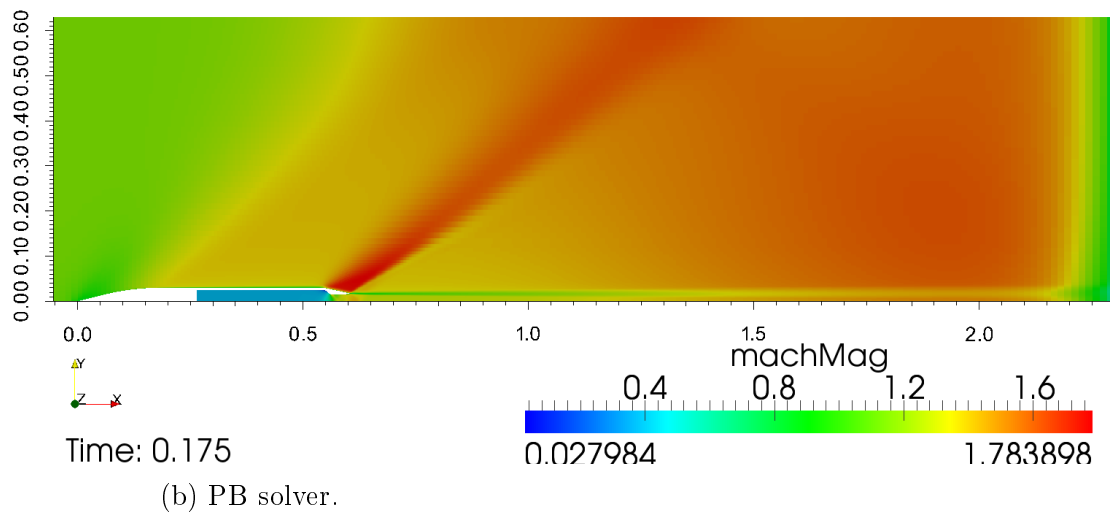
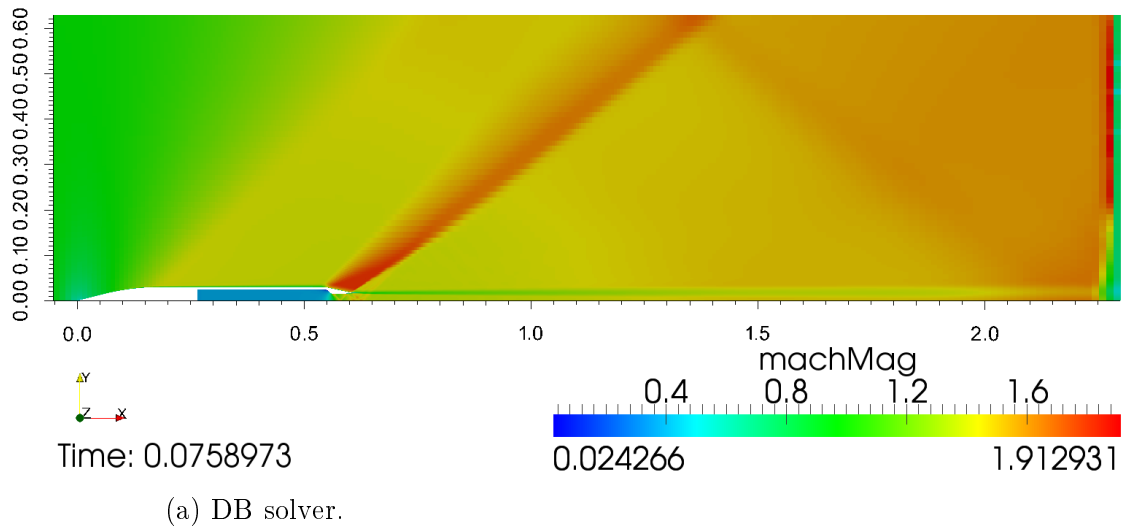
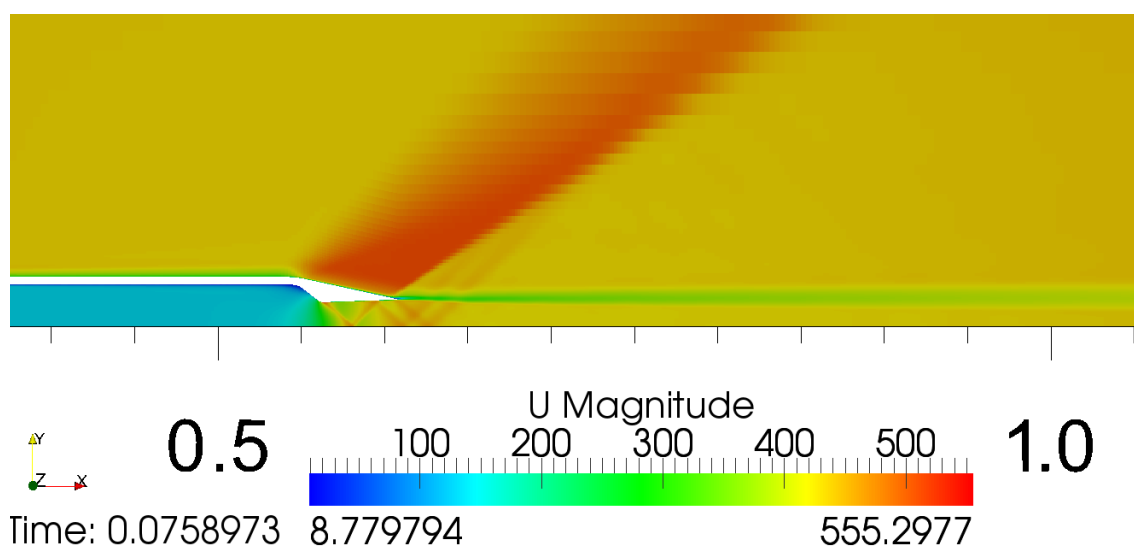
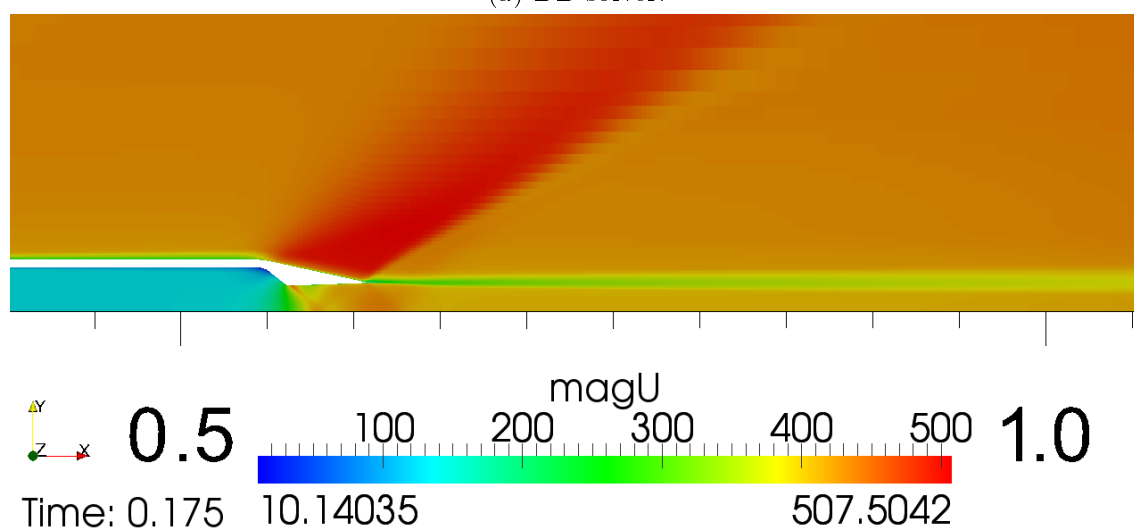


Figure 4.19: Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on fine level mesh.

Figures 4.20a and 4.20b show details of flow inside nozzle where oblique shocks appear. DB solver gives familiar diamonds shape of reflected shocks. PB on the other hand can not show shocks properly. They are very diffusive and blurred.



(a) DB solver.



(b) PB solver.

Figure 4.20: Comparison of results for different solvers with accent on shock waves on fine level mesh, nozzle detail.

Significant difference between results of DB and PB solver can be seen. Global maximum and minimum values of all variables do not match, and although PB can capture shock it can not capture any reflections whatsoever. This series of simulations shown significantly better results from DB solver compared to PB. Next step is to locate cause of problems for these simulations and to make them produce results as are stated in literature. Furthermore, other approximate Riemann solvers available in DB solver should be tested against each other and then against PB solver. This case can serve as point of testing for further research because of complex geometry of nozzle and two inlets.

## 4.3. Bump in a Channel

This is one of the simple cases often seen in literature. In this work it is used to show the difference between different approximate Riemann solvers available in the new algorithm. Firstly, idea was to compare results from [16] where flow with speed of  $Ma = 1.4$  was simulated. It was chosen to show performance of AUSM solver in strictly supersonic flow. Because of difference in meshes and lack of time, same flow properties could not precisely achieved. In this simulation, strong shocks occur, that means that there are areas of flow with subsonic velocity. Although, flow parameter werent achieved, this set of simulation can serve as good comparison of performance of solvers in the new algorithm. Also, reflection of waves is demonstrated. Fluid in the simulation was again air with constant thermodynamic properties whose parameters are shown in table 4.1.

### 4.3.1. Mesh

Geometry is very simple. Bump is modeled as circular arc with height of  $h = 0.1$  m. Figure 4.21 shows geometry and mesh which is structured with 76800 hexahedral cells.

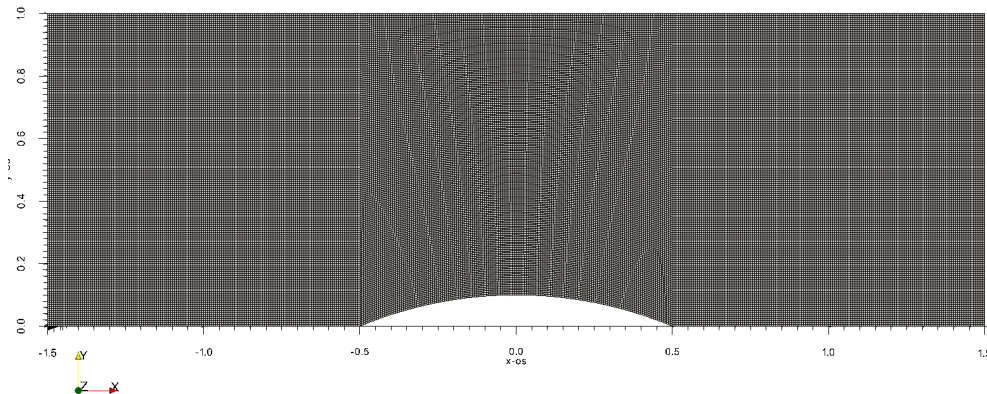
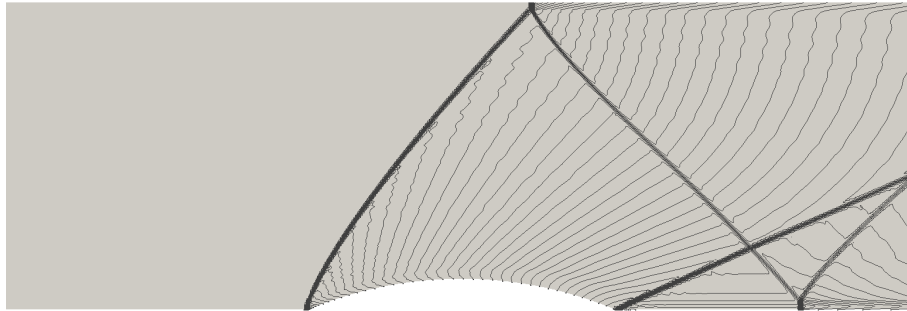


Figure 4.21: Mesh of bump in a channel.

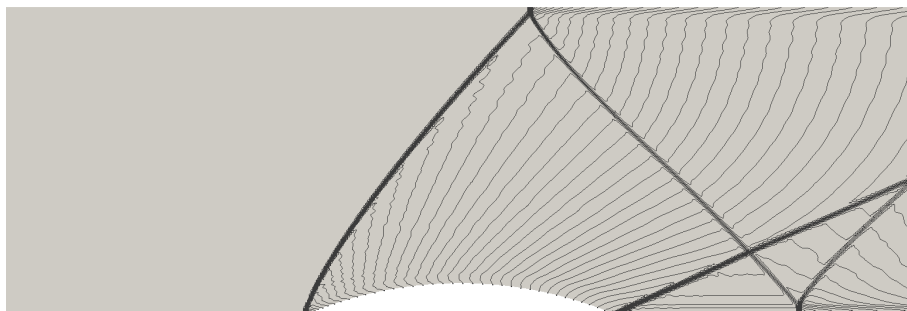
### 4.3.2. Boundary and Initial Conditions

Boundary conditions are set at the inlet as `fixedValue` for velocity, pressure and temperature. Values of variables are  $u = 625$  m/s,  $T = 300$  K wich gives already

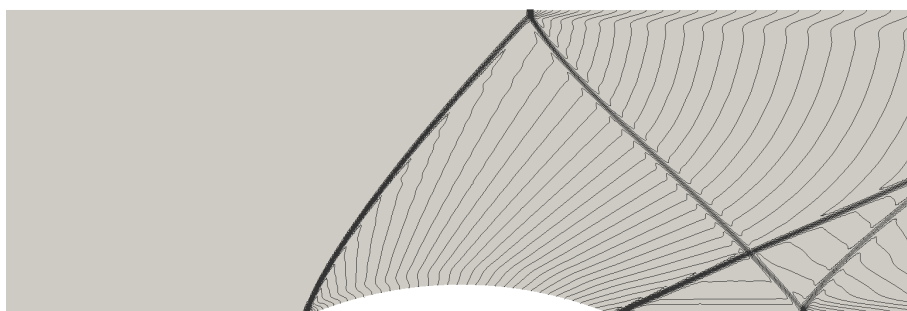
mentioned Mach number of 1.8, and pressure is set at  $p = 350000$  Pa. Since this is supersonic case, at the outlet `zeroGradient` for all variables is set. On upper and bottom boundary `slip` wall condition was set to allow to track distribution of Mach number on these surfaces.



(a) Roe solver.



(b) HLLC solver.



(c) Rusanov solver.

Figure 4.22: Comparison of Mach contours for different solvers.

On Figures 4.22a, 4.22b, and 4.22c contours of Mach number are shown. Rusanov

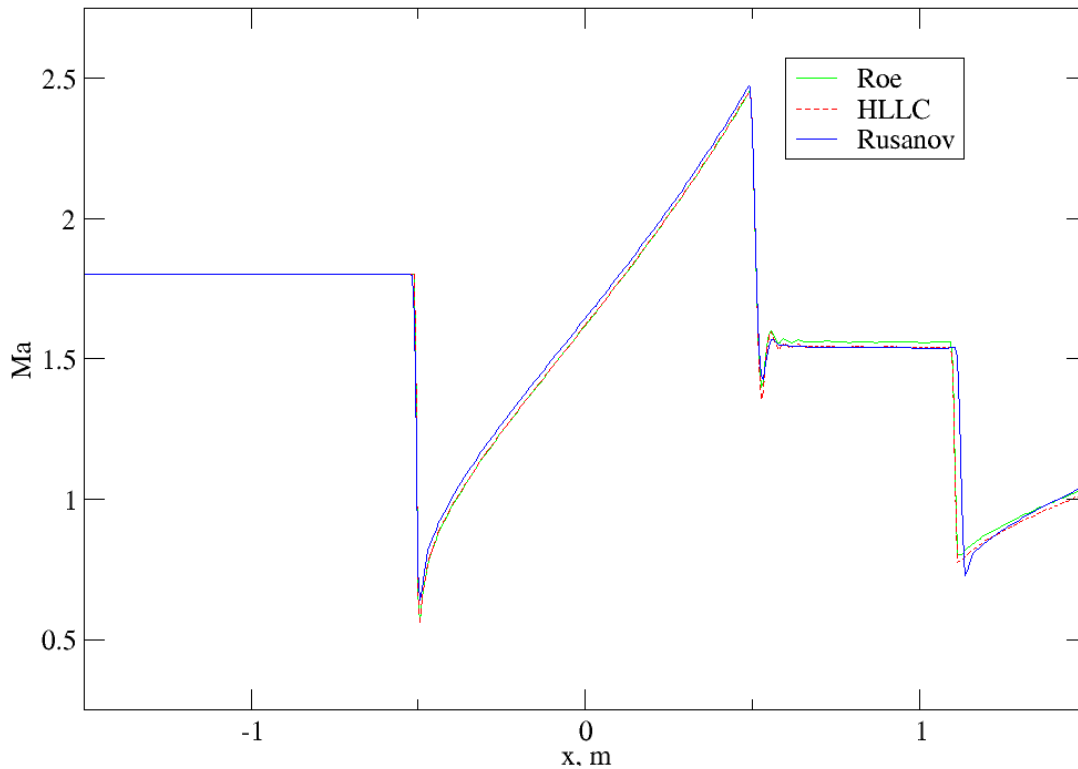


Figure 4.23: Usporedba rješavača prema Machovom broju na donjem zidu domene.

solver gives least oscillations but there is more significant influence of the wall. Also, second reflection of the shock has different angle for Rusanov solver than other two. This reflects on coordinate of the shock which is shown better on figure 4.23.

Usporedba raspodjele Machovog broja na donjem zidu prikazana je na slici 4.23.

Figure 4.23 shows differences in solutions of available Riemann approximate solvers. In less steep gradients Roe and HLLC solvers have very good agreement of curves. In Rusanov solver solution, oscillation after shock are more dampened then in other two.

Table 4.4 shows times of simulation for every solver. Courant number was set at  $Co = 0.5$  for all simulations. Computing resources were IntelCore i7 quad core processor with 3.5 GHz.

Table 4.4: Comparison of duration of calculations.

<i>Solver</i>	$t_{calc}$ in s
Roe	3530
HLLC	3523
Rus	3495

Calculation using Rusanov solver is somewhat quicker. Next step would be to implement AUSM+ solver and compare it to ones tested in this work in subsonic, transonic and supersonic flow regimes.

## 4.4. Onera M6 Transonic Wing

Because of strong presence of high-speed compressible flows in aeroindustry, some very good cases come from that area of engineering. One of the most studied cases is Onera M6 swept wing for transonic speeds.

Fluid that was used in simulations is air with constant thermophysical properties. Properties of fluid are shown in Table 4.1.

### 4.4.1. Mesh

Profile M6 is symmetrical type of profile and it is swept to create wing. Mesh used in simulations is shown in figure 4.24.

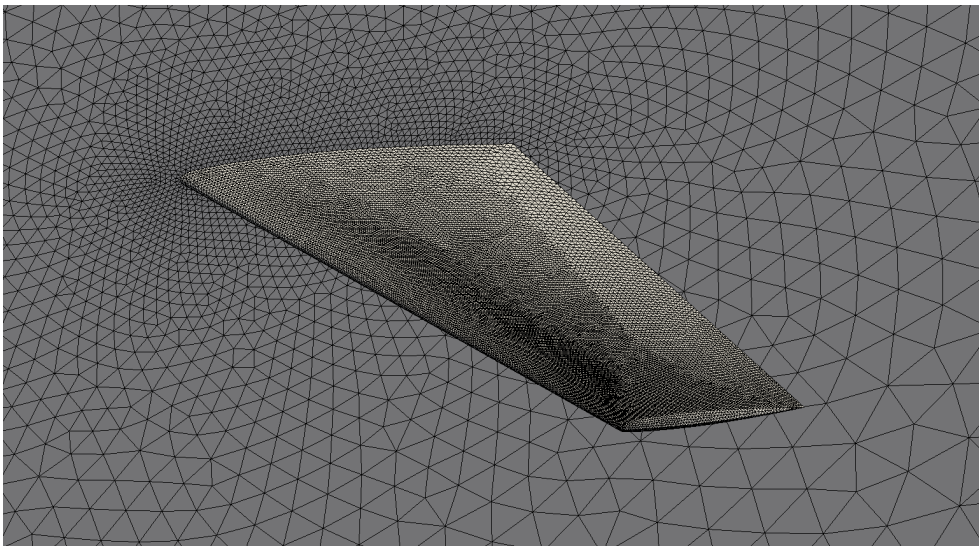


Figure 4.24: Representation of geometry and mesh of a M6 wing.

Details of geometry and space coordinates that define it are given in [17].

The mesh consists of 341797 tetrahedral cells. Outer boundaries of domain are 11 m x 5 m x 10 m and they make hexagonal shape. To create lift, it is necessary for wing to have angle of attack greater than zero. In this work angle of attack  $\alpha_{AoA} = 3.06^\circ$  was simulated. Mesh used in this work was obtained from [18]. Structured version of mesh exists on web-pages of NASA [19].

Table 4.5: Names of boundaries of domain.

<i>Name of boundary</i>	<i>Placement of boundary</i>
wing	Surface of the wing
symmetry	Boundary next to wing
lateral	Boundary opposite to wing
inlet	Boundary upwind of wing
outlet	Boundary downwind of wing
top	Boundary above wing
bottom	Boundary under wing

Names of boundaries of domain are shown in table 4.5 for later easier following of boundary conditions.

#### 4.4.2. Boundary and Initial Conditions

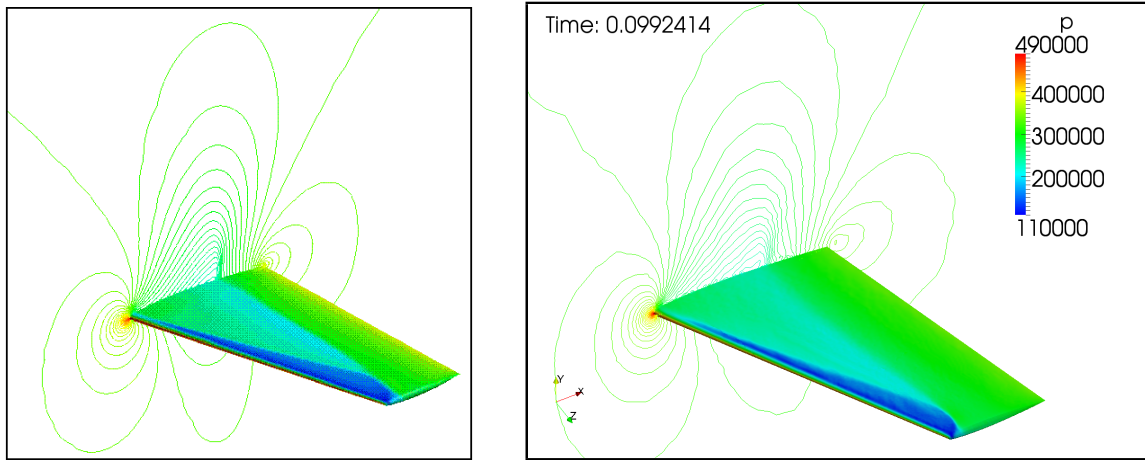
Boundary conditions that are shown on NASA web-page are used in this work as well. Whole pressure field is initialized with static pressure of  $p = 315979$  Pa. Fixed valued condition was defined on `inlet` and `outlet`. `Inlet` boundary condition on `lateral`, `top` and `bottom`. On `outlet` and `wing` boundaries `zeroGradient` boundary condition was used.

Temperaure has the same value of  $T = 255.55K$  throughout domain and on all boundaries. On boundary `inlet`, boundary condition `fixedValue` was used. On boundaries `lateral`, `top` and `bottom` boundary condition `inletOutlet` was used and `zeroGradient` on `outlet` and `wing`. Velocity  $u = 285.67$  m/s which with the temperature that is given equals to  $Ma = 0.8395$  is initialised throughout domain under angle of attack  $\alpha_{AoA} = 3.06^\circ$ . This velocity gives Reynolds number of  $Re = 1.23 \cdot 10^7$  taking mean cord of wing as characteristic lenght. Boundary conditions were used as with the temperature except on the surface of the wing for wich `noSlip` was given. This boundary condition puts velocity to  $u = 0$  m/s.

Simulation was run on four cores processor unit with 2.2 GHz. Processing time for one time step was  $\approx 4.1$  s. Conditions were simulated to 0.1 s. Maximum Courant number was 0.5 which gave maximum time step of  $\Delta t \approx 1.6 \cdot 10^{-6}$  s. Courant number wasn't constant during simulation.

Comparison of field of pressure on surface of the wing is shown on figures 4.25a and 4.25b. Figure a) shows results of NASA WIND algorithm, and on figure b) results from new density-based algorithm are given. Comparison shows very good

qualitative accordance. Areas of lower and higher pressure have almost same dimensions and shape.

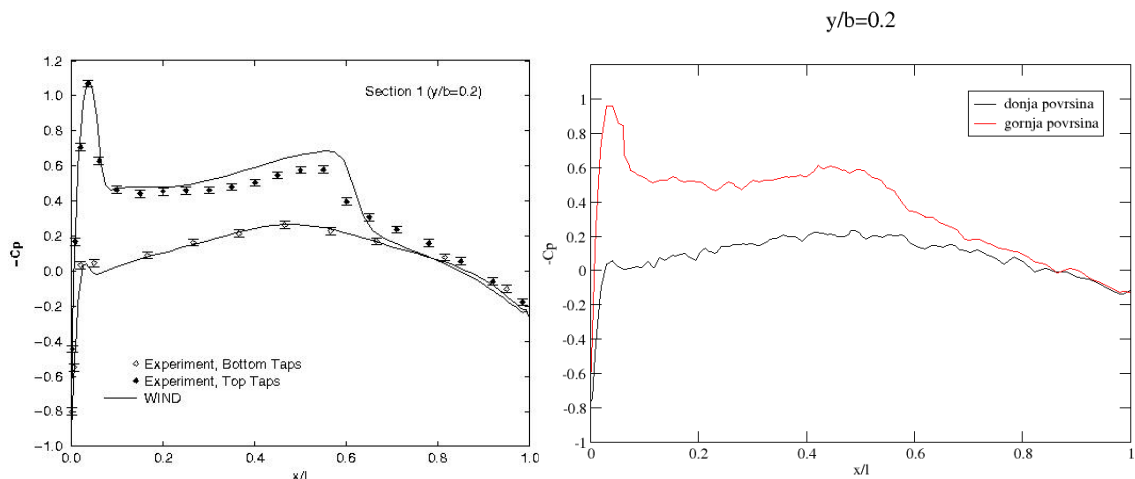


(a) Results from NASA [19].

(b) Results of new algorithm.

Figure 4.25: Field of pressure on the surface of the wing and contours of pressure on slice through domain near the root of the wing.

For more exact comparison, distribution of pressure on the wing will be presented in terms of coefficient of pressure. Distribution is shown on both upper and lower surface of the wing on the same plot for four sections. Coefficient of pressure is given as negative of calculated value.  $x$ -axis is given as ration  $\frac{x}{l}$  where  $l$  is chord of the wing.



(a) NASA [19].

(b) New algorithm.

Figure 4.26: Comparison of distribution of coefficient of pressure on section  $y/b=0.2$ .



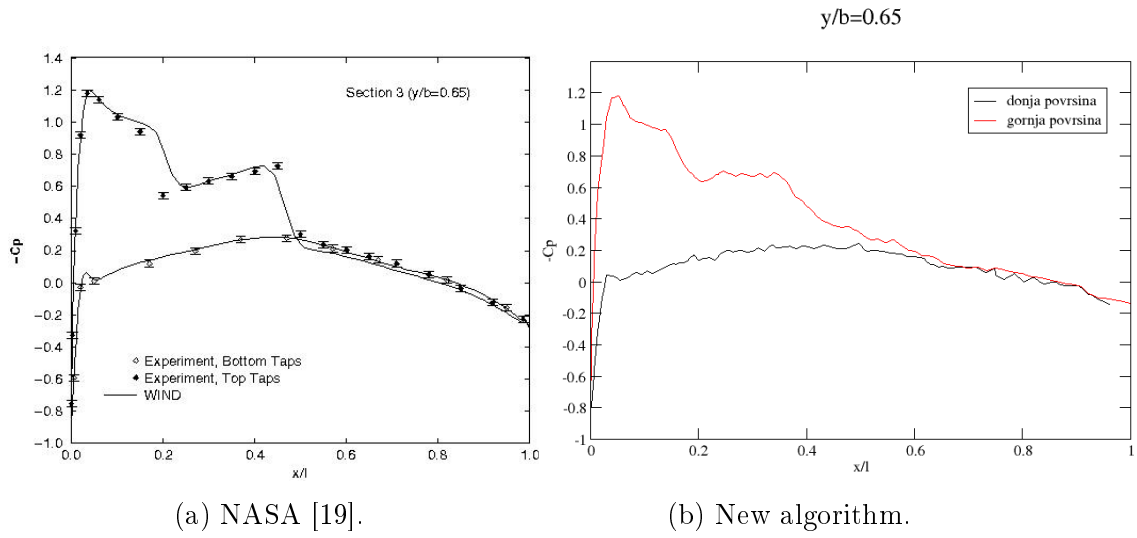


Figure 4.27: Comparison of distribution of coefficient of pressure on section  $y/b=0.65$ .

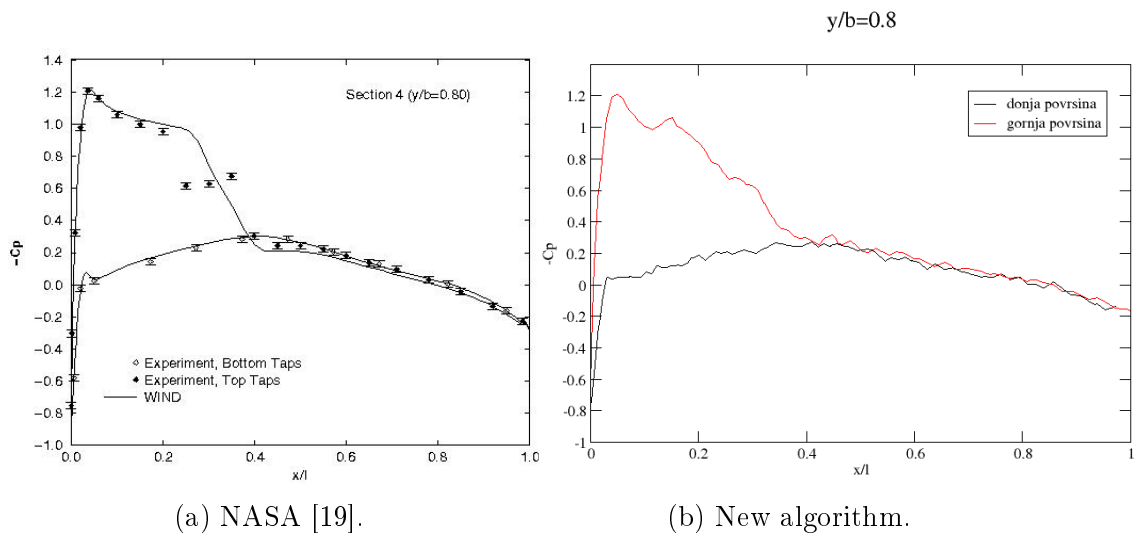


Figure 4.28: Comparison of distribution of coefficient of pressure on section  $y/b=0.8$ .

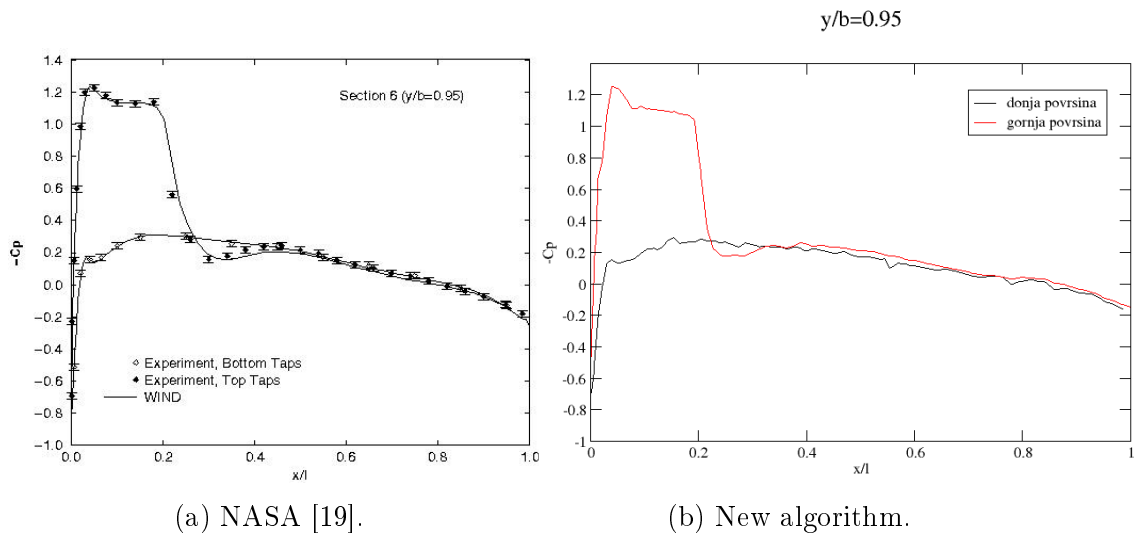


Figure 4.29: Comparison of distribution of coefficient of pressure on section  $y/b=0.95$ .

Figures 4.26b to 4.29b show comparison of solution as demonstrated in [19] and new algorithm. Very good agreement of the results can be seen in both terms of quantity and quality although there are some small differences. Fragmentation of curve is due to the unstructured mesh. Very similar results are available at [18], [20] and [21].

## 4.5. Shock-Wave Boundary Layer Interaction

Shock wave boundary layer interaction is natural phenomenon that includes very complex physics. Here interact strong pressure disturbance and boundary layer. These are well known and studied phenomenon. These are often found in aerodynamics in transonic and supersonic speeds and it negatively affects performances of the wings. Therefore it is very good validation case. Results of simulation can be compared to images of experiments as in [22] and [23].

In this simulation, fluid properties have been altered to suit specific needs of simulation. Namely, height of cavitation area was enlarged introducing higher amount of viscosity. Dynamic viscosity was therefore set three orders of magnitude higher than for normal air. Parameters were assumed constant on all three meshes. Parameters of air used in these simulations are shown in table 4.6.

Table 4.6: Properties of fluid used in simulations.

Air property	
$M = 28.9 \text{ kg / kmol}$	Molar weight
$C_p = 1007 \text{ J/kg K}$	Specific heat capacity with constant pressure
$\mu = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$	dynamic viscosity
$Pr = 0.7$	Prandtl number
$\gamma = 1.4$	Isentropic coefficient of expansion

### 4.5.1. Mesh

Geometry and mesh were created for this specific task of simulating shock wave boundary layer interaction. Wedge of 25 degrees was set on the upper boundary of the domain to introduce oblique shock. Angle was chosen so to introduce shock and simultaneously not to choke flow, *i.e.* not to create strong shock. There is a relation between wedge angle, angle of reflection and Mach number. These relations are shown in [24]. There is agreement between data in literature and simulation. This is one level of confirmation of physicality of results.

The geometry is very simple and it is based on test case of shock tube. Obvious difference is the wedge at the upper boundary of domain for introducing shock. For better results in boundary layer, mesh was locally refined in lower part of domain. Figure 4.30 shows geometry and local refinement in coarsest mesh.

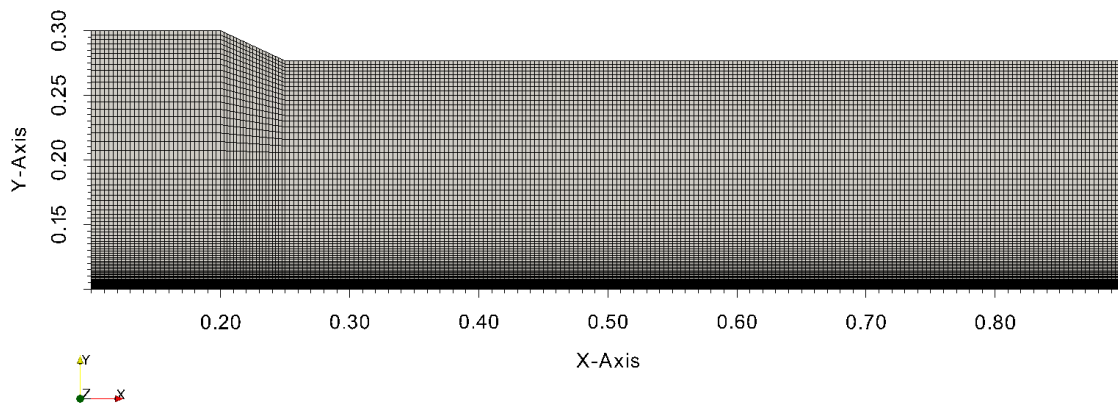


Figure 4.30: Coarse mesh.

In this case, mesh refinement study was done to estimate the effect of the effect of refinement on the quality of the results. This is of course logical if we take in to a count that shock waves have very small dimensions.

Mesh is structured with hexahedral cell. Table 4.7 shows comparison of number of cells, maximum Courant number and their respective time steps. It can be seen that finer mesh demands smaller time step.

Table 4.7: Comparison of meshes and temporal performance.

<i>Mesh refinement level</i>	<i>Cells number</i>	$C_{o_{max}}$	$\Delta t_{C_{o_{max}}}$
Coarse	19600	0.5	$6.62 \cdot 10^{-7}$
Medium	76800	0.5	$2.99 \cdot 10^{-7}$
Fine	1254400	0.7	$9.5 \cdot 10^{-8}$

All three meshes had same refinement coefficients in lower part of domain.

#### 4.5.2. Boundary and Initial conditions

Supersonic flow of Mach number  $Ma = 2.9376$  at the inlet was simulated. Using height as characteristic length and dynamic viscosity given in table 4.6 gives Reynolds number of  $Re = 136000$ . Although Reynolds number is that high, laminar flow is assumed, therefore no turbulence model was included in simulations.

To create boundary layer on the bottom of the domain `noSlip` boundary condition was set at that boundary and `zeroGradient` for pressure and temperature. At the inlet velocity was fixed at  $u_{ul} = 1020$  m/s which correlates to already mentioned  $Ma = 2.9376$  taking temperature at  $T_{ul} = 300$  K. Static fixed pressure was set at  $p_{ul} = 100000$  Pa. On the upper wall of the domain, `slip` boundary condition was set for the velocity and `zeroGradient` for other variables.

Results of simulations are given below. Comparison is done taking one field and comparing it with different mesh levels of refinement. This is to show how mesh level affects results. Figure 4.31 shows field of pressure for the finest mesh. There are many weak shocks, many features of flow can be seen such as diffraction of waves. The point at which shock wave interacts with boundary layer is point of maximum pressure on bottom boundary. This is better seen in Figure

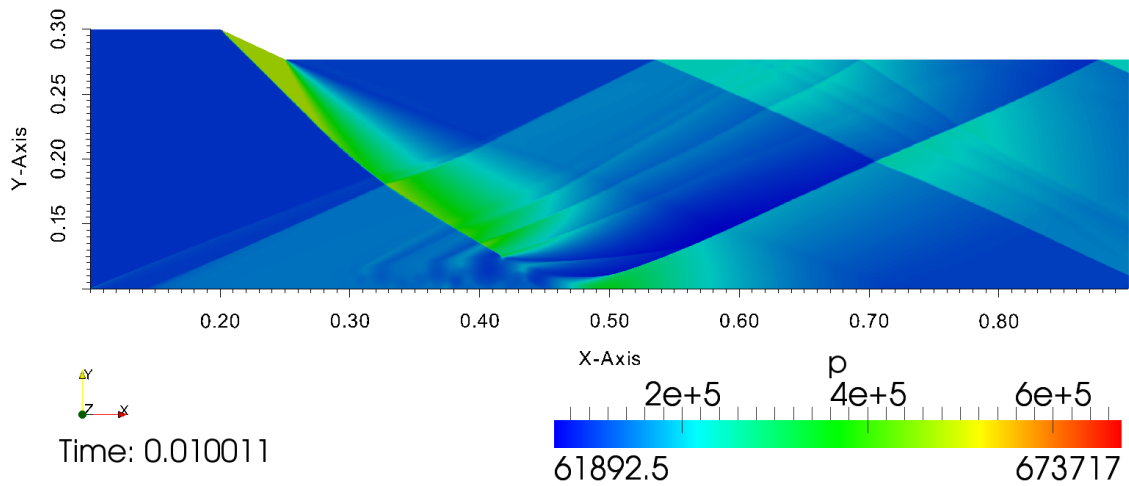


Figure 4.31: Field of pressure given in Pa for finest mesh level.

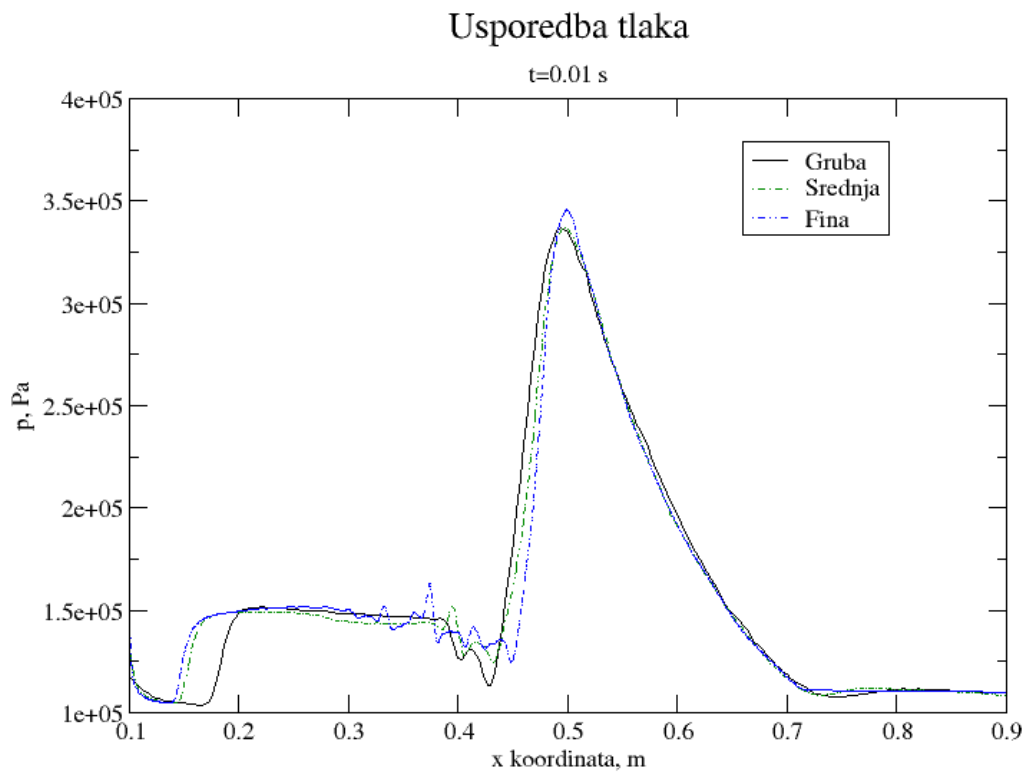
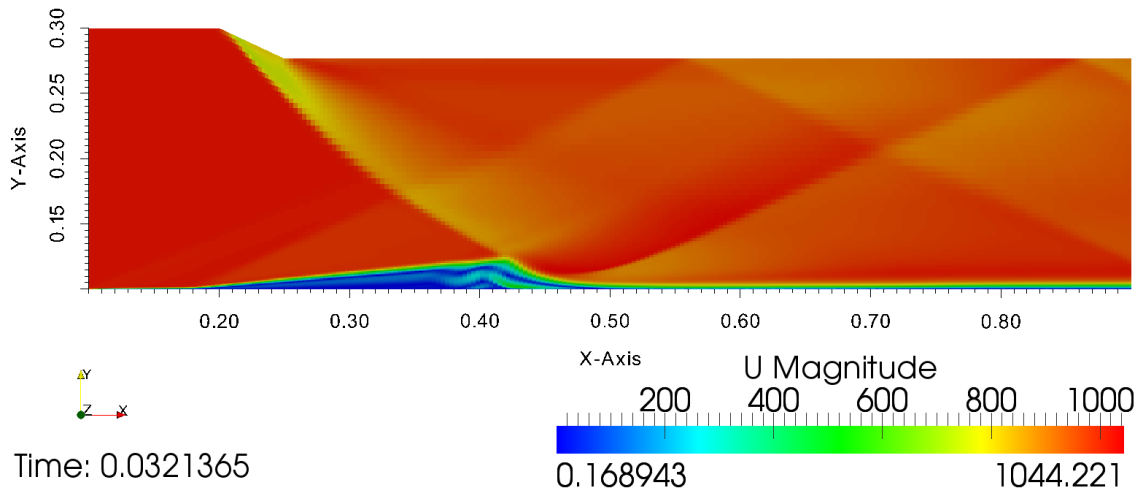
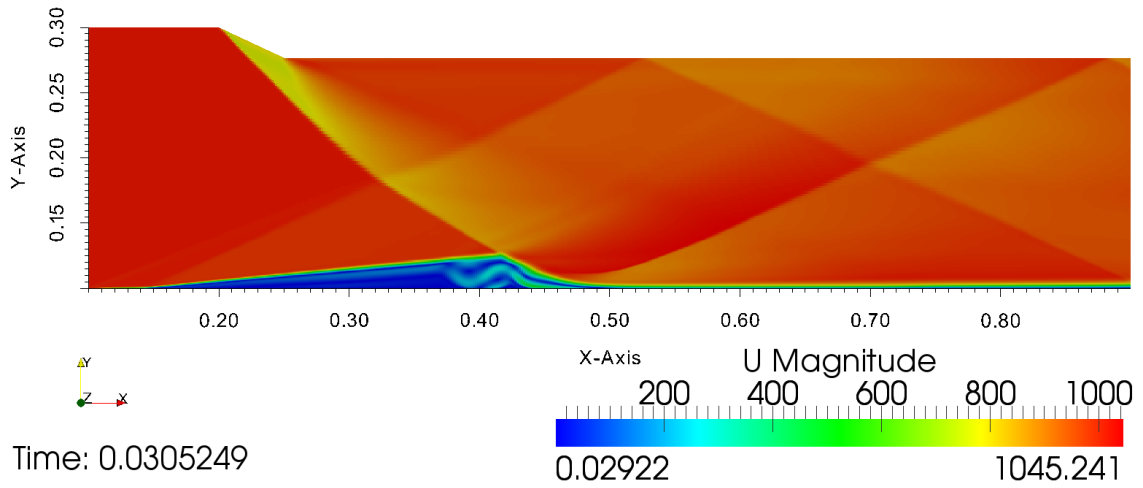


Figure 4.32: Pressure on bottom boundary of domain. Results from all three meshes are shown.

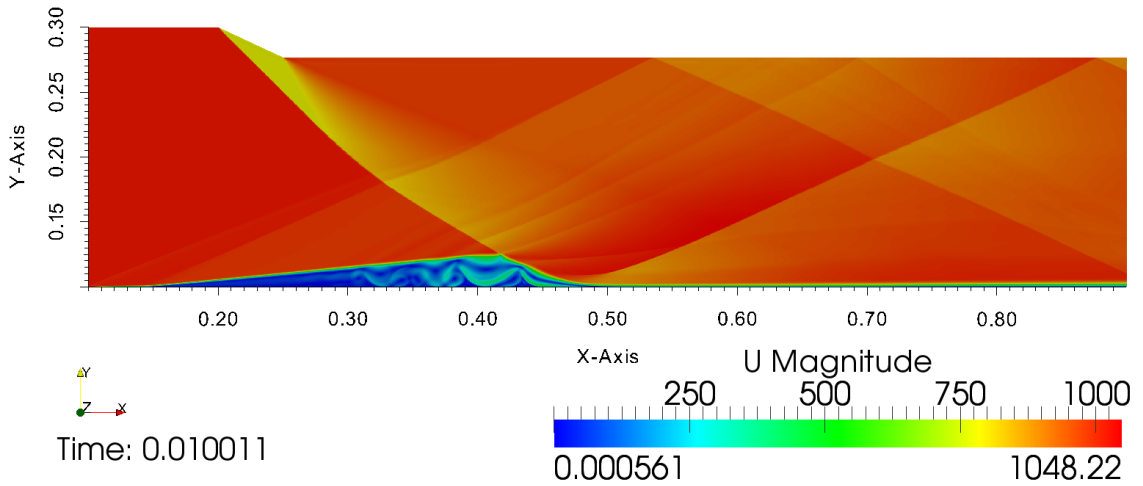
The finer the mesh, the more flow features can be captured. Also, graph on Figure 4.32 shows the steepest rising gradient for finest mesh.



(a) Coarse mesh.



(b) Medium mesh.



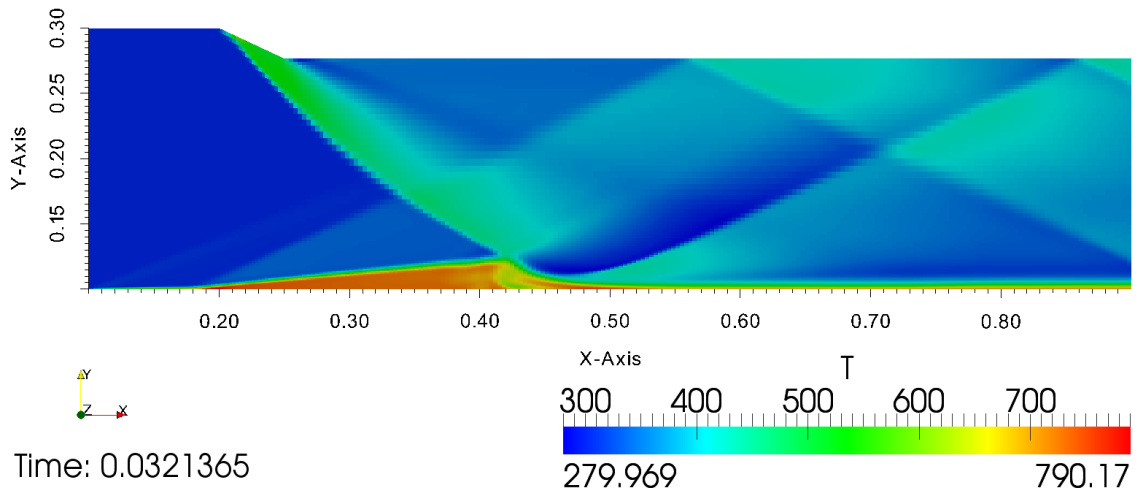
(c) Fine mesh.

Figure 4.33: Field od velocity given in m/s.

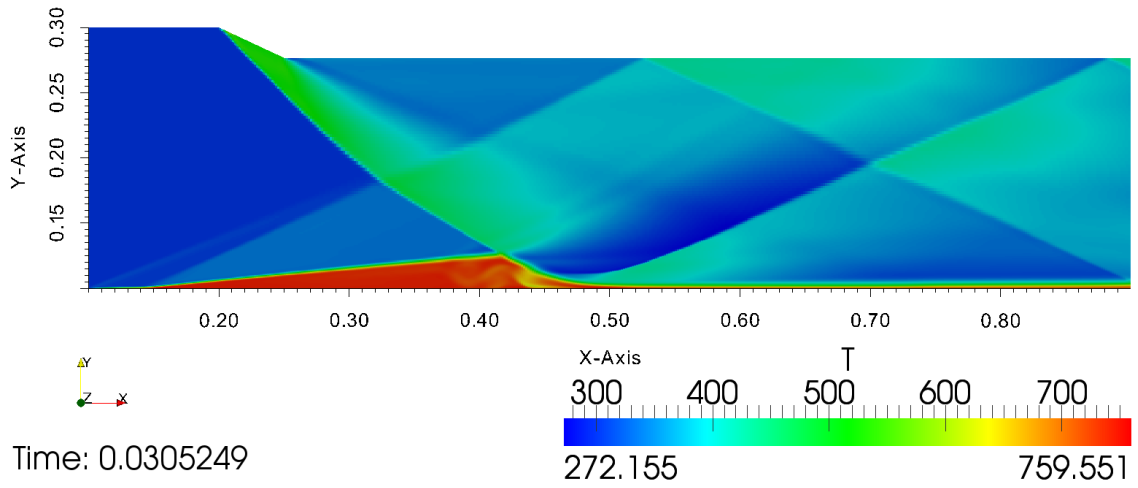
Figures 4.33a, 4.33b and 4.33c show significant differences in quality of results. Shocks interfere between themselves and also create familiar pattern called diamonds. Area of interest is colored blue and is the place of shock wave and boundary layer interaction. Here the velocity is very small. Due to very big differences in all variables cavitation is present. If it is compared to experiment shown in [22] it can be seen that there is a good qualitative agreement.

At higher refinement levels, solver is able to capture ever smaller disturbances and shocks that follow after these disturbances. On coarse mesh shocks are very diffusive while on the finest mesh we can see sharp edges and small dimensions of shocks. This kind of results is closer to realistic conditions and small fluctuations in boundary layer create weak shocks. Diffraction of shocks passing through another shock is obvious which is also considered affirmation of physicality of the solution.

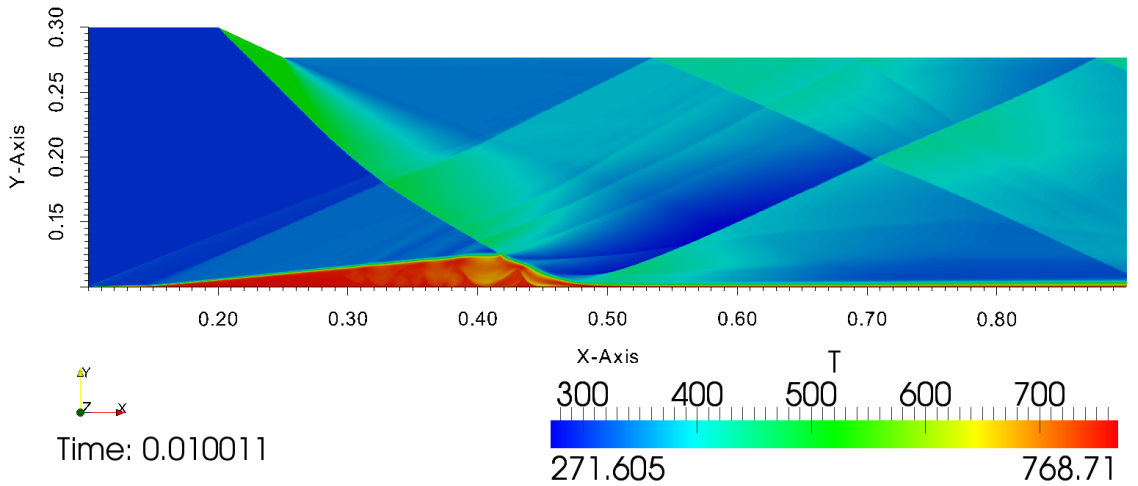
Higher viscosity affects heat generation in boundary layer significantly. This can be seen in figures 4.34a, 4.34b and 4.34c. Dissipation of kinetic energy here is considerable therefore high temperatures.



(a) Coarse mesh.



(b) Medium mesh .



(c) Fine mesh.

Figure 4.34: Field of temperature given in K.



Figures 4.31 and 4.35 show fields of pressure and density for finest mesh level to show distribution of those variables in specific interactions.

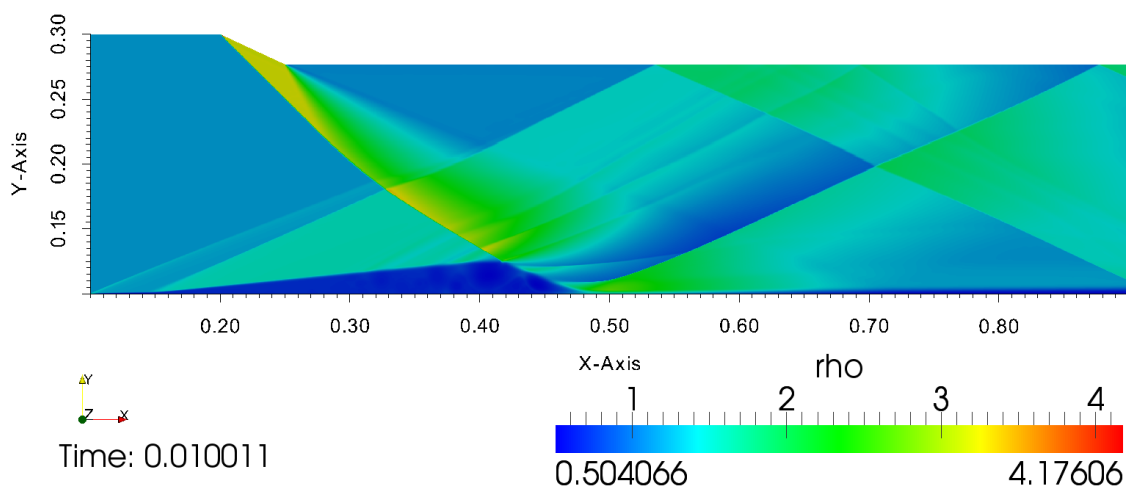


Figure 4.35: Field of density given in  $\text{kg}/\text{m}^3$  for finest mesh level.

Results show good qualitative agreement with real natural phenomenon. It is also shown that mesh refinement level affects quality of results greatly.

In this Chapter, all validation cases were presented and results were commented in terms of mesh refinement level and comparison to other numerical and experimental results. Some problems considering numerics like carbuncle phenomenon. In next Chapter short overview of work will be given along with suggestion for further work to be done.

## 5. Conclusion

This work's main idea was to show that the new DB algorithm gives good physical results. Validation was done on two 2D geometries and two 3D geometries with two mesh refinement studies. On one of the 2D cases, comparison to the PB solver was done and results were compared to available data in literature or internet.

Next step is to find reason for mismatch of results in MADIC case and eliminate problems caused by boundary conditions. Additional calculations on even finer mesh should be done to compare it even further against the PB solver.

All simulations showed very good quality results in terms of shock dimensions and place of appearance. Mesh refinement dependency was demonstrated along with length of calculation. Therefore it is suggested to further investigate different Riemann solvers available in the algorithm against each other and implement new ones like AUSM+. Carbuncle phenomenon appearance problem should be tackled.

It was shown that times of calculations are exceedingly long for feasible use. Therefore algorithm should be accelerated by one or more acceleration methods described in literature such as pseudo-time stepping, dual-time stepping and multigrid. Some thought should be given to write algorithm in implicit form to compare times of calculations.

## 6. Bibliography

- [1] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*, volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Birkhäuser, 1992.
- [2] Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [3] E. F. Toro, M. Spence, and Spears. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock Waves*, 4:25–34, 1994.
- [4] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61, 1983.
- [5] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [6] P. L. Roe and J. Pike. Efficient construction and utilisation of approximate riemann solutions. In *Proc. of the sixth int'l. symposium on Computing methods in applied sciences and engineering*, pages 499–518, 1985.
- [7] K. C. Hansen, G. Tóth, A. Ridley, and D. DeZeeuw. Design document. In *BATS-R-US MANUALS*, 2002.
- [8] E. F. Toro. Lecture 4: Some approximate riemann solvers for the euler equations. In *School-Worshop JETSET*, 2007. Presentacija.
- [9] J. M. Seiner, M. K. Ponton, B. J. Jansen, and N. T. Lagen. The effect of temperature on jet noise emission. In *DGLR/AIAA 14th Aeroacoustics Conference*, 1992.
- [10] V. Dippold. Seiner nozzle with mach 2.0, heated jet flow. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/seiner/Seiner.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [11] U.S. Rockets. Custom motors. <http://v-serv.com/usr/crr457mm.htm>, 2014. Pristupljeno: 8.7.2014.
- [12] NASA NPARC. Axisymmetric 2d convergent/divergent boattail nozzle simulation using cfd/fastran. <http://www.esi-cfd/content/view/718/197/>. Pristupljeno: 4.7.2014.

- [13] Bobby L. Berrier and Richard J. Re. Investigation of convergent-divergent nozzles applicable to reduced-power supersonic cruise aircraft. Technical report, NASA, 1980.
- [14] J. H. Ferziger and Perić M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [15] D. Vinteler. Madic 2d axisymmetric cd boattail nozzle: Study 1. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/madicnoz/madicnoz.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [16] C. M. Xisto, J. C. Pácoa, P. J. Oliveira, and D. A. Nicolini. A hybrid pressure–density-based algorithm for the euler equations at all mach number regimes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 70:961–976, 2011.
- [17] V. Schmitt and F. Charpin. Pressure distributions on the onera-m6-wing at transonic mach numbers. In *Experimental Data Base for Computer Program Assessment*, 1979. Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138.
- [18] Politecnico di Milano. Onera m6 wing. [https://www.aero.polimi.it/freecase/?OpenFOAM\\_%2B\\_Code\\_Aster:Aerodynamic\\_problems:ONERA\\_M6\\_wing](https://www.aero.polimi.it/freecase/?OpenFOAM_%2B_Code_Aster:Aerodynamic_problems:ONERA_M6_wing). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [19] J. W. Slater. Onera m6 wing: Study 1. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m6wing/m6wing01/m6wing01.html>. Pristupljeno: 4.7.2014.
- [20] TTC Tech. Onera-m6-wing. [http://www.ttctech.com/Samples/Onera\\_M6\\_Wing\\_Multiblock/onera\\_mb.htm](http://www.ttctech.com/Samples/Onera_M6_Wing_Multiblock/onera_mb.htm). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [21] SCOREC. M6 wing simulation problem definition and results. [http://www.scorec.rpi.edu/~cwsmith/NASA\\_m6WingSimulations/M6WingSimulation\\_ProblemDefinitionSimulationControlsAdaptationControls\\_20110120.pdf](http://www.scorec.rpi.edu/~cwsmith/NASA_m6WingSimulations/M6WingSimulation_ProblemDefinitionSimulationControlsAdaptationControls_20110120.pdf). Pristupljeno: 4.7.2014.
- [22] G. Smeets. Shock tube investigations of combustion phenomena in supersonic flows. In *Hypersonics, Shock Tube & Shock Tunnel Flow*, 1993.
- [23] J. Détery and J. P. Daussage. Some physical aspects of shock wave/boundary layer interactions. *Shock Waves*, 19:453–468, 2009.

- [24] FSB Katedra za mehaniku fluida. Dijagram za kosi udarni val. Unpublished. Skripta.