

# Računalna dinamika fluida temeljena na sustavu čestica

---

**Vukčević, Vuko**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2012**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:385502>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-11**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu

**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Završni rad

RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA TEMELJENA NA  
SUSTAVU ČESTICA

Voditelj rada:

Prof. Andreja Werner

Vuko Vukčević

Zagreb, 2012.

## ***Sažetak rada***

*Vuko Vukčević*

### ***Računalna dinamika fluida temeljena na sustavu čestica***

U ovom radu se razmatra numerička metoda za rješavanje problema dinamike fluida formulirana koncepcijom sustava čestica, metoda hidrodinamike izgladenih čestica (engleski „Smoothed particle hydrodynamics“, u daljnjem tekstu skraćeno SPH metoda). SPH metoda kontinuum diskretizira konačnim brojem čestica koje nose fizikalna svojstva, a za koje se rješavaju spomenute jednačbe. U svrhu formulacije metode, opisane su integralne aproksimacije prostorne funkcije i njene derivacije pomoću jezgrenih funkcija, te su dani izrazi za aproksimaciju česticama. Prikazane su neke često korištene jezgrene funkcije. Uvjeti koje te funkcije moraju zadovoljiti u svrhu očuvanja konzistentnosti određenog reda su detaljno razmotreni. Također su dani uvjeti konzistentnosti aproksimacije česticama. Na temelju prethodnih razmatranja mogu se jednostavno izvesti obične diferencijalne jednačbe za pojedinu česticu, koje ovise o vremenu. Time se problem svodi sa sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi na skup običnih diferencijalnih jednačbi. Razvijen je računalni kod za rješavanja Poiseuille-ovog strujanja. Pokazano je da se dobiveni rezultati dobro slažu s analitičkim rezultatima predloženim od strane Morris et al., čime je metoda potvrđena. Kao i svaka numerička metoda, i SPH metoda ima svoje prednosti i nedostatke koji su primijećeni kroz praksu i kroz teorijska razmatranja, te su ovdje prikazani.

*Ključne riječi: računalna dinamika fluida, hidrodinamika izgladenih čestica, jezgrene*

*funkcije, čestice, Poiseuille – ovo strujanje*

## ***Summary***

*Vuko Vukčević*

### ***Particle Based Approach to Computational Fluid Dynamics***

Smoothed particle hydrodynamics (SPH), a numerical method for simulating fluid dynamics phenomena, based on particle systems is described in this paper. SPH method approximates continuum with finite number of particles which carry physical properties. Integral approximations of a field functions and its derivative are described using smoothing kernel functions. Particle approximations are also derived. Often used kernel functions are listed. Kernel functions have to satisfy a number of conditions to ensure consistency to a given order. Those conditions, as well as particle approximation consistency conditions are also thoroughly described. For each particle, an ordinary, time dependant, differential equation is formulated. Problem is therefore reduced from partial differential equations to a set of ordinary differential equations. Computer algorithm is developed for simulating Poiseuille flow. It is shown that obtained results are in good agreement with analytic series solution provided by Morris et al. Like every other numerical method, SPH method also has its advantages and disadvantages noted through practical use and theoretical considerations, which are briefly noted in this paper.

*Key words: computational fluid dynamics, smoothed particle hydrodynamics, kernel*

*smoothing functions, particles, Poiseuille flow*

*Popis oznaka:*

$x_i$	[m]	- vektor položaja
$y_i$	[m]	- vektor položaja u trenutku identificiranja čestice fluida
$t$	[s]	- vrijeme
$J$		- Jacobijeva matrica
$v_i^L$	[m/s]	- Lagrangeovo polje brzine
$v_i^E$	[m/s]	- Eulerovo polje brzine
$V$	[m <sup>3</sup> ]	- volumen fluida
$S$	[m <sup>2</sup> ]	- površina koja zatvara volumen fluida
$n_i$	[m]	- vektor normale na površinu
$m$	[kg]	- masa fluida
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	- gustoća fluida
$\sigma_{ij}$	[Pa]	- tenzor naprezanja
$p$	[Pa]	- polje tlaka
$\tau_{ij}$	[Pa]	- tenzor tangencijalnog naprezanja
$F_i$	[m/s <sup>2</sup> ]	- masena sila u smjeru osi $x_i$
$\mu$	[Pa s]	- dinamička viskoznost fluida
$\nu$	[Pa s]	- kinematička viskoznost fluida
$\varepsilon_{ij}$	[1/s]	- tenzor brzine deformacije fluida
$\delta_{ij}$		- Kroneckerov delta simbol
$f(x_i)$		- općenita prostorna funkcija
$\delta$		- Diracova delta funkcija
$W$	[1/ m <sup>3</sup> ]	- jezgrena funkcija
$h$	[m]	- nosač jezgrene funkcije

$r$		- ostatak pri razvoju u Taylorov red
$\alpha, \beta$		- oznake za česticu
$r_{\alpha\beta}$	[m]	- udaljenost čestice $\alpha$ od čestice $\beta$
$\alpha_d$		- koeficijent jezgrene funkcije ovisan o dimenzijama problema
$R$		- relativna udaljenost između para čestica
$\kappa$		- parametar uvećanja nosača funkcije
$A_k$		- koeficijenti pri razvoju u Taylorov red
$M_k$		- momenti jezgrene funkcije
$b_k$		- konstante pri razvoju jezgrene funkcije u Taylorov red
$M$		- matrica momenata
$I$		- vektor poznatih konstanti uvjeta konzistentnosti
$\bar{W}$	[1/ m <sup>3</sup> ]	- reproducirajuća jezgrene funkcija
$W_w$	[1/ m <sup>3</sup> ]	- prozor funkcija
$v_{j(\alpha\beta)}$	[m/s]	- razlika vektora brzine čestice $\alpha$ i čestice $\beta$
$l$	[m]	- udaljenost stijenki Poiseuille – ovog strujanja
$v_0$	[m/s]	- maksimalna stacionarna brzina Poiseuille – ovog strujanja
$c$	[m/s]	- brzina zvuka
$\varepsilon$		- faktor XSPH metode integracije položaja čestice
$a_n$	[m/s <sup>2</sup> ]	- akceleracija u $n$ – tom koraku
$\Delta t$	[s]	- vremenski korak

## ***Sadržaj rada***

1. UVOD.....	1
2. OPIS STRUJANJA FLUIDA .....	3
3. LAGRANGE – OV OBLIK NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI.....	5
4. SPH (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS) METODA.....	11
4.1. Osnovna ideja SPH metode.....	11
4.2. Integralna reprezentacija funkcije i njene derivacije.....	12
4.3. Aproksimacija česticama.....	16
5. JEZGRENE (BAZNE) FUNKCIJE.....	19
5.1. Često korištene jezgrene funkcije.....	19
5.2. Aproksimacija prostorne funkcije.....	22
5.3. Aproksimacija derivacija prostorne funkcije.....	24
5.4. Konzistentnost aproksimacije jezgrenim funkcijama.....	29
5.5. Konzistentnost aproksimacije česticama.....	32
6. SPH FORMULACIJA NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI.....	36
6.1. Aproksimacije gustoće.....	36
6.2. Aproksimacije količine gibanja.....	38
7. PREDNOSTI I NEDOSTATCI SPH METODE.....	42
8. RJEŠENJE POISEUILLE – OVOG STRUJANJA SPH METODOM.....	44

<i>9. ZAKLJUČAK.....</i>	<i>49</i>
<i>10. PRILOG 1.....</i>	<i>50</i>
<i>11. POPIS LITERATURE.....</i>	<i>58</i>
<i>12. POPIS SLIKA.....</i>	<i>59</i>



## **1. UVOD**

Fluidi okružuju cijeli svijet, pa je tako i većina problema u brodogradnji, barem na neki način, povezana s dinamikom fluida. Razvoj računalne dinamike fluida je usko povezan s vrlo brzim razvojem računala u prethodnom i ovom stoljeću. U današnjem svijetu, tvrtke moraju imati brze odgovore na zahtjeve tržišta da bi opstale. Tu dolazi do izražaja računalna dinamika fluida, koja za razliku od eksperimentalnih metoda, može ponuditi brža, i najvažnije jeftinija rješenja. Međutim, ta rješenja još uvijek u dobrom dijelu tehničkih struka nisu dovoljno pouzdana, ali često daju dobru i približnu sliku problema. Dinamika fluida je opisana čuvenim Navier – Stokesovim jednadžbama (zakon o očuvanju količine gibanja), jednadžbom kontinuiteta (zakon o očuvanju mase), te prvim i drugim glavnim stavkom termodinamike. Strujanju fluida je moguće pristupiti na dva načina, te su se stoga razvile dvije metode u računalnoj dinamici fluida. Prva, Eulerova metoda promatra fluid u određenim fiksnim točkama prostora (odnosno točkama mreže). Ova metoda je danas više istražena i prilagođena rješavanju raznih problema. U drugoj, Lagrange-ovoj metodi, koordinatni sustav nije nepomičan, već se giba s česticom fluida. Iz tog razloga je ovaj pristup možda intuitivniji, posebno za promatranje same kinematike fluida. Računalna dinamika fluida temeljena na sustavu čestica se danas sve više istražuje i koristi u brojnim područjima, posebno u računalnoj grafici, za koju su poželjni jednostavniji matematički modeli koji i dalje daju vjerodostojnu sliku vremenskih simulacija gibanja fluida. Međutim, metoda se sve više koristi i u tehničkim proračunima, zašto je potrebno koristiti složenije matematičke modele, te je najvažnije kontrolirati i na razne načine ispitati pouzdanost proračuna, odnosno točnost same simulacije. Metoda hidrodinamike izgladenih čestica (engleski „Smoothed Particle Hydrodynamics“) se razvila u svrhu rješavanja problema astrofizike. Kasnije se koristila i za

simulacije strujanja stlačivih i nestlačivih fluida, za simulacije eksplozija, te čak u molekularnoj dinamici. U brodogradnji i morskoj tehnici se, na primjer, ova metoda koristila za simulacije nelinearnih fenomena poput udaranja valova o konstrukciju. Može se očekivati da će se ova metoda i dalje nastaviti razvijati zbog svoje jednostavnosti, intuitivnosti, te najvažnije, jer ne zahtijeva vremenski promijenjivu mrežu pri simulacijama složenijih, nestacionarnih problema.

## 2. OPIS STRUJANJA FLUIDA

U dinamici fluida razrađuju se zakoni održanja za fluid u strujanju, a to su: zakon o očuvanju mase, zakon o očuvanju količine gibanja, zakon o očuvanju momenta količine gibanja, zakon o očuvanju energije (prvi glavni stavak termodinamike), te zakon o produkciji entropije (drugi glavni stavak termodinamike). U kinematici fluida postoje dva pristupa analitičkog opisa strujanja fluida. Eulerov pristup polazi od geometrijskih točaka prostora, prate se mehanička i termodinamička zbivanja u pojedinoj točki dok kroz nju prolaze različite čestice fluida. Ovakav opis strujanja vodi do nelinearnih (uslijed konvekcijskog člana) parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje je moguće numerički riješiti raznim metodama, na primjer: metodom konačnih razlika, metodom konačnih volumena i drugim. Pristup u kojemu se strujanje fluida opisuje u materijalnom koordinatnom sustavu, odnosno koordinatnom sustavu koji se giba zajedno s česticom fluida zove se Lagrangeov pristup. Ovakva formulacija vodi do numeričkih metoda kao što su: metoda konačnih elemenata, metoda izgladenih čestica (engleski „Smoothed Particle Hydrodynamics“, u daljnjem tekstu SPH metoda). Dakle, strujanje fluida se može predstaviti u materijalnim koordinatama (Lagrangeov opis):

$$x_i = f_i(t, y_i) \quad (1)$$

ili, u prostornim koordinatama (Eulerov opis):

$$y_i = f_i^{-1}(t, x_i) \quad (2)$$

uz uvjet [1]:

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| > 0, \quad J < \infty \quad (3)$$

Jednadžba (1) predstavlja trajektoriju čestice fluida koja je u nekom trenutku identificiranja bila u točki  $y_i$ . Brzinu fluida je također moguće definirati u Lagrangeovom ili Eulerovom koordinatnom sustavu. Brzina čestice fluida u Lagrangeovom koordinatnom sustavu je jednostavno parcijalna derivacija izraza (1) po vremenu, jer  $y_i$  ne ovisi o vremenu identificiranja [2]:

$$v_i^L(t, y_i) = \frac{\partial x_i(t, y_i)}{\partial t} \quad (4)$$

Eulerovo polje brzine je definirano materijalnom (totalnom) derivacijom trenutne pozicije čestice fluida po vremenu:

$$v_i^E(t, x_i) = \frac{Dx_i}{Dt} \quad (5)$$

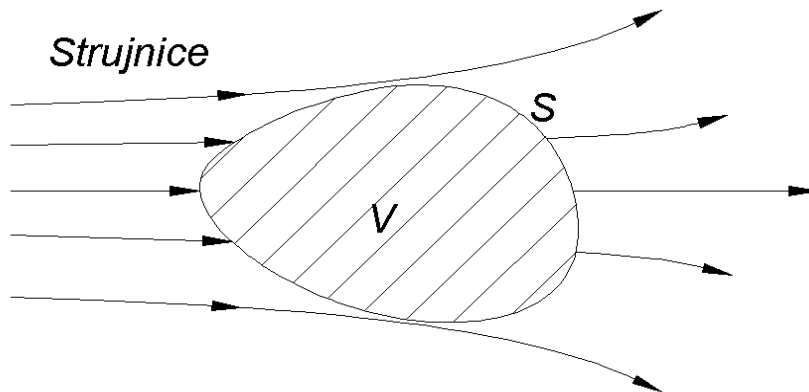
Izrazi (4) i (5) su povezani osnovnim principom kinematike:

$$v_i^E(t, x_i)|_{x_i=f_i(t, y_i)} = v_i^L(t, y_i) \quad (6)$$

gdje je  $x_i$  određena točka, a  $y_i$  s desne i s lijeve strane jednadžbe predstavljaju istu početnu poziciju u kojima je čestica „identificirana“. Riječima, brzina fluida u određenoj točki kontinuuma (točka  $x_i$  s lijeve strane jednadžbe (6)) je jednaka brzini čestice fluida koja se nalazi u toj točki u istom vremenskom trenutku.

### 3. LAGRANGE – OV OBLIK NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI

Promatrat će se zatvoreni volumen  $V$  s površinom  $S$ , slika 1.

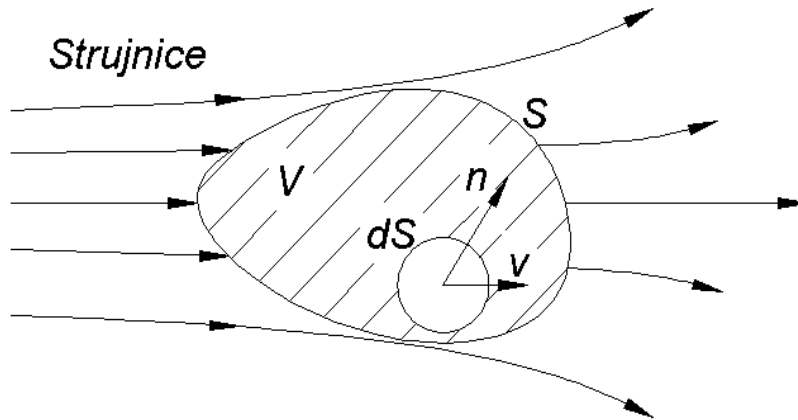


Slika 1. Lagrangeov konačni volumen  $V$  omeđen površinom  $S$

Površina  $S$  zatvara volumen  $V$ . U Lagrangeovom pristupu, ovakav volumen se giba s fluidom tako da iste čestice fluida ostaju unutar volumena. Premda strujanje fluida može uzrokovati deformaciju (linearnu i kutnu) Lagrangeovog volumena, masa fluida unutar volumena se ne mijenja. Gibanje fluida unutar volumena  $V$  vodi do promjene površine  $S$ . Nadalje, promjena površine uzrokuje promjenu volumena. Promjena volumena  $d(\Delta V)$  uslijed gibanja diferencijalnog dijela površine  $dS$  tokom vremenskog intervala  $\Delta t$ , prema slici 2. iznosi:

$$d(\Delta V) = v_i n_i \Delta t dS \quad (7)$$

gdje su:  $v_i$  brzina gibanja diferencijalnog dijela površine  $dS$ , a  $n_i$  je jedinični vektor okomit na diferencijal površine  $dS$  (odnosno vektor normale na diferencijal površine  $dS$ ).



Slika 2. Promjena Lagrangeovog volumena uslijed gibanja površine

Ukupna promjena volumena cijelog Lagrangeovog volumena je integral izraza (7) po površini  $S$ :

$$\Delta V = \int_S v_i \Delta t n_i dS \quad (8)$$

Dijeljenjem jednadžbe (8) s  $\Delta t$ , i primjenom teorema o divergenciji [3] (poznat i kao Green – Gauss teorem, odnosno Gauss – Ostrogradski teorem) dobije se:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV \quad (9)$$

gdje član ispod znaka integrala (zapisan u indeksnoj notaciji) predstavlja divergenciju polja brzine.

Ukoliko se Lagrangeov konačni volumen svede na infinitezimalni dio fluida s volumenom  $\delta V$  (tako da vrijede postulati mehanike kontinuuma, odnosno da su svojstva fluida konstanta u  $\delta V$ ) dobije se sljedeća jednadžba:

$$\frac{\Delta(\delta V)}{\Delta t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \int_{\delta V} d(\delta V) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta V \quad (10)$$

Prema tome, vremenska promjena volumena infinitezimalnog dijela fluida je:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta V \quad (11)$$

Iz izraza (11) slijedi divergencija brzine kao:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \quad (12)$$

Jednadžba (12) pokazuje da se divergencija brzine može fizikalno interpretirati kao vremenska promjena volumena po jedinici volumena.

Iz zakona o očuvanju mase može se dobiti jednadžba kontinuiteta. Masa sadržana u kontrolnom volumenu za Lagrangeov infinitezimalni dio fluida volumena  $\delta V$  iznosi:

$$\delta m = \rho \delta V \quad (13)$$

gdje su:  $m$  masa, i  $\rho$  gustoća.

Kako je masa očuvana u Lagrangeovom infinitezimalnom dijelu fluida, vremenska promjena mase mora biti jednaka nuli:

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0 \quad (14)$$

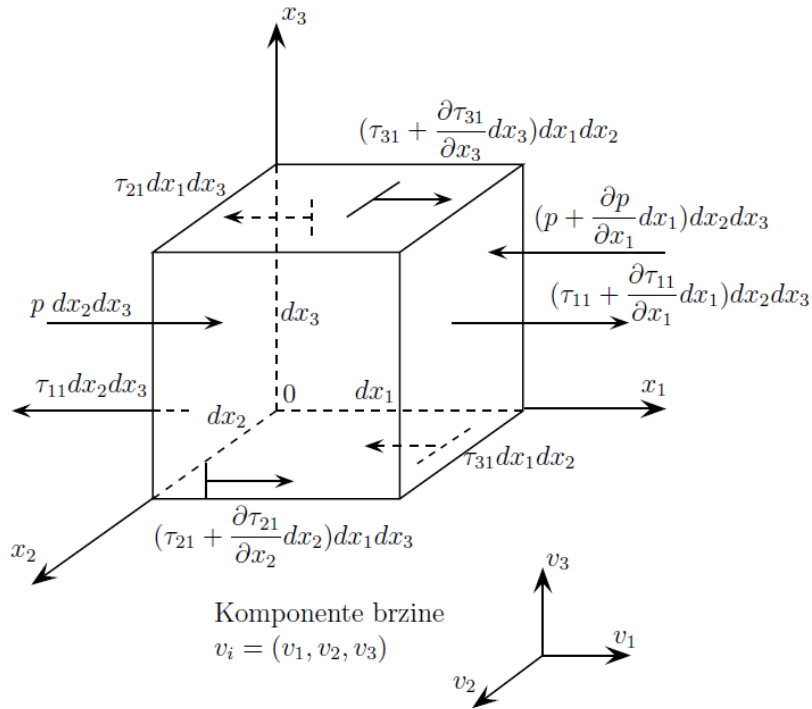
Jednadžba (14) se može napisati u obliku:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\rho}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0 \quad (15)$$

Koristeći jednadžbu (12), jednadžba kontinuiteta u Lagrangeovom pristupu glasi:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (16)$$

Zakon o očuvanju količine gibanja dobije se iz Newtonovog drugog aksioma koji kaže da su površinske i masene sile koje djeluju na infinitezimalni Lagrangeov dio fluida u ravnoteži s vremenskom promjenom količine gibanja tog istog dijela fluida (odnosno u ravnoteži s inercijskim silama).



Slika 3. Sile u smjeru osi  $x_1$  koje djeluju na Lagrangeov infinitezimalni dio fluida

Prema slici 3. vektor položaja je  $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ , dok je akceleracija infinitezimalnog dijela fluida  $\frac{Dv_i}{Dt} = \left(\frac{Dv_1}{Dt}, \frac{Dv_2}{Dt}, \frac{Dv_3}{Dt}\right)$  [4]. Masena sila može biti gravitacijska sila, magnetske sile ili neke druge sile koje djeluju na cijeli infinitezimalni volumen. Površinske sile su sile tlaka, te tangencijalna i normalna naprezanja. U smjeru osi  $x_1$  djeluju sljedeće sile na Lagrangeov infinitezimalni dio fluida:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \\
 & + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned} \tag{17}$$

gdje je  $p$  tlak, a  $\tau_{ij}$  naprezanje u smjeru osi  $x_j$  koje djeluje na ravninu okomitu na os  $x_i$ .

Inercijska sila može se pisati u obliku:

$$m \frac{dv_1}{dt} = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dv_1}{dt} \tag{18}$$



Izjednačavanjem (17) i (18), te ukoliko postoji masena sila  $F_1$  koja djeluje u smjeru osi  $x_1$ , drugi Newtonov aksiom se može pisati kao:

$$\begin{aligned} \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dv_1}{dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \rho F_1 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (19)$$

Iz (19) slijedi parcijalna diferencijalna jednadžba očuvanja količine gibanja u smjeru osi  $x$ :

$$\rho \frac{Dv_1}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 \quad (20)$$

Istim postupkom moguće je izvesti jednadžbe očuvanja količine gibanja za ostale osi, te se konačno zakon očuvanja količine gibanja može pisati u indeksnoj notaciji:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho F_i \quad (21)$$

za  $i = 1, 2, 3$ .

Za Newtonovske fluide [5] je naprezanje proporcionalno deformaciji  $\varepsilon$  preko dinamičke viskoznosti  $\mu$ :

$$\tau_{ij} = \mu \varepsilon_{ij} \quad (22)$$

gdje je:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad (23)$$

a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerov delta simbol.

Zakon o očuvanju momenata količine gibanja dokazuje simetričnost tenzora naprezanja, te se ovdje neće razmatrati. Zakon o očuvanju energije te zakon o produkciji entropije se također neće razmatrati budući da u rješavanje problema nisu uključeni toplinski učinci.

## **4. SPH (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS) METODA**

### **4.1. Osnovna ideja SPH metode**

SPH metoda je razvijena u svrhu rješavanja hidrodinamičkih problema koji su opisani parcijalnim diferencijalnim jednažbama. Analitičko rješenje takvih jednažbi moguće je pronaći za samo malen broj jednostavnih problema, stoga se često pristupa numeričkim metodama. Za svaku numeričku metodu, najprije je potrebno diskretizirati domenu strujanja fluida. Nadalje, potrebno je definirati prostornu aproksimaciju funkcija te njihovih derivacija za svaku točku. Pomoću takvih prostornih aproksimacija funkcije i njenih derivacija se problem svodi sa skupa parcijalnih diferencijalnih jednažbi na skup običnih diferencijalnih jednažbi u diskretiziranom obliku koje ovise o vremenu. Ovakav skup običnih diferencijalnih jednažbi je moguće numerički riješiti raznim metodama [6]. Pristup SPH metode gore opisanim problemima je sljedeći:

- Domena fluida je predstavljena skupom proizvoljno raspoređenih čestica. Bitno je naglasiti da nije potrebno definirati vezu među česticama, odnosno metoda je bezmrežna (engleski „Meshfree“).
- Koristi se metoda integralne reprezentacije za aproksimaciju prostorne funkcije koja se često naziva bazna, odnosno jezgrena aproksimacija (engleski „kernel approximation“). Ona se obavlja pomoću baznih, odnosno jezgrenih podintegralnih funkcija.
- Jezgrena aproksimacija se nadalje aproksimira koristeći čestice, što se naziva aproksimacija česticama (engleski „particle approximation“). Integral u integralnoj aproksimaciji funkcije se zamijeni sumacijom određenih vrijednosti u susjednim

česticama iz lokalne domene koja se naziva nosač funkcije (engleski „compact support”). Nosač jezgrene funkcije je zatvoreni skup (podskup domene funkcije) na kojemu jezgrene funkcija poprima vrijednosti različite od nule.

- Aproksimacija česticama se provodi u svakom vremenaskom koraku, odnosno metoda je adaptivna.
- Također se aproksimacija česticama provodi na sve članove prostornih funkcija u parcijalnim diferencijalnim jednažbama, čime se one svode na skup običnih diferencijalnih jednažbi koje ovise o vremenu.
- Takve obične diferencijalne jednažbe se obično rješavaju eksplicitnim numeričkim integracijama. Ovakvim pristupom moguće je brzo rješavanje problema, te je moguće dobiti vrijednosti funkcija u ovisnosti o vremenu.

#### ***4.2. Integralna reprezentacija funkcije i njene derivacije***

Za SPH formulaciju najprije je potrebno opisati integralnu reprezentaciju, odnosno takozvanu jezgrenu aproksimaciju funkcija ovisnih o prostoru. Koncept integralne reprezentacije funkcije  $f(x)$  koji se koristi u SPH metodi zasniva se na sljedećem izrazu:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} f(x_i') \delta(x_i - x_i') dx_i' \quad (24)$$

gdje je  $f$  funkcija trodimenzionalnog vektora položaja  $x_i$ , a  $\delta(x_i - x_i')$  je Diracova delta funkcija koja je definirana kao:

$$\begin{aligned} \delta(x_i - x_i') &= 1, \text{ za } x_i = x_i' \\ \delta(x_i - x_i') &= 0, \text{ za } x_i \neq x_i' \end{aligned} \quad (25)$$

U jednadžbi (24),  $\Omega$  predstavlja volumen po kojem se vrši integracija koji sadržava vektor položaja  $x_i$ . Ta jednadžba pokazuje da se funkcija može predstaviti u integralnom obliku. Važno je naglasiti da je integralni opis funkcije u jednadžbi (24) egzaktni zbog korištenja Diracove delta funkcije, dok god je  $f(x_i)$  definirana i neprekidna na  $\Omega$ . Ukoliko se delta funkcija  $\delta(x_i - x_i')$  zamijeni glatkom jezgrenom funkcijom (engleski „smoothing function“)  $W(x_i - x_i', h)$ , integralna reprezentacija funkcije  $f(x_i)$  glasi:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (26)$$

gdje će se funkcija  $W(x_i - x_i', h)$  u daljnjem tekstu zvati jezgrena funkcija. Jezgrena funkcija ovisi o nosaču funkcije  $h$  (u stranoj literaturi se često naziva i „smoothing length“) koji definira područje utjecaja jezgrena funkcije. Bitno je naglasiti da jednadžba (26) predstavlja samo aproksimaciju funkcije  $f(x_i)$  jer je delta funkcija zamijenjena jezgrenom funkcijom. Bitne karakteristike jezgrenih funkcija su:

- Jezgrena funkcija mora biti normalizirana po području definicije funkcije:

$$\int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \quad (27)$$

- Jezgrena funkcija izvan nosača funkcije treba biti jednaka nuli (kompaktna, engleski „compact support“), odnosno:

$$W(x_i - x_i', h) = 0, \text{ za } |x_i - x_i'| > h \quad (28)$$

Vrijednost  $|x_i - x_i'| \leq h$  određuje područje definicije funkcije u kojoj funkcija nije jednaka nuli.

- Jezgrena funkcija koja opisuje fizikalne veličine čestice na položaju  $x_i$  mora biti pozitivna za svaki  $x_i'$  unutar nosača funkcije:

$$W(x_i - x_i', h) \geq 0, \text{ za } |x_i - x_i'| \leq h \quad (29)$$

- Jezgrena funkcija mora monotono padati povećanjem udaljenosti od čestice, odnosno povećanjem  $|x_i - x_i'|$ .

- Smanjenjem nosača funkcije  $h$ , jezgrena funkcija treba težiti Diracovoj delta funkciji:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x_i - x_i', h) = \delta(x_i - x_i') \quad (30)$$

- Za jezgrenu funkciju se često koriste parne (simetrične) funkcije, odnosno vrijedi:

$$W(x_i - x_i', h) = W(-(x_i - x_i'), h) \quad (31)$$

- Jezgrena funkcija treba biti dovoljno glatka, odnosno dovoljno derivabilna.

U SPH literaturi su se koristile razne jezgrene funkcije, čija će se konstrukcija pojasniti u sljedećem poglavlju.

Ukoliko se pretpostavi da je funkcija  $f(x_i)$  derivabilna, te iz izraza (26) razvije  $f(x_i')$  u Taylorov red oko  $x_i$  dobije se:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \int_{\Omega} [f(x_i) + f'(x_i)(x_i' - x_i) + r((x_i' - x_i)^2)] W(x_i - x_i', h) dx_i' \\ f(x_i) &= f(x_i) \int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' + \\ &+ f'(x_i) \int_{\Omega} (x_i' - x_i) W(x_i - x_i', h) dx_i' + r(h^2) \end{aligned} \quad (32)$$

gdje je  $r$  residual, odnosno ostatak. Važno je naglasiti da je  $W(x_i - x_i', h)$  parna funkcija u odnosu na  $x_i$ , prema tome je  $(x_i' - x_i)W(x_i - x_i', h)$  neparna funkcija, te je:

$$\int_{\Omega} (x_i' - x_i) W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \quad (33)$$

Koristeći jednadžbe (26) i (33), jednadžba (32) se može pisati:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} f(x_i) W(x_i - x_i', h) dx_i' + r(h^2) \quad (34)$$

Iz gornje jednadžbe se vidi da je je ovakva integralna aproksimacija funkcije drugog reda točnosti, ukoliko jezgrena funkcija zadovoljava uvjete parnosti i normalizacije.

Aproksimacija za prostornu derivaciju funkcije glasi:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x_i')}{\partial x_i'} W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (35)$$

Uz identitet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_i')}{\partial x_i'} W(x_i - x_i', h) &= \frac{\partial}{\partial x_i'} [f(x_i') W(x_i - x_i', h)] - \\ &- f(x_i') \frac{\partial W(x_i - x_i', h)}{\partial x_i'} \end{aligned} \quad (36)$$

izraz (35) postaje:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i'} [f(x_i') W(x_i - x_i', h)] dx_i' - \int_{\Omega} f(x_i') \frac{\partial W(x_i - x_i', h)}{\partial x_i'} dx_i' \quad (37)$$

Primjenom teorema o divergenciji na prvi integral u izrazu (37), te uzimajući u obzir da jezgrena funkcija izčezava na rubovima, možemo reći da je prvi integral jednak nuli ukoliko je područje definicije jezgrene funkcije podskup domene problema. Odnosno, za čestice koje su unutar domene problema, a jezgrene funkcije su im udaljene za najmanje  $h$  od rubova domene može se pisati:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} f(x_i') \frac{\partial W(x_i - x_i', h)}{\partial x_i'} dx_i' \quad (38)$$

Gornja jednačba pokazuje da se derivacija funkcije prenosi na derivaciju jezgrene funkcije. Ovakva formulacija je vrlo slična slaboj formulaciji, na primjer u metodi konačnih elemenata. Tu se parcijalnim integracijama smanjuje konzistentnost nepoznatih prostornih funkcija u svrhu pronalaženja stabilnih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Za čestice koje su blizu rubova domene (udaljenost čestice od ruba je manje od  $h$ ) jezgrena funkcija nije jednaka nuli na svojim rubovima, te relacija (38) ne vrijedi. U tu svrhu se kraj rubova dodaju razne vrste čestica o čemu će se govoriti poslije.

### 4.3. Aproksimacija česticama

Kao što je spomenuto, u SPH metodi je domena strujanja fluida diskretizirana konačnim skupom čestica koje nose masu. Infinitezimalni dio fluida  $dx_i'$  se u gornjim integracijama, na poziciji čestice  $\beta$ , zamjenjuje s konačnim volumenom čestice  $\Delta V_\beta$  koji je povezan s masom čestice  $m_\beta$  preko jednostavne relacije:

$$m_\beta = \Delta V_\beta \rho_\beta \quad (39)$$

gdje je  $\rho_\beta$  gustoća čestice (za  $\beta = 1, 2, \dots, N$ ), a  $N$  broj čestica koje se nalaze unutar nosača funkcije za česticu  $\beta$ .

Kontinuirana SPH integralna reprezentacija funkcije  $f(x_i)$  predstavljena jednačbom (26) se može pisati u diskretiziranom obliku:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\beta=1}^N f(x_\beta) W(x - x_\beta, h) \Delta V_\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{\rho_\beta} f(x_\beta) W(x - x_\beta, h) \end{aligned} \quad (40)$$

Uz napomenu da je  $x$  i dalje vektor, iako je ispuštena dosad korištena notacija  $x_i$  radi jednostavnosti. Konačno, aproksimacija funkcije  $f(x_\alpha)$  za česticu  $\alpha$  glasi:

$$f(x_\alpha) = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{\rho_\beta} f(x_\beta) W_{\alpha\beta} \quad (41)$$

gdje je:

$$W_{\alpha\beta} = W(x_\alpha - x_\beta, h) \quad (42)$$



Jednadžba (41) govori da se pomoću srednje vrijednosti funkcije za čestice unutar nosača funkcije čestice  $\alpha$  dobije vrijednost funkcije čestice  $\alpha$ . Što su čestice međusobno više razmaknute, to im je i međusobni utjecaj manji.

Za prostornu derivaciju funkcije, analogno se dobije:

$$\frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{\rho_\beta} f(x_\beta) \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (43)$$

gdje je:

$$\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{x_\alpha - x_\beta}{r_{\alpha\beta}} \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial r_{\alpha\beta}} = \frac{x_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}} \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial r_{\alpha\beta}} \quad (44)$$

dok je  $r_{\alpha\beta}$  udaljenost čestice  $\alpha$  od čestice  $\beta$ .

Ukoliko se gradijent u izrazu (43) uzme s obzirom na česticu  $\alpha$ , minus u jednadžbi se gubi, te se može pisati:

$$\frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{\rho_\beta} f(x_\beta) \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \quad (45)$$

Pomoću gornjih identiteta je moguće na više načina izvesti SPH formulaciju za parcijalne diferencijalne jednadžbe. Monaghan je iskoristio sljedeće identitete u svrhu stavljanja gustoće unutar gradijenta:

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho f(x_i)) - f(x_i) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right] \quad (46)$$

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \rho \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f(x_i)}{\rho} \right) + \frac{f(x_i)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right] \quad (47)$$

Gornji izrazi mogu se uvrstiti u (35), te ako se primjeni aproksimacija česticama (45) na članove derivacije, dobije se:

$$\frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{\rho_\alpha} \left[ \sum_{\beta=1}^N m_\beta [f(x_\beta) - f(x_\alpha)] \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \right] \quad (48)$$

$$\frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \rho_\alpha \left[ \sum_{\beta=1}^N m_\beta \left[ \frac{f(x_\beta)}{\rho_\beta^2} + \frac{f(x_\alpha)}{\rho_\alpha^2} \right] \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \right] \quad (49)$$

U gornjim jednadžbama se prostorna funkcija  $f(x)$  pojavljuje u parovima čestica (čestice  $\alpha$  i  $\beta$ ) što je dobro i poželjno svojstvo.

Potrebno je napomenuti da je SPH aproksimacija linearan operator, odnosno da vrijede sljedeće relacije:

$$\langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle \quad (50)$$

$$\langle cf_2 \rangle = c \langle f_2 \rangle \quad (51)$$

gdje je  $c$  konstanta, na primjer ako je funkcija  $f_1$  konstanta.

Također vrijedi:

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle \quad (52)$$

$$\langle f_1 + f_2 \rangle = \langle f_2 + f_1 \rangle \quad (53)$$

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_2 f_1 \rangle \quad (54)$$

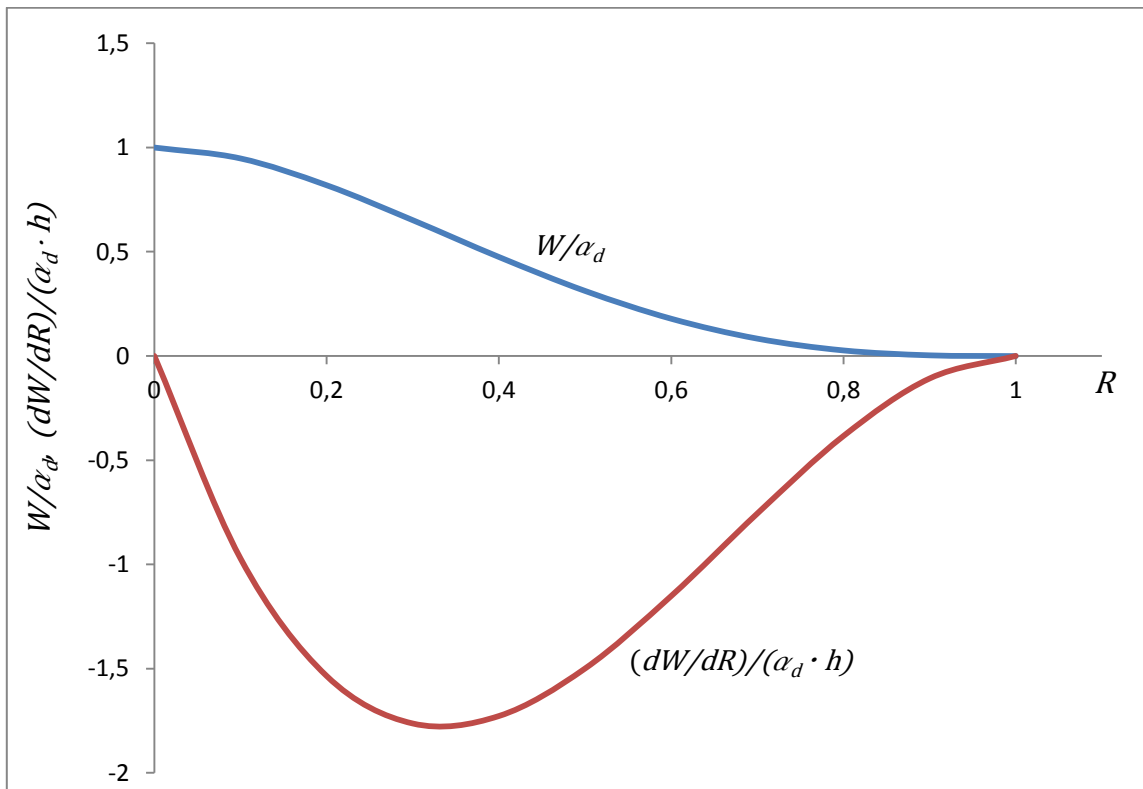
gdje se s otvorenim zagradama označava SPH aproksimacija prostorne funkcije. Jednadžbe (53) i (54) označavaju komutativnost zbrajanja i množenja.

## 5. JEZGRENE (BAZNE) FUNKCIJE

### 5.1. Često korištene jezgrene funkcije

Ovdje će se navesti neke jezgrene funkcije koje su se često koristile u brojnim radovima. Lucy (1977) je koristio zvonoliku krivulju kao jezgrenu funkciju:

$$W(x_i - x'_i, h) = W(R, h) = \alpha_d (1 + 3R)(1 - R)^3, \text{ za } R \leq 1 \quad (55)$$



Slika 4. Zvonolika jezgrene funkcija (55) i njezina derivacija

dok je  $W(R, h) = 0$  za  $R > 1$ , što se u daljnjem tekstu za ostale jezgrene funkcije neće pisati. Koeficijent  $\alpha_d$  iznosi  $5/4h$ ,  $5/\pi h^2$ , te  $105/16\pi h^3$  za jednodimenzionalne, dvodimenzionalne te trodimenzionalne probleme, redom. Gornje numeričke vrijednosti se

dobiju zadovoljavanjem uvjeta normalizacije (27). U jednadžbi (55)  $R$  je relativna udaljenosti između dvije čestice na mjestima  $x_i$  i  $x'_i$ , odnosno:

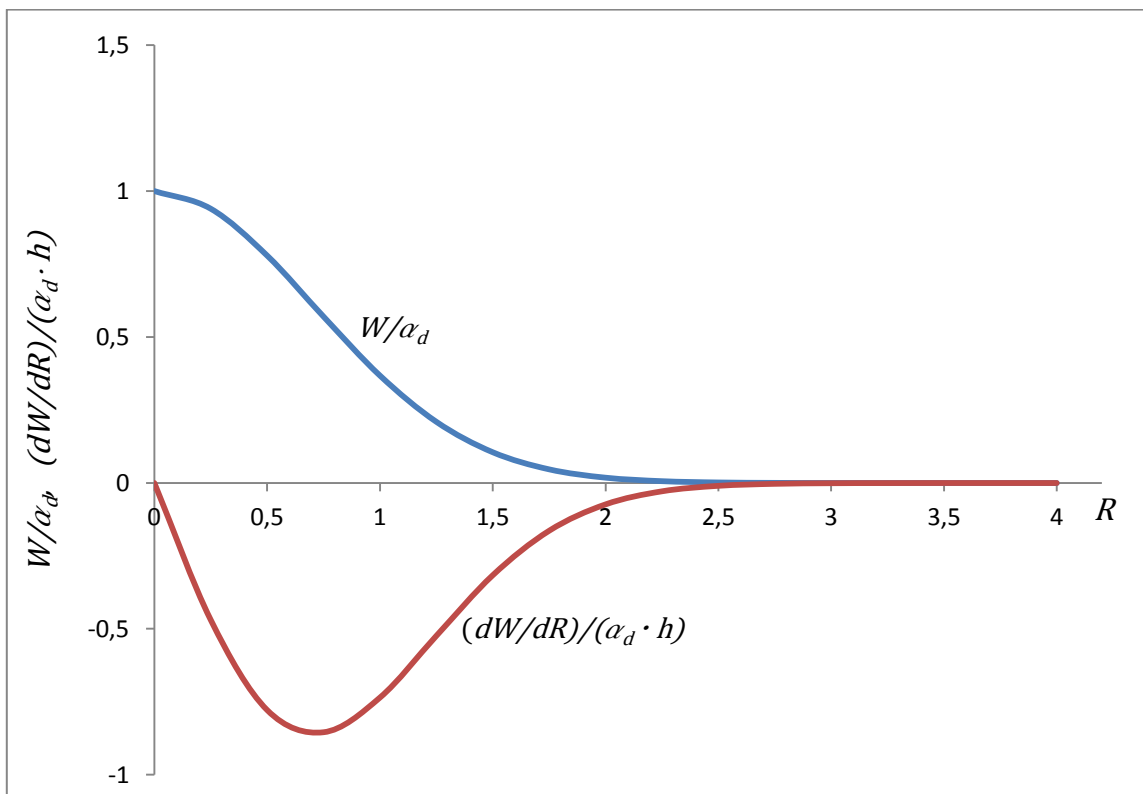
$$R = \frac{r}{h} = \frac{|x_i - x'_i|}{h} \quad (56)$$

gdje je  $r$  udaljenost između dvije čestice.

Gingold i Monaghan (1977) su u svom radu o ne – sfernim zvijezdama koristili sljedeću Gaussovu jezgrenu funkciju:

$$W(R, h) = \alpha_d e^{-R^2} \quad (57)$$

gdje koeficijent  $\alpha_d$  iznosi  $1/\pi^{1/2}h$ ,  $1/\pi h^2$  i  $1/\pi^{3/2}h^3$ , redom za jednodimenzionalne, dvodimenzionalne te trodimenzionalne probleme.



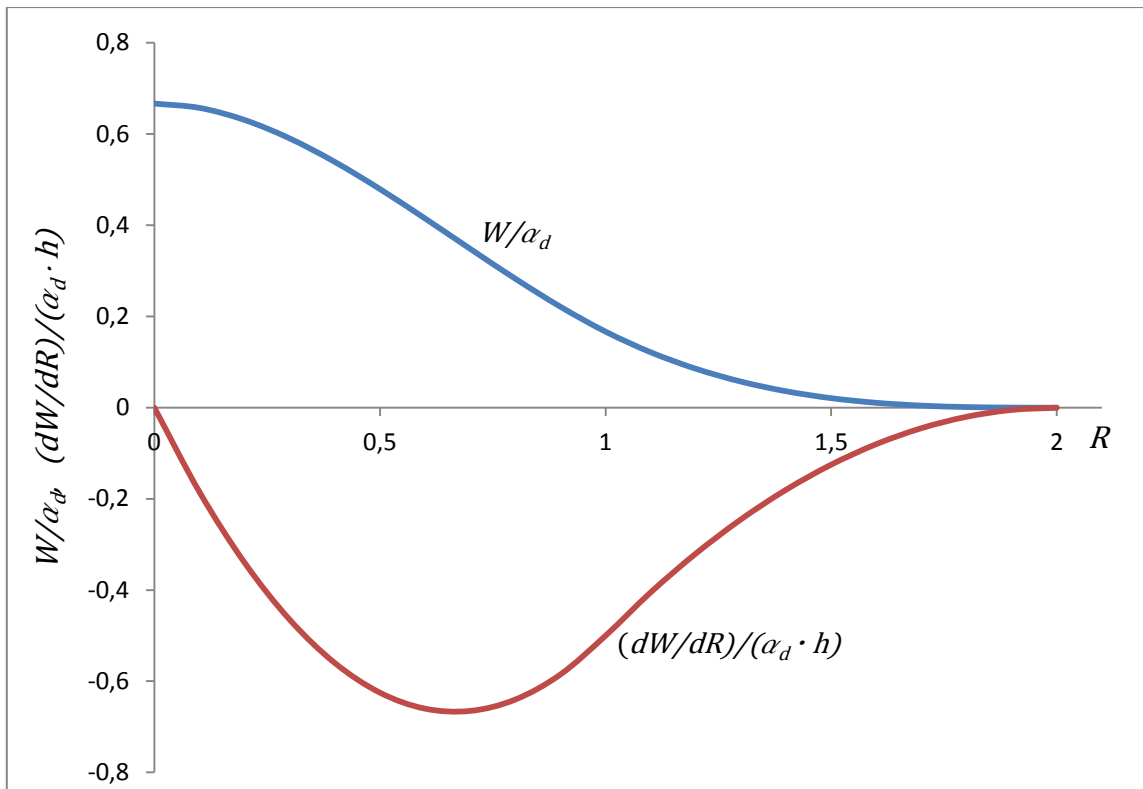
Slika 5. Gaussova jezgrena funkcija (57) i njezina derivacija

Gaussova jezgrena funkcija je dovoljno glatka (derivabilna). Ona se smatra „zlatnim“ izborom pošto je vrlo stabilna i točna, posebno za nepravilno raspoređene čestice. Međutim, ona teoretski nikada ne dostiže nulu, osim kada  $R$  teži beskonačnosti, ali numerički brzo dostiže nulu, pa je praktički kompaktna.

Monaghan i Lattanzio (1985) su došli do takozvane B – spline jezgrena funkcije koja se temelji na kubnom spline-u:

$$\begin{aligned}
 W(R, h) &= \alpha_d \left( \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 \right), \text{ za } 0 \leq R < 1 \\
 &= \frac{\alpha_d}{6} (2 - R)^3, \text{ za } 1 \leq R < 2 \\
 &= 0, \text{ za } R \geq 2
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

gdje koeficijent  $\alpha_d$  iznosi  $1/h$ ,  $15/7\pi h^2$  i  $3/2\pi h^3$ , redom za jednodimenzionalne, dvodimenzionalne te trodimenzionalne probleme.



Slika 6. B – spline jezgrena funkcija (58) i njezina derivacija

Ova jezgrena funkcija se dosad najviše koristila u SPH radovima jer dosta slični Gaussovoj, dok joj je nosač funkcije manji. Vidljivo je da je ova funkcija različita od nule do  $2R$ , čime je definiran parametar uvećanja nosača funkcije  $\kappa = 2$ . Druga derivacija B – spline funkcije je po dijelovima linearna funkcija što može dovesti do problema stabilnosti. Također, teže ju je koristiti u kodovima pošto je zadana kao dvije, odnosno tri funkcije za različite vrijednosti varijable  $R$ .

Uz navedene jezgrene funkcije, koristile su se i mnoge druge funkcije višeg reda (polinomi četvrtog, pa čak i petog reda), funkcije nižeg reda (odnosno kvadratne jezgrene funkcije) kao i takozvane super gaussianske jezgrene funkcije. Jezgrene funkcije višeg reda mogu biti negativne u području definicije, što može dovesti do nekih nefizikalnih pojava pri rješavanju hidrodinamičkih problema.

## 5.2. Aproksimacija prostorne funkcije

Kao što je spomenuto u trećem poglavlju, ukoliko se prostorna funkcija  $f$  pomnoži s jezgrenom funkcijom  $W$ , te integrira po području definicije  $\Omega$  neke čestice, može se dobiti aproksimacija prostorne funkcije za tu česticu:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (59)$$

Ukoliko je  $f(x_i)$  dovoljno derivabilna funkcija, razvojem  $f(x_i')$  u Taylorov red u okolini točke  $x_i$  slijedi:

$$f(x_i') = f(x_i) + f'(x_i)(x_i' - x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)(x_i' - x_i)^2 + \dots \quad (60)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)$$

gdje zadnji član predstavlja ostatak, odnosno grešku razvoja u Taylorov red. Uvrštavanjem jednadžbe (60) u jednadžbu (59) slijedi:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W(x_i - x_i', h) dx_i' + \\ &\quad + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W(x_i - x_i', h) dx_i' + \\ &\quad + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f^{(k)}(x_i) + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

gdje je:

$$A_k = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (62)$$

Da bi se funkcija  $f(x_i)$  aproksimirala do  $n$  – tog reda, koeficijenti  $A_k$  na desnoj strani jednadžbe (61) moraju biti jednaki članovima  $f^{(k)}(x_i)$  na lijevoj strani jednadžbe. Na temelju tih razmatranja jezgrena funkcija mora zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \\ A_1 &= -h \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ A_2 &= \frac{h^2}{2!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^2 W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

⋮

$$A_n = \frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^n W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0$$

Uvjeti (63) se mogu jednostavnije napisati u obliku  $k$  – tih momenata,  $M_k$  jezgrene funkcije:

$$M_0 = \int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1$$

$$M_1 = \int_{\Omega} (x_i - x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0$$

$$M_2 = \int_{\Omega} (x_i - x_i')^2 W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \quad (64)$$

⋮

$$M_n = \int_{\Omega} (x_i - x_i')^n W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0$$

Prva jednađba među uvjetima (64) je uvjet normalizacije jezgrene funkcije, dok druga jednađba predstavlja uvjet simetričnosti, odnosno parnosti funkcije  $W(x_i - x_i', h)$ . Kao što je spomenuto, zadovoljenjem ova dva uvjeta je osigurana točnost prvog reda SPH aproksimacije jezgrenom funkcijom.

### ***5.3. Aproksimacija derivacija prostorne funkcije***

Pošto su najviše derivacije koje se pojavljuju u parcijalnim diferencijalnim jednađbama dinamike fluida drugog reda, ovdje će se razmatrati samo aproksimacije prve i druge derivacije. Ukoliko je to potrebno, procedura se jednostavno može proširiti na derivacije višeg reda. Također se derivacije višeg reda mogu promatrati kao derivacije derivacija nižeg reda (na primjer, druga derivacije je derivacije prve derivacije i tako dalje).



Aproksimacija prve derivacije prostorne funkcije se može dobiti zamjenom  $f(x_i)$  s  $f'(x_i)$  u jednadžbi (59), odnosno:

$$f'(x_i) = \int_{\Omega} f'(x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (65)$$

Primjenom parcijalne integracije, gornji izraz se može pisati kao:

$$f'(x_i) = \int_{\partial\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) n_i d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} f(x_i') W'(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (66)$$

gdje se prvi član integrira po konturi područja definicije  $\partial\Omega$ , a  $n_i$  je vektor normale na  $\partial\Omega$ .

Uvrštavanjem jednakosti (60) u drugi integral na desnoj strani izraza (66) dobije se:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \int_{\partial\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) n_i d(\partial\Omega) - \\ &- \int_{\Omega} \left[ \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. W'(x_i - x_i', h) \right] dx_i' \\ &= \int_{\partial\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) n_i d(\partial\Omega) - \\ &- \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W'(x_i - x_i', h) dx_i' + \right. \\ &\quad \left. + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \right] \\ &= \int_{\partial\Omega} f(x_i') W(x_i - x_i', h) n_i d(\partial\Omega) + \sum_{k=0}^n A_k' f^{(k)}(x_i) + \\ &\quad + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \end{aligned} \quad (67)$$

gdje je:

$$A_k' = \frac{(-1)^{k+1}h^k}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W'(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (68)$$

Prva derivacija prostorne funkcije,  $f'(x_i)$  se može aproksimirati do  $n$  – tog reda ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} M_0' &= \int_{\Omega} W'(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ M_1' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i') W'(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \\ M_2' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^2 W'(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ &\vdots \\ M_n' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^n W'(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

i

$$W(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (70)$$

Uvjet (70) je jednak uvjetu kompaktnosti jezgrene funkcije (28) i on vodi do iščezavanja prvog integrala u izrazu (67) za bilo koju funkciju  $f(x_i)$ . Prvi izraz u uvjetima (69) je ustvari samo drugačiji zapis uvjeta (70) jer vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W'(x_i - x_i', h) dx_i' &= \int_{\partial\Omega} 1 W(x_i - x_i', h) d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} (1)' W(x_i - x_i', h) dx_i' \\ &= \int_{\partial\Omega} W(x_i - x_i', h) n_i d(\partial\Omega) = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

Aproksimacija druge derivacije može se također dobiti zamjenom prostorne funkcije  $f(x_i)$  s  $f''(x_i)$  u jednadžbi (59):

$$f''(x_i) = \int_{\Omega} f''(x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (72)$$

Nadalje, parcijalnom integracijom slijedi:

$$\begin{aligned}
f''(x_i) &= \int_{\partial\Omega} f'(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} f'(x_i')W'(x_i - x_i', h)dx_i' \\
&= \int_{\partial\Omega} f'(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} f(x_i')W'(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) + \\
&\quad + \int_{\Omega} f(x_i')W''(x_i - x_i', h)dx_i'
\end{aligned} \tag{73}$$

Uvrštavanjem jednakosti (60) u treći integral na desnoj strani izraza (73) dobije se:

$$\begin{aligned}
f''(x_i) &= \int_{\partial\Omega} f'(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} f(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[ \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. W''(x_i - x_i', h) \right] dx_i' \\
&= \int_{\partial\Omega} f'(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} f(x_i')W'(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) + \\
&\quad + \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x_i)}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W''(x_i - x_i', h) dx_i' + \right. \\
&\quad \left. + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right) \right] \\
&= \int_{\partial\Omega} f'(x_i')W(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) - \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} f(x_i')W'(x_i - x_i', h)n_i d(\partial\Omega) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^n A_k'' f^{(k)}(x_i) + r_n \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)
\end{aligned} \tag{74}$$

gdje je:

$$A_k'' = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left( \frac{x_i - x_i'}{h} \right)^k W''(x_i - x_i', h) dx_i' \quad (75)$$

Slično kao i za samu funkciju i njezinu prvu derivaciju, druga derivacija prostorne funkcije,  $f''(x_i)$  se može aproksimirati do  $n - \text{tog}$  reda ukoliko su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} M_0'' &= \int_{\Omega} W''(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ M_1'' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i') W''(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ M_2'' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^2 W''(x_i - x_i', h) dx_i' = 2 \\ &\vdots \\ M_n'' &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^n W''(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

i

$$W(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (77)$$

$$W'(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (78)$$

Izrazi (77) i (78) uzrokuju izčezavanje prva dva integrala na desnoj strani jednadžbe (74).

Ukratko, ukoliko se prostorna funkcija i njezine prve dvije derivacije žele aproksimirati do  $n - \text{tog}$  reda točnosti, jezgrena funkcija treba zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \\ M_1 &= \int_{\Omega} (x_i - x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ M_2 &= \int_{\Omega} (x_i - x_i')^2 W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (79)$$

$$M_n = \int_{\Omega} (x_i - x_i')^n W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0$$

i

$$\begin{aligned} W(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} &= 0 \\ W'(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{80}$$

Ovi uvjeti se mogu iskoristiti za konstruiranje jezgrenih funkcija za parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda. Uvjeti (80) predstavljaju kompaktnost jezgrene funkcije i njene derivacije. Koristeći istu proceduru kao u ovom poglavlju, moguće je jednostavno dobiti uvjete za više derivacije prostorne funkcije. Uvjeti (80) se tad proširuju. Na primjer ukoliko je potrebno dobiti aproksimaciju  $k$  – te derivacije prostorne funkcije do  $n$  – tog reda točnosti, slijedi:

$$\begin{aligned} W(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} &= 0 \\ W'(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} &= 0 \\ \vdots & \\ W^{(k-1)}(x_i - x_i', h)|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{81}$$

#### **5.4. Konzistentnost aproksimacije jezgrenim funkcijama**

Ako aproksimacija (metodom konačnih razlika, metodom konačnih elemenata, pa i SPH metodom) može egzaktno reproducirati konstantu, govori se o konzistentnosti nultog reda, odnosno  $C^0$  konzistentnosti. Općenito, ako aproksimacija može egzaktno reproducirati polinom  $k$  – tog reda, govori se o konzistentnosti  $k$  – tog reda, odnosno  $C^k$  konzistentnosti. Pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi metodama slabe formulacije, kao na primjer Galerkin metodom [7], potrebna je minimalna konzistentnost u svrhu osiguranja

konvergencije diskretiziranog sustava jednadžbi. Minimalna potrebna konzistentnost ovisi o redu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju problem. Za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu reda  $2k$ , minimalna potrebna konzistentnost je  $C^k$  za Galerkinovu formulaciju.

Slično kao u metodi konačnih elemenata, da bi SPH aproksimacija jezgrenim funkcijama egzaktno reproducirala prostornu funkciju, jezgrena funkcija treba zadovoljiti određene uvjete. Da bi se konstanta  $f(x_i) = c$  (odnosno polinom nultog reda) egzaktno reproducirala SPH jezgrenom aproksimacijom, potrebno je zadovoljiti:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} c W(x_i - x_i', h) dx_i' = c \quad (82)$$

Odnosno:

$$\int_{\Omega} W(x_i - x_i', h) dx_i' = 1 \quad (83)$$

Može se zaključiti, da je uvjet normalizacije jezgrene funkcije (27) ekvivalentan uvjetu nulte konzistentnosti aproksimacije jezgrenim funkcijama.

Za egzaktnu reprodukciju linearne funkcije  $f(x_i) = c_0 + c_1 x_i$  (polinoma prvog reda) potrebno je zadovoljiti:

$$f(x_i) = \int_{\Omega} (c_0 + c_1 x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' = c_0 + c_1 x_i \quad (84)$$

što se može pojednostavniti upotrebom izraza (83):

$$\int_{\Omega} x_i' W(x_i - x_i', h) dx_i' = x_i \quad (85)$$

Množenjem jednadžbe (83) s  $x_i$  dobije se:

$$\int_{\Omega} x_i W(x_i - x_i', h) dx_i' = x_i \quad (86)$$

Oduzimanjem jednadžbe (85) od jednadžbe (86) slijedi:

$$\int_{\Omega} (x_i - x_i') W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \quad (87)$$

Gornja jednađba je jednaka drugoj jednađbi u uvjetima (79). Riječima, druga jednađba u uvjetima (79) predstavlja uvjet linearne konzistentnosti SPH jezgrene aproksimacije. Da bi gornja jednađba bila zadovoljena, jezgrena funkcija mora biti simetrična da bi njezin prvi moment bio jednak nuli. Znači, ukoliko je uvjet (31) u trećem poglavlju zadovoljen, SPH aproksimacija jezgrenim funkcijama je  $C^1$  konzistentna.

U svrhu reprodukcije polinoma višeg reda promatrat će se monom  $k$  – tog reda, odnosno funkcija  $f(x_i) = c_k x_i^k$ . Aproksimacijom funkcije u ishodištu (odnosno za  $x_i = 0$ ) slijedi:

$$f(0) = \int_{\Omega} c_k x_i'^k W(0 - x_i', h) dx_i' = 0 \quad (88)$$

Općenitiji izraz se može dobiti translacijom koordinatnog sustava na proizvoljan položaj  $x_i$ . Na taj način se dobije aproksimacija funkcije u novom koordinatnom sustavu:

$$\int_{\Omega} (x_i - x_i')^k W(x_i - x_i', h) dx_i' = 0 \quad (89)$$

Gornja jednađba je ista kao i zadnja jednađba u uvjetima (79), tako da se ti uvjeti mogu promatrati kao uvjeti konzistentnosti  $C^k$ , gdje je  $k$  red polinoma kojeg se želi reproducirati.

### 5.5. Konzistentnost aproksimacije česticama

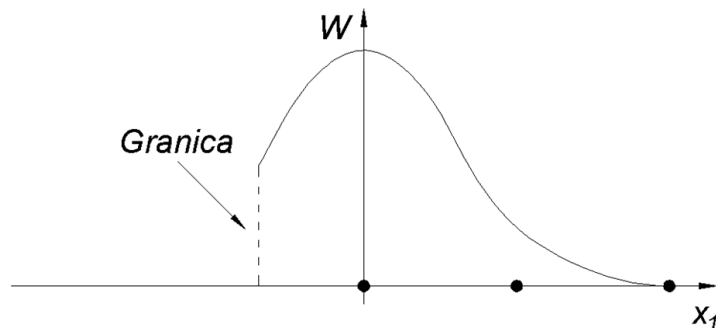
Prethodno opisani koncepti konzistentnosti ne osiguravaju konzistentnost prilikom aproksimacije problema česticama jer su izvedeni za kontinuiranu (glatku) jezgenu aproksimaciju. U bezmrežnim metodama, fenomen u kojem diskretizirane jednadžbe ne zadovoljavaju uvjete opisane jednadžbama (79) zove se nekonzistentnost čestica (engleski „particle inconsistency“, Morris, 1996; Belytschko et al., 1996.). Diskretni ekvivalenti uvjeta za konstantnu (83) i linearnu konzistentnost (87) su:

$$\sum_{\beta=1}^N W(x - x_{\beta}, h) \Delta x_{\beta} = 1 \quad (90)$$

$$\sum_{\beta=1}^N (x - x_{\beta}) W(x - x_{\beta}, h) \Delta x_{\beta} = 1 \quad (91)$$

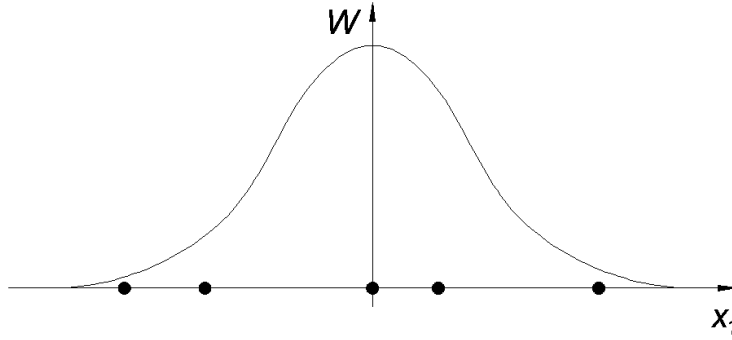
gdje je  $N$  ukupan broj čestica koje se nalaze unutar nosača funkcije za česticu na mjestu  $x$ .

Ovi diskretizirani uvjeti nisu uvijek zadovoljeni. Jedan problem nastaje blizu granice domene problema jer je nosač funkcije za česticu blizu granice „odsječen“ granicom problema (slika 7.).



Slika 7. Aproksimacija česticama za česticu čiji je nosač funkcije odsječen granicom





Slika 8. Aproximacija česticama za česticu koja ima nejednoliko raspoređene čestice u nosaču funkcije

Također, ukoliko su čestice nejednoliko raspoređene, uvjeti (90) i (91) ne moraju biti zadovoljeni, a često i nisu (slika 8.). Jedan od načina za povratiti diskretne uvjete konzistentnosti aproksimacije česticama do  $\delta$  reda zasniva se na pisanju jezgrene funkcije u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
 W(x - x_\beta, h) &= b_0(x, h) + b_1(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right) + b_2(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^2 + \dots \\
 &= \sum_{\gamma=0}^{\delta} b_\gamma(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\gamma
 \end{aligned} \tag{92}$$

Korištenjem gornjeg izraza uvjeti (79) se mogu pisati kao:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\beta=1}^N \left[ \sum_{\gamma=0}^{\delta} b_\gamma(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\gamma \right] \Delta x_\beta &= 1 \\
 \sum_{\beta=1}^N \left[ \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right) \right] \left[ \sum_{\gamma=0}^{\delta} b_\gamma(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\gamma \right] \Delta x_\beta &= 0 \\
 \vdots \\
 \sum_{\beta=1}^N \left[ \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\delta \right] \left[ \sum_{\gamma=0}^{\delta} b_\gamma(x, h) \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\gamma \right] \Delta x_\beta &= 0
 \end{aligned} \tag{93}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^{\delta} b_{\gamma}(x, h) \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{x - x_{\beta}}{h} \right)^{\gamma} \Delta x_{\beta} &= 1 \\
\sum_{\gamma=0}^{\delta} b_{\gamma}(x, h) \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{x - x_{\beta}}{h} \right)^{\gamma+1} \Delta x_{\beta} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{\gamma=0}^{\delta} b_{\gamma}(x, h) \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{x - x_{\beta}}{h} \right)^{\gamma+\delta} \Delta x_{\beta} &= 0
\end{aligned} \tag{94}$$

Ukoliko se uvede supstitucija:

$$m_{\delta}(x, h) = \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{x - x_{\beta}}{h} \right)^{\delta} \Delta x_{\beta} \tag{95}$$

Moguće je odrediti  $\delta + 1$  koeficijenata  $b_{\gamma}(x, h)$  rješavajući sljedeći linearni sustav jednažbi:

$$\begin{bmatrix} m_0(x, h) & m_1(x, h) & \cdots & m_{\delta}(x, h) \\ m_1(x, h) & m_2(x, h) & \cdots & m_{1+\delta}(x, h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{\delta}(x, h) & m_{\delta+1}(x, h) & \cdots & m_{\delta+\delta}(x, h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0(x, h) \\ b_1(x, h) \\ \vdots \\ b_{\delta}(x, h) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{96}$$

Ili jednostavnije:

$$Mb = I \tag{97}$$

gdje je  $M$  matrica momenata,  $b$  vektor nepoznatih koeficijenata, a  $I$  vektor konstanti.

Nakon određivanja nepoznatih koeficijenata  $b_{\gamma}(x, h)$ , može se izračunati jezgrena funkcija prema (92) što osigurava konzistentnost do  $\delta$  reda. Ovakav postupak u biti opisuje pristup kako konstruirati neku vrstu jezgrene funkcije za SPH metode. Sličan pristup zvan engleski „reproducing kernel particle method“ (RKPM u daljnjem tekstu, Liu and Chen, 1995; Liu et al., 1995a, b) zasniva se na korekciji jezgrene funkcije. Reproducirajuća (nova) jezgrena funkcija  $\bar{W}$  je razvijena množeći funkciju u jednažbi (92) s takozvanom prozor funkcijom

(engleski „window function“)  $W_w(x - x_\beta, h)$  koja je najčešće tradicionalna SPH jezgrena funkcija (kao na primjer kubni spline):

$$\bar{W}(x - x_\beta, h) = W(x - x_\beta, h) W_w(x - x_\beta, h) \quad (98)$$

Također se nepoznati  $\delta + 1$  koeficijenti  $b_\gamma(x, h)$  određuju rješavajući isti linearni sustav jednadžbi (96), s tim da je sad izraz za moment:

$$m_\delta(x, h) = \sum_{\beta=1}^N \left( \frac{x - x_\beta}{h} \right)^\delta W_w(x - x_\beta, h) \Delta x_\beta \quad (99)$$

Nedostatak ovog pristupa je potrebno dodatno vrijeme u kojem procesor računa sustav jednadžbi (96) za svaku od čestica. Također, pošto se čestice gibaju u vremenu, potrebno je računati nove jezgrene funkcije za svaki vremenski korak. Još jedan problem nastaje ukoliko je matrica momenata  $M$  singularna, stoga razmještaj čestica mora zadovoljiti određene uvjete. Međutim, s ovakvim načinom osiguranja konzistentnosti se povećava točnost aproksimacije česticama, ukoliko se može osigurati da matrica momenata  $M$  ne bude singularna. Pri korištenju ovog pristupa za rješavanja hidrodinamičkih problema zabilježeni su i sljedeći problemi:

- Rezultirajuća jezgrena funkcija je negativna na nekim dijelima unutar nosača funkcije. To može dovesti do nefizikalnih pojava kao što su: negativna gustoća, negativna energija...
- Može se dogoditi da funkcija monotono ne pada s porastom udaljenosti između čestica.
- Također se može dogoditi da funkcija nije simetrična, odnosno parna.

Prema tome, iako se konzistentnost aproksimacije česticama može povratiti na ovaj način, treba biti oprezan pri rješavanju hidrodinamičkih problema.

## 6. SPH FORMULACIJA NAVIER – STOKESOVIH JEDNADŽBI

### 6.1. Aproksimacije gustoće

Aproksimacija gustoće je vrlo važna u SPH metodi pošto ona određuje raspodjelu čestica i time veličinu nosača funkcije. Postoje dva načina za aproksimaciju gustoće u konvencionalnoj SPH metodi. Prvi pristup je takozvana sumacija gustoće (engleski „summation density“), koja direktno primjenjuje SPH aproksimaciju na samu gustoću (kao funkciju). Za česticu  $\alpha$ , njena gustoća se ovim pristupom može pisati kao:

$$\rho_\alpha = \sum_{\beta=1}^N m_\beta W_{\alpha\beta} \quad (100)$$

gdje je  $N$  broj čestica unutar nosača funkcije  $W$  čestice  $\alpha$ ,  $m_\beta$  masa čestice  $\beta$ , dok je  $W_{\alpha\beta}$  vrijednost jezgrene funkcije čestice  $\alpha$  za argument ovisan o čestici  $\beta$ .

$$W_{\alpha\beta} = W(x_{i(\alpha)} - x_{i(\beta)}, h) = W(|x_{i(\alpha)} - x_{i(\beta)}|, h) = W(R_{\alpha\beta}, h) \quad (101)$$

gdje je:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{r_{\alpha\beta}}{h} = \frac{|x_{i(\alpha)} - x_{i(\beta)}|}{h} \quad (102)$$

relativna udaljenost čestice  $\alpha$  od čestice  $\beta$ , a  $r_{\alpha\beta}$  je prava udaljenost između te dvije čestice.

Jednadžba (100) govori da se gustoća čestice  $\alpha$  jednostavno može aproksimirati težinskom srednjom vrijednosti čestica unutar nosača jezgrene funkcije čestice  $\alpha$ . Potrebno je napomenuti da se u ovom poglavlju koriste indeksi  $i, j = 1, 2, 3$  koji označavaju prostorne tenzore (ili vektore), te njihove derivacije (divergenciju ili gradijent), te prije spomenuti

indeksi  $\alpha$  i  $\beta$  za označavanje čestica na koje se odnose članovi, a koji su zbog jednostavnosti zapisani u zagradama.

Još jedan pristup za aproksimaciju gustoće je takozvana kontinuirana gustoća (engleski „continuity density“). Taj pristup aproksimira gustoću prema jednadžbi kontinuiteta koristeći osnovne koncepte SPH aproksimacija, uz različite transformacije desne strane jednadžbe (16). Ukoliko se SPH aproksimacija primjeni samo na dio koji se odnosi na divergenciju brzine (desna strana jednadžbe (16)), a gustoća (također na desnoj strani iste jednadžbe) se promatra za česticu na koju se odnosi derivacija jezgrene funkcije, dobije se:

$$\frac{D\rho_{(\alpha)}}{Dt} = -\rho_{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (103)$$

Ukoliko se derivacija broja jedan napiše pomoću SPH aproksimacije, dobije se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (1) = \int (1) \frac{\partial}{\partial x_j} [W(x_j - x'_j, h)] dx'_j = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} = 0 \quad (104)$$

što se može pisati na sljedeći način (množenjem s  $\rho_{(\alpha)}$  i  $v_{j(\alpha)}$ ):

$$\rho_{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} = \rho_{(\alpha)} v_{j(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \right) \quad (105)$$

Pošto je gornja jednadžba jednaka nuli, zbrajanjem njene desne strane s desnom stranom jednadžbe (103), dobije se još jedan način aproksimacije gustoće:

$$\frac{D\rho_{(\alpha)}}{Dt} = \rho_{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\alpha\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (106)$$

gdje je  $v_{j(\alpha\beta)} = v_{j(\alpha)} - v_{j(\beta)}$ , razlika vektora brzine čestice  $\alpha$  i čestice  $\beta$ , uz napomenu da indeks  $j$  označava vektor. Ova jednadžba uvodi razliku brzine u aproksimaciju što je poželjno svojstvo u SPH formulaciji jer uzima u obzir relativnu brzinu parova čestica. Također,

primjetilo se da ovakav pristup smanjuje greške uslijed nekonzisntenosti aproksimacije česticama.

Popularniji oblik kontinuirane gustoće se može dobiti ukoliko se iskoristi sljedeći identitet u svrhu smještanja gustoće unutar operatora derivacije:

$$-\rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) - v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right] \quad (107)$$

Ukoliko se SPH aproksimacija primijeni na svaku derivaciju, te ukoliko se brzina u drugom članu na desnoj strani jednadžbe promatra za česticu za koju se računaju derivacije, dobije se najčešće korišteni oblik jednadžbe za kontinuiranu gustoću:

$$\frac{D\rho_{(\alpha)}}{Dt} = \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} v_{j(\alpha\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (108)$$

Ova jednadžba pokazuje da vremenska promjena gustoće čestice  $\alpha$  ovisi o relativnoj brzini između te čestice i svih čestica koje se nalaze unutar nosača jezgrene funkcije čestice  $\alpha$ .

## 6.2. Aproksimacije količine gibanja

Izvod SPH formulacija za aproksimaciju količine gibanja je sličan kao izvod kontinuirane gustoće. Koristeći razne transformacije, moguće je doći do različitih oblika jednadžbi od kojih će se neke ovdje prikazati. Jednadžba koja opisuje zakon o očuvanju količine gibanja (21) se može pisati u jednostavnijem obliku:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (109)$$

gdje je  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ , tenzor ukupnog naprezanja koji se sastoji od izotropnog tlaka  $p$  i viskozno naprezanja  $\tau_{ij}$ , koje je za Newtonovske fluide definiran izrazima (22) i (23). Direktnom primjenom SPH aproksimacije na gradijent na desnoj strani izraza (109) dobije se:

$$\frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = \frac{1}{\rho(\alpha)} \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \frac{\sigma_{ij(\beta)}}{\rho(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (110)$$

Zbrajanjem sljedećeg izraza:

$$\sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \frac{\sigma_{ij(\alpha)}}{\rho(\alpha)\rho(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} = \frac{\sigma_{ij(\alpha)}}{\rho(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \right) = 0 \quad (111)$$

na desnu stranu jednadžbe (110) dobije se:

$$\frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \frac{\sigma_{ij(\alpha)} + \sigma_{ij(\beta)}}{\rho(\alpha)\rho(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (112)$$

Gornja jednadžba je često korištena za proračun količine gibanja. Ovakva simetrizirana jednadžba umanjuje greške nastale uslijed nekonzistentnosti aproksimacije česticama.

Koristeći sljedeći identitet:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \right) + \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \quad (113)$$

te primjenjujući SPH aproksimaciju na derivacije desne strane gornjeg izraza slijedi:

$$\frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho(\beta)} \frac{\sigma_{ij(\alpha)}}{\rho(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} + \frac{\sigma_{ij(\alpha)}}{\rho(\alpha)^2} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho(\beta)} \rho(\beta) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (114)$$

Nakon jednostavnog preuređenja, može se pisati:

$$\frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \left( \frac{\sigma_{ij(\alpha)}}{\rho(\alpha)^2} + \frac{\sigma_{ij(\beta)}}{\rho(\beta)^2} \right) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \quad (115)$$

Ova jednadžba je često korištena i može se naći u brojnoj literaturi. Slično kao i (112) ovakva simetrizirana jednadžba također umanjuje greške nastale uslijed nekonzistentnosti aproksimacije česticama.

Koristeći izraz (22) i relaciju  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ , jednadžbe (112) i (115) se redom mogu pisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = & - \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \frac{p_{(\alpha)} + p_{(\beta)}}{\rho_{(\alpha)}\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \\ & + \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \frac{\mu_{(\alpha)}\varepsilon_{ij(\alpha)} + \mu_{(\beta)}\varepsilon_{ij(\beta)}}{\rho_{(\alpha)}\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dv_{i(\alpha)}}{Dt} = & - \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \left( \frac{p_{(\alpha)}}{\rho_{(\alpha)}^2} + \frac{p_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}^2} \right) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \\ & + \sum_{\beta=1}^N m_{(\beta)} \left( \frac{\mu_{(\alpha)}\varepsilon_{ij(\alpha)}}{\rho_{(\alpha)}^2} + \frac{\mu_{(\beta)}\varepsilon_{ij(\beta)}}{\rho_{(\beta)}^2} \right) \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \end{aligned} \quad (117)$$

Prve dvije sume desne strane gornjih jednadžbi predstavljaju SPH aproksimaciju tlaka, dok preostale dvije sume predstavljaju SPH aproksimaciju viskoznih sila. Također je potrebno razmotriti SPH aproksimaciju izraza tenzora deformacije (23) za česticu  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij(\alpha)} = & \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} - \\ & - \left( \frac{2}{3} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (118)$$

Jednostavnim manipulacijama jednadžbe (104) dobije se:

$$\sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} = v_{j(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} \right) = 0 \quad (119)$$



$$\sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} = v_{i(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} \right) = 0 \quad (120)$$

$$\sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} = v_{i(\alpha)} \left( \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} \right) = 0 \quad (121)$$

Oduzimajući gornja tri izraza od jednadžbe (118) dobije se izraz za aproksimaciju tenzora deformacije čestice  $\alpha$ , koji u sebi sadrži razlike brzina:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij(\alpha)} = & \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{j(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} + \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{j(\alpha)}} - \\ & - \left( \frac{2}{3} \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\beta\alpha)} \frac{\partial W_{(\alpha\beta)}}{\partial x_{i(\alpha)}} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (122)$$

SPH aproksimacija tenzora naprezanja za česticu  $\beta$  se jednostavno dobije zamjenom indeksa  $\alpha$  s  $\beta$  i  $\beta$  s  $\alpha$ . Nakon što se izračunaju tenzori deformacija za čestice  $\alpha$  i  $\beta$ , moguće je izračunati akceleraciju pomoću jednadžbi (116) i (117).

## **7. PREDNOSTI I NEDOSTATCI SPH METODE**

Većina bezmrežnih metoda temeljenih na sustavu čestica, pa tako i SPH metoda, su Lagrangeove metode u kojima se čestice gibaju u materijalnom koordinatnom sustavu po prethodno definiranim fizikalnim zakonima. Kao što je spomenuto, strujanje fluida se može promatrati u Eulerovom ili u Lagrangeovom koordinatnom sustavu. Stoga u računalnoj dinamici fluida postoje Eulerove i Lagrangeove mreže. Lagrangeove mreže (npr. u metodi konačnih elemenata) se gibaju zajedno s fluidom, dok su Eulerove (npr. u metodi konačnih volumena) nepomične u prostoru. Prednosti bezmrežnih metoda temeljenim na sustavu čestica nad metodama za koje je potrebna neka vrsta mreže su:

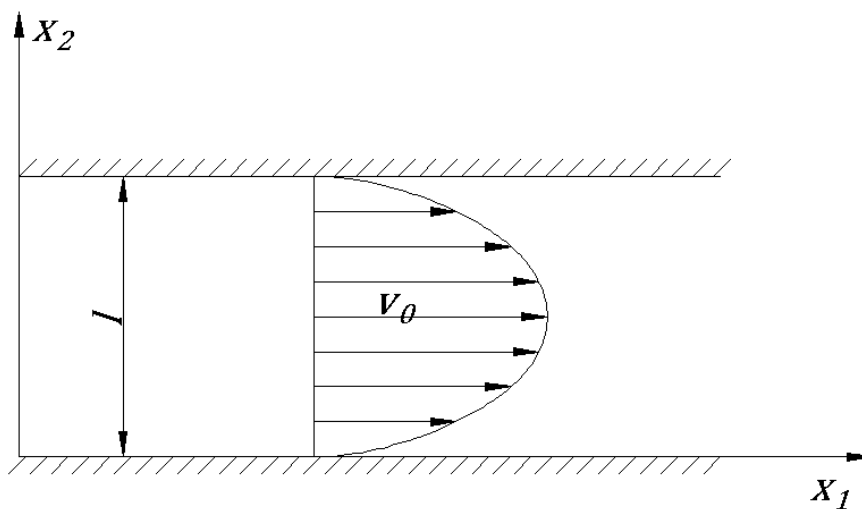
- Moguće je rješavati probleme mehanike kontinuuma (npr. mehanika fluida), kao i probleme opisane sa diskretnim fizikalnim objektima (npr. problemi astrofizike, zbog čega se i razvila ova metoda).
- Metoda se može koristiti u svrhu rješavanja mikroskopskih problema (npr. molekularna dinamika), srednjih problema, te makroskopskih problema.
- Fizikalni sustavi koji se mogu opisati ovom metodom mogu biti i deterministički i probabilistički.
- Domena je diskretizirana česticama koje nisu povezane, te se u svakom vremenskom koraku prostorne funkcije aproksimiraju na temelju trenutne pozicije proizvoljno raspoređenih čestica. To znači da je metoda adaptivna, i time omogućava bolji i lakši opis velikih deformacija.
- Za SPH aproksimaciju česticama nije potrebno da čestice budu povezane mrežom kao kod metode konačnih elemenata ili metode konačnih razlika.

- Diskretizacije komplicirane geometrije je jednostavnija metodom temeljenom na sustavu čestica jer je potrebna samo diskretizacija domene strujanja u početnom trenutku, uz odgovarajuće rubne uvjete.
- Rafiniranje sustava čestica (engleski „refinement“) je jednostavnije nego rafiniranje mreže.
- Zbog kombinacije Lagrangeovog pristupa i aproksimacije česticama, čestice služe kao ne samo točke u kojima se aproksimiraju prostorne funkcije, nego kao i nositelji materijalnih svojstava, po čemu se ova metoda razlikuje od metoda kojima je potrebna mreža. Također ju to čini i intuitivnijom.
- Jednostavnije je dobiti karakteristike fizikalnog sustava prateći gibanje čestica. Prema tome problemi koji uključuju slobodnu površinu, gibajuće ili deformabilne granice ne predstavljaju veliki problem.
- Vremensku promjenu prostornih funkcija je jednostavnije dobiti i prikazati.

Iako je SPH metoda korištena u brojnim područjima, ona ima neke nedostatke i probleme koje je potrebno istražiti. Najviše se to odnosi na numeričku analizu metode, koja nije dovoljno istražena. Međutim, kroz razna istraživanja i kroz praksu, polako se shvaćaju problemi stabilnosti, točnosti i konvergencije SPH metode. Problem je što je većina analiza napravljena za jednoliko raspoređene čestice, često i za jednodimenzionalne probleme, pa se rezultati takvih analiza često odnose na pojedine, prilično idealizirane slučajeve. Također utjecaj nejednolike raspodjele čestica na točnost rješenja nije dovoljno istražen. Međutim, s vremenom se može očekivati da će metoda postati široko upotrebljiva i robusna.

## 8. RJEŠENJE POISEUILLE – OVOG STRUJANJA SPH METODOM

Poiseuille – ovo strujanje je strujanje između dvije paralelne nepomične krute stijenke na položajima  $x_2 = 0$ , i  $x_2 = l$  (gdje je  $x_2$  koordinatna os usmjerena okomito na stijenke, slika 9). Na fluid u mirovanju počne djelovati masena sila  $F_1$  (ili vanjska sila ili gradijent tlaka) te se on počne gibati i nakon nekog vremena strujanje postaje stacionarno.



Slika 9. Stacionarni profil brzine Poiseuille – ovog strujanja

Navier – Stokesove jednačba koja opisuje Poiseuille – ovo strujanja pri malim Reynoldsovim brojevima glasi:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{dp}{dx_1} + \mu \frac{d^2v_1}{dx_2^2} \quad (123)$$

Ukoliko se promatra stacionarno strujanje, odnosno ukoliko se uzme u obzir  $v_1 \neq v_1(t)$ , iz jednačbe (123) slijedi stacionarni profil brzine:

$$v_1(x_2) = -\frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx_1} \left( \frac{l^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (124)$$

Konstanta  $l^2/4$  je dobivena iz standardnih rubnih uvjeta koji govore da je brzina jednaka nuli na nepomičnim stijenka. Gradijent tlaka se u jednadžbi (124) može zamijeniti masenom silom ukoliko je ona odgovorna za gibanje fluida.

Prema Morris et al. (1997), rješenje za nestacionarno Poiseuille – ovo strujanje glasi:

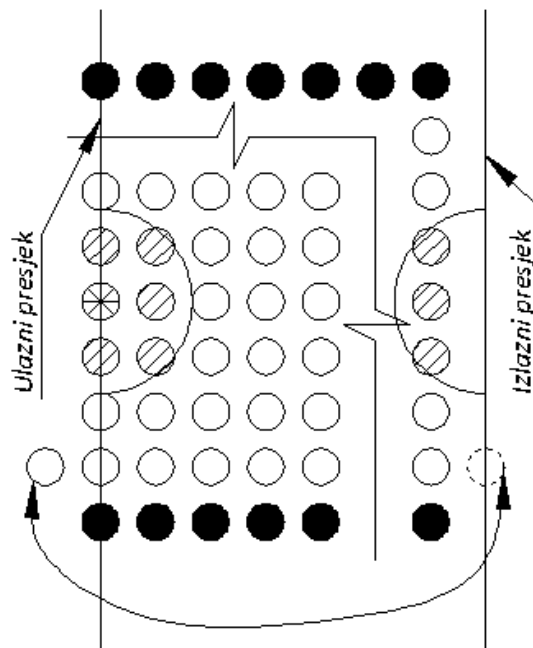
$$v_1(x_2, t) = \frac{F}{2\nu} x_2(x_2 - l) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4Fl^2}{\nu\pi^3(2n+1)^3} \sin\left[\frac{\pi x_2}{l}(2n+1)\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2\nu}{l^2}t\right] \quad (125)$$

U ovom primjeru su preuzete sljedeće vrijednosti iz [4]:

$$\begin{aligned} l &= 10^{-3} && [m] \\ \rho &= 10^3 && [kg/m^3] \\ \nu &= 10^{-6} && [m^2/s] \\ F &= 2 \cdot 10^{-4} && [m/s^2] \\ v_0 &= 2.5 \cdot 10^{-5} && [m/s] \end{aligned}$$

U svrhu rješenja problema SPH metodom napisan je kod u programskom jeziku C++, koji je prikazan u *PRILOGU 1*. Domena je pravokutnik dimenzija  $x_1 = 0.0005$  i  $x_2 = l = 0.001$  m. U program se mogu unijeti i različite vrijednosti od gore navedenih, te različit broj čestica u horizontalnom i vertikalnom smjeru. U ovom primjeru je korišteno 20 čestica u horizontalnom smjeru, i 41 čestica u vertikalnom smjeru, što čini ukupno 820 čestica. Za računanje gustoće čestica korištena je jednadžba (100), za očuvanje količinu gibanja jednadžba (117), a za tenzor brzine deformacije jednadžba (122). B – spline jezgrena funkcija (58) je korištena, dok joj je nosač funkcije 2.2 puta veći od udaljenosti čestica u smjeru osi  $x_2$ . Time je određeno da većina čestica ima 16 susjednih čestica unutar nosača funkcije

(barem pri početku simulacije). Rubni uvjet brzine na krutim stijenkama je određen takozvanim virtualnim česticama (pune crne boje na slici 10) koje se nalaze na samom rubu problema, a u svakom vremenskom koraku im je brzina jednaka nuli. Korišten je periodični rubni uvjet na ulaznom i izlaznom presjeku, odnosno nakon što čestica prijeđe određenu vrijednosti u uzdužnom smjeru (os  $x_1$ ), ona se premiješta na ulazni presjek. Pošto čestice blizu ulaznog i izlaznog presjeka nemaju dovoljno susjednih čestica da bi se osigurala konzistentnost drugog reda, one međusobno utječu jedna na drugu. Na slici 10 su prikazani susjedi (šrafirane čestice) čestice na ulaznom presjeku (prekrižena čestica) Korištenjem takvog rubnog uvjeta, moguće je koristiti relativno malen broj čestica u uzdužnom smjeru (svega njih 20).



Slika 10. Prikaz korištenja periodičnog rubnog uvjeta i virtualnih čestica

U standardnoj SPH metodi za stlačiva strujanja, gibanje čestica je prouzrokovano gradijentom tlaka, dok se tlak za pojedinu česticu računa na temelju gustoće i unutarnje energije čestice iz jednadžbe stanja. Međutim, za nestlačive fluide bi prava jednadžba stanja dovela do vrlo

malih vremenskih koraka. Sama činjenica da je svaki fluid barem malo stlačiv, vodi do koncepta umjetne stlačivosti (engleski „artificial compressibility“). Morris et al. su koristili sljedeću jednostavnu jednadžbu stanja za proračun tlaka čestice:

$$p = c^2 \rho \quad (126)$$

gdje je  $c$  brzina zvuka.

Međutim, ukoliko se uzme stvarna brzina zvuka za vodu ( $c = 1480 \text{ m/s}$ ), varijacija gustoće postaje zanemariva. Stoga je potrebno uzeti vrlo male vrijednosti za brzinu zvuka. Brzinu zvuka je moguće odrediti na temelju dimenzijske analize razmatranog problema [4]. U ovom slučaju uzeto je  $c^2 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

Gibanje čestice određeno je takozvanim „XSPH“ modelom koji uzima u obzir gibanje susjednih čestica preko jednadžbe:

$$\frac{dx_{i(\alpha)}}{dt} = v_{i(\alpha)} - \varepsilon \sum_{\beta=1}^N \frac{m_{(\beta)}}{\rho_{(\beta)}} v_{i(\alpha\beta)} W_{(\alpha\beta)} \quad (127)$$

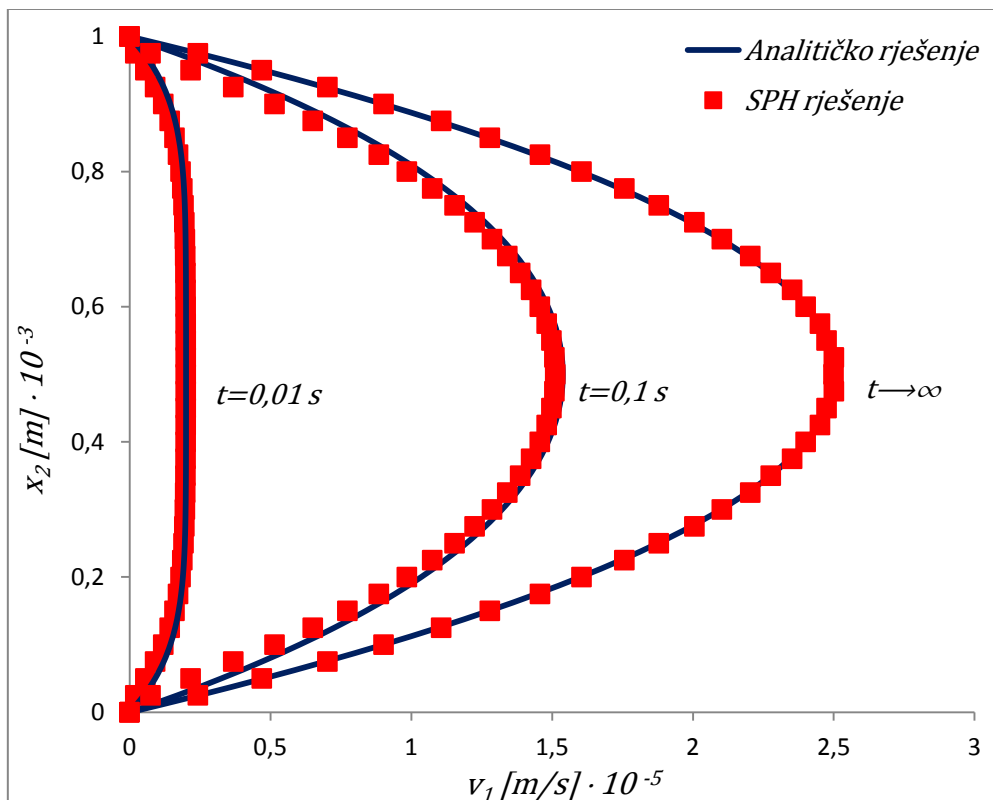
gdje je  $\varepsilon$  konstanta koja može biti od 0 do 1. Korištenjem ovog modela čestica se giba brzinom koja je bliže srednjoj brzini susjednih čestica, te su time čestice urednije gibaju. U ovom primjeru je korištena vrijednost faktora  $\varepsilon$  od 0.3.

Numerička integracija se vrši takozvanom „leap frog“ metodom koja je vrlo jednostavna za implementaciju, a drugog je reda točnosti. Položaj čestice se računa svakih pola koraka, dok se brzina računa jednom za svaki korak, prema:

$$\begin{aligned}
 x_{n+\frac{1}{2}} &= x_n + \frac{1}{2}v_n\Delta t \\
 v_{n+1} &= v_n + a_{n+\frac{1}{2}}\Delta t \\
 x_{n+1} &= x_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}v_{n+1}\Delta t
 \end{aligned}
 \tag{128}$$

gdje  $n$  označava broj iteracije, dok je  $a$  akceleracija čestice koja se računa izrazom (117). Odabrana vrijednost vremenskog koraka  $\Delta t$  je  $10^{-6}$ , čime se greška ugrubo može procijeniti na  $\Delta t^2$ , iako pošto se tada radi o vrlo malim brojevima, upitna je i točnost same aritmetike računala [8].

Na slici 11 je prikazana usporedba numeričkih rezultata dobivenih SPH metodom (odnosno proračunom pomoću koda prikazanog u *PRILOGU 1*) i analitičkih rezultata. Moguće je vidjeti da se rezultati dobro podudaraju, posebno u slučaju stacionarnog strujanja, odnosno za velike vrijednosti  $t$ .



Slika 11. Usporedba rješenja dobivenog SPH metodom s analitičkim rješenjem



## 9. ZAKLJUČAK

Koristeći današnja osobna računala i relativno jednostavne algoritme moguće je približno riješiti probleme dinamike fluida. U radu je opisana SPH formulacija, te je razmatrana konzistentnost uvedenih aproksimacija koja je na kraju potvrđena jednostavnim primjerom Poiseuille – ovog strujanja. Ovakav algoritam se pokazao dosta stabilan, te se pomoću njega može jednostavno vidjeti kako promjena različitih parametara utječe na rješenje. Na primjer, primijećeno je da smanjenje vremenskog koraka, iako povećava trajanje proračuna, izrazito utječe na točnost i stabilnost rješenja, što se može u svakoj numeričkoj metodi i očekivati. Nadalje, relativno povećanje brzine zvuka može utjecati da rješenje ne dođe u stacionarno stanje, nego nakon nekog vremena počne lagano simetrično oscilirati oko sredine presjeka. Samo stacionarno rješenje brzine dobiveno SPH metodom vrlo malo odudara od analitičkog rješenja prema Morris et al., svega oko 0.4%, prosječno po visini presjeka. Rješenje za manje vrijednosti  $t$  više odstupaju od analitičkog rješenja. Ugrubo se može reći da odstupanje od analitičkih rezultata pada kako raste vrijeme, odnosno kako rješenje teži stacionarnom. Neovisno o vremenu, rješenje pri rubovima domene, odnosno uz same krute stijenke se najviše razlikuje od analitičkog rješenja, što se može i očekivati zbog implementacije rubnih uvjeta u SPH metodi pomoću virtualnih čestica. Može se očekivati da će se SPH metoda nastaviti sve više primjenjivati u inženjerskim proračunima. Međutim, da bi metoda postala široko upotrebljiva na tom području, potrebno je provesti još dosta teorijskih i praktičnih istraživanja, posebno na područjima konzistentnosti aproksimacije česticama i efikasnijem generiranju rubnih uvjeta. Ovim praktičnim razmatranjem je dokazana jednostavnost i efikasnost metode, barem za rješavanje jednostavnijih strujanja kao što je Poiseuille – ovo strujanje.

## 10. PRILOG 1

```
#include <stdio.h>
#include "math.h"
#include "stdlib.h"

#define PI 3.1415926535
#define c_squared 0.000000000005
#define xsph_factor 0.3

//Distance

double distance (double x1, double x2, double y1, double y2) {
    double r;
    r = sqrt(pow(x1 - x2, 2) + pow(y1 - y2, 2));
    return r;
}

//Cubic kernel function

double kernel (double r, double h) {
    double W;
    double R;
    R = r/h;
    if (R >= 0 && R < 1) {
        W = (double(15)/(7*PI*pow(h,2)))*(double(2)/3 - pow(R,2) + pow(R,3)/2);
        return W;
    }
    else if (R >= 1 && R < 2) {
        W = (double(5)/(14*PI*pow(h,2)))*(pow(2 - R,3));
        return W;
    }
    else {
        return 0;
    }
}

//Derivative of kernel function with respect to r

double kernel_derivative (double r, double h) {
    double dW;
    double R;
    R = r/h;
    if (R >= 0 && R < 1) {
        dW = (double(15)/(7*PI*pow(h,3)))*(-2*R + double(3)*pow(R,2)/2);
        return dW;
    }
    else if (R >= 1 && R < 2) {
        dW = (-double(15)/(14*PI*pow(h,3)))*(pow(2 - R,2));
        return dW;
    }
    else {
        return 0;
    }
}

//Main program
```

```

int main()
{
    FILE *fp;
    fp=fopen("D:/results.txt", "w");

    int a, b, c, d, i, n, m, time_step, number_of_particles,
number_of_interacting_pairs, counter;
    double x_max, y_max, delta_x, delta_y, h, max_distance, current_distance;
    double k, fluid_density, kinematic_viscosity, dynamic_viscosity, particle_mass,
F, delta_t;
    double e;
    int number_of_neighbors[1000];
    int first_particle[20000];
    int second_particle[20000];
    double W_pair[20000];
    double dW_pair[20000];
    double distance_of_pair[20000];

    double x[1000][2];
    double y[1000];
    double particle_density[1000];
    double particle_deformation_xx[1000];
    double particle_deformation_xy[1000];
    double particle_pressure[1000];
    double pressure_force[1000];
    double viscous_force_xx[1000];
    double viscous_force_xy[1000];
    double particle_velocity[1000][2];
    double particle_velocity_xsph[1000];
    double particle_acceleration[1000];
    double velocity_sum[2];

//Input parameters

    printf("\nInsert length of domain, x_max=");
    scanf("%lf", &x_max);
    printf("\nInsert height of domain, y_max=");
    scanf("%lf", &y_max);
    printf("\nInsert number of particles in longitudinal (x) direction, n=");
    scanf("%d", &n);
    printf("\nInsert number of particles in vertical (y) direction, m=");
    scanf("%d", &m);
    number_of_particles = n*m;
    printf("\nInsert smoothing length scaling factor, k=");
    scanf("%lf", &k);
    printf("\nInsert fluid density [kg/m^3], rho=");
    scanf("%lf", &fluid_density);
    printf("\nInsert fluid kinematic viscosity [m^2/s], ni=");
    scanf("%lf", &kinematic_viscosity);
    printf("\nInsert body force [m/s^2] (based on the pressure difference), F=");
    scanf("%lf", &F);
    printf("\nInsert time step for integration [s], delta_t=");
    scanf("%lf", &delta_t);
    printf("\nInsert error for time integration, e=");
    scanf("%lf", &e);

//Particle spacing along axes calculation

    delta_x = x_max/(n-1);
    delta_y = y_max/(m-1);

```

```

//Smoothing length calculation

max_distance = delta_x;
if (delta_y > delta_x) {
    max_distance = delta_y;
}
h = 1.1*max_distance;

//Macroscopic properties calculation

particle_mass =
(fluid_density*(x_max+delta_x)*(y_max+delta_y))/number_of_particles;
dynamic_viscosity = kinematic_viscosity*fluid_density;

//Particle initialization

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    x[a][0] = ((a-1)/m)*delta_x;
    y[a] = ((a-1)%m)*delta_y;
}

//Particle coordinates print test

fprintf(fp, "Total number of particles = %d\n\n", number_of_particles);
for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    fprintf(fp, "Particle [%d] has coordinates [%lf][%lf]\n\n", a, x[a][0],
y[a]);
}

//Velocity initial condition

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    particle_velocity[a][0] = 0;
}

//Start of time integration loop

time_step = 0;

do {

    for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
        particle_velocity_xsph[a] = 0;
    }

    //Loops for calculating transient position for leapfrog integration
scheme

    if (time_step != 0) {
        for (i = 1; i <= number_of_interacting_pairs; i++) {
            c = first_particle[i];
            d = second_particle[i];
            particle_velocity_xsph[c] = particle_velocity_xsph[c] +
(particle_mass*W_pair[i]*(particle_velocity[c][0] -
particle_velocity[d][0]))/particle_density[d];
            particle_velocity_xsph[d] = particle_velocity_xsph[d] +
(particle_mass*W_pair[i]*(particle_velocity[d][0] -
particle_velocity[c][0]))/particle_density[c];
        }
    }
}

```

```

        for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
            if ((y[a] >= 0 && y[a] < 0.5*delta_y) || (y[a] > y_max-0.5*delta_y
&& y[a] <= y_max)) { //Boundary condition
                x[a][0] = x[a][0];
            }
            else {
                x[a][0] = x[a][0] + ((particle_velocity[a][0] -
(xsph_factor*particle_velocity_xsph[a]))*delta_t)/2;
                if (x[a][0] > x_max + delta_x) {
                    x[a][0] = x[a][0] - x_max - delta_x;
                }
            }
        }

//Initialization for new time step

number_of_interacting_pairs = 0;

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    number_of_neighbors[a] = 0;
    particle_density[a] = 0;
    particle_deformation_xx[a] = 0;
    particle_deformation_xy[a] = 0;
    particle_pressure[a] = 0;
    viscous_force_xx[a] = 0;
    viscous_force_xy[a] = 0;
    pressure_force[a] = 0;
    particle_acceleration[a] = 0;
    particle_velocity_xsph[a] = 0;
}

//Calculation of interacting pairs

for (a = 1; a <= number_of_particles - 1; a++) {
    for (b = a+1; b <= number_of_particles; b++) {
        if ((x[a][0] >= 0 && x[a][0] <= 2*delta_x) && (x[b][0] >=
x_max - delta_x && x[b][0] <= x_max + delta_x)) {
            if (distance(x[a][0], x[b][0]-x_max-delta_x, y[a],
y[b]) < k*h) {
                number_of_interacting_pairs =
number_of_interacting_pairs + 1;
                first_particle[number_of_interacting_pairs] =
a;
                second_particle[number_of_interacting_pairs] =
b;
                number_of_neighbors[a] =
number_of_neighbors[a] + 1;
                number_of_neighbors[b] =
number_of_neighbors[b] + 1;
                current_distance = distance(x[a][0], x[b][0]-
x_max-delta_x, y[a], y[b]);
                distance_of_pair[number_of_interacting_pairs]
= current_distance;
                kernel(current_distance, h);
                dW_pair[number_of_interacting_pairs] =
kernel_derivative(current_distance, h);
            }
        }
        else {
            if (distance(x[a][0], x[b][0], y[a], y[b]) < k*h) {

```

```

number_of_interacting_pairs + 1;
a;
b;
number_of_neighbors[a] + 1;
number_of_neighbors[b] + 1;
y[a], y[b]);
= current_distance;
kernel(current_distance, h);
kernel_derivative(current_distance, h);
}
}
}

//Loop for calculation of particle density (self effect)
for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    particle_density[a] = particle_mass*kernel(0,h);
}

//Loop for calculation of particle density (interacting pairs)
for (i = 1; i <= number_of_interacting_pairs; i++) {
    c = first_particle[i];
    d = second_particle[i];
    particle_density[c] = particle_density[c] +
particle_mass*W_pair[i];
    particle_density[d] = particle_density[d] +
particle_mass*W_pair[i];
}

/////Particle density print

//for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
//    fprintf(fp,"Particle [%d] at [%lf][%lf] has density = %lf, and %d
neighbors\n\n", a, x[a][0], y[a], particle_density[a], number_of_neighbors[a]);
//}

//Loop for calculation of particle pressure

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    particle_pressure[a] = c_squared*particle_density[a];
}

//Loop for calculation of particle deformation

for (i = 1; i <= number_of_interacting_pairs; i++) {
    c = first_particle[i];
    d = second_particle[i];
    particle_deformation_xx[c] = particle_deformation_xx[c] +
((double(4)/3)*(particle_mass*(particle_velocity[d][0]-
particle_velocity[c][0])*(x[c][0]-
x[d][0])*dW_pair[i]))/(particle_density[d]*distance_of_pair[i]);

```

```

        particle_deformation_xx[d] = particle_deformation_xx[d] +
((double(4)/3)*(particle_mass*(particle_velocity[c][0]-
particle_velocity[d][0])*(x[d][0]-
x[c][0])*dW_pair[i]))/(particle_density[c]*distance_of_pair[i]);
        particle_deformation_xy[c] = particle_deformation_xy[c] +
(particle_mass*(particle_velocity[d][0]-particle_velocity[c][0])*(y[c]-
y[d])*dW_pair[i))/(particle_density[d]*distance_of_pair[i]);
        particle_deformation_xy[d] = particle_deformation_xy[d] +
(particle_mass*(particle_velocity[c][0]-particle_velocity[d][0])*(y[d]-
y[c])*dW_pair[i))/(particle_density[c]*distance_of_pair[i]);
    }

    //Loop for calculation of particle acceleration

    for (i = 1; i <= number_of_interacting_pairs; i++) {
        c = first_particle[i];
        d = second_particle[i];
        pressure_force[c] =
(particle_mass*((particle_pressure[c]/pow(particle_density[c],2)) +
(particle_pressure[d]/pow(particle_density[d],2)))*(x[c][0] -
x[d][0])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];
        pressure_force[d] =
(particle_mass*((particle_pressure[d]/pow(particle_density[d],2)) +
(particle_pressure[c]/pow(particle_density[c],2)))*(x[d][0] -
x[c][0])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];

        viscous_force_xx[c] =
(particle_mass*dynamic_viscosity*((particle_deformation_xx[c]/pow(particle_density[c],
2)) + (particle_deformation_xx[d]/pow(particle_density[d],2)))*(x[c][0] -
x[d][0])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];
        viscous_force_xx[d] =
(particle_mass*dynamic_viscosity*((particle_deformation_xx[d]/pow(particle_density[d],
2)) + (particle_deformation_xx[c]/pow(particle_density[c],2)))*(x[d][0] -
x[c][0])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];
        viscous_force_xy[c] =
(particle_mass*dynamic_viscosity*((particle_deformation_xy[c]/pow(particle_density[c],
2)) + (particle_deformation_xy[d]/pow(particle_density[d],2)))*(y[c] -
y[d])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];
        viscous_force_xy[d] =
(particle_mass*dynamic_viscosity*((particle_deformation_xy[d]/pow(particle_density[d],
2)) + (particle_deformation_xy[c]/pow(particle_density[c],2)))*(y[d] -
y[c])*dW_pair[i])/distance_of_pair[i];

        particle_acceleration[c] = particle_acceleration[c] -
pressure_force[c] + viscous_force_xx[c] + viscous_force_xy[c];
        particle_acceleration[d] = particle_acceleration[d] -
pressure_force[d] + viscous_force_xx[d] + viscous_force_xy[d];
    }

    for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
        particle_acceleration[a] = particle_acceleration[a] + F;
    }

    //Time integration

    if (time_step != 0) {
        for (i = 1; i <= number_of_interacting_pairs; i++) {
            c = first_particle[i];
            d = second_particle[i];
            particle_velocity_xsph[c] = particle_velocity_xsph[c] +
(particle_mass*W_pair[i]*(particle_velocity[c][0] -
particle_velocity[d][0]))/particle_density[d];

```

```

        particle_velocity_xsph[d] = particle_velocity_xsph[d] +
(particle_mass*W_pair[i]*(particle_velocity[d][0] -
particle_velocity[c][0]))/particle_density[c];
    }
}

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    if ((y[a] >= 0 && y[a] < 0.5*delta_y) || (y[a] > y_max-0.5*delta_y
&& y[a] <= y_max)) { //Boundary condition
        particle_velocity[a][1] = 0;
        x[a][1] = x[a][0];
    }
    else {
        particle_velocity[a][1] = particle_velocity[a][0] +
delta_t*particle_acceleration[a];
        x[a][1] = x[a][0] + ((particle_velocity[a][1] -
(xsph_factor*particle_velocity_xsph[a]))*delta_t)/2;
        if (x[a][1] > x_max + delta_x) {
            x[a][1] = x[a][1] - x_max - delta_x;
        }
    }
}

//Convergence criteria

velocity_sum[0] = 0;
velocity_sum[1] = 0;
counter = 0;

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    if ((y[a] >= 0 && y[a] < 0.5*delta_y) || (y[a] > y_max-0.5*delta_y
&& y[a] <= y_max)) { //Boundary condition
        continue;
    }
    else {
        velocity_sum[0] = velocity_sum[0] +
particle_velocity[a][0];
        velocity_sum[1] = velocity_sum[1] +
particle_velocity[a][1];
        counter = counter + 1;
    }
}

if (time_step%10000 == 0) {

    fprintf(fp, "Iteration: %d\n\n", time_step);
    fprintf(fp, "Elapsed time: %lf\n\n", delta_t*time_step);
    fprintf(fp, "\nTotal number of interacting pairs is: %d\n\n",
number_of_interacting_pairs);

    for (a = 1; a <= m; a++) {
        fprintf(fp, "Particle %d: [%1f, %1f] has velocity of
%.12lf, and %d neighbors\n", a, x[a][1], y[a], particle_velocity[a][1],
number_of_neighbors[a]);
    }

    fprintf(fp, "\n\n");
}

for (a = 1; a <= number_of_particles; a++) {
    x[a][0] = x[a][1];
}

```



```

        particle_velocity[a][0] = particle_velocity[a][1];
    }

    time_step = time_step + 1;

    } while (time_step*delta_t < 2.2); //(abs((2*(velocity_sum[1]/counter -
velocity_sum[0]/counter))/(velocity_sum[1] + velocity_sum[0])) > e);

    fclose(fp);

    for (a = 1; a <= m; a++) {
        printf("\nParticle at y = %lf, has velocity %.12lf", y[a],
particle_velocity[a][0]);
    }

    printf("\n\n Iteration, %lf = ", time_step*delta_t);
    printf("Results are printed in D:/results.txt\n");
    printf("Insert any number and press enter to close: ");

    scanf("%lf", &x_max);

    return 0;
}

```

## ***11. POPIS LITERATURE***

- [1] Degiuli, N., Werner, A.: Mehanika fluida IB - podloge za nastavu <http://www.fsb.hr/zbrodo/>, 6.3.2009.
- [2] Bennett, A.: Lagrangian Fluid Dynamics: Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, (2006.)
- [3] Kreyszig, E.: Advanced engineering mathematics, John Wiley & Sons, Inc., (2006.)
- [4] Liu, G. R., Liu, M. B.: Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2003.)
- [5] Batchelor, G. K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, (1998.)
- [6] Pejović, P.: Numerička analiza II. Deo, Naučna knjiga, Beograd, (1983.)
- [7] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, (2004.)
- [8] Singer, S.: Numerička matematika, predavanja, Zagreb, (2009.)

## 12. POPIS SLIKA

1	<i>Lagrangeov konačni volumen <math>V</math> omeđen površinom <math>S</math>.....</i>	5
2	<i>Promjena Lagrangeovog volumena uslijed gibanja površine.....</i>	6
3	<i>Sile u smjeru osi <math>x_1</math> koje djeluju na Lagrangeov infinitezimalni dio fluida....</i>	8
4	<i>Zvonolika jezgrena funkcija (55) i njezina derivacija.....</i>	19
5	<i>Gaussova jezgrena funkcija (57) i njezina derivacija.....</i>	20
6	<i>B – spline jezgrena funkcija (58) i njezina derivacija.....</i>	21
7	<i>Aproksimacija česticama za česticu čiji je nosač funkcije odsječen granicom.....</i>	32
8	<i>Aproksimacija česticama za česticu koja ima nejednoliko raspoređene čestice u nosaču funkcije.....</i>	33
9	<i>Stacionarni profil brzine Poiseuille – ovog strujanja.....</i>	44
10	<i>Prikaz korištenja periodičnog rubnog uvjeta i virtualnih čestica.....</i>	46
11	<i>Usporedba rješenja dobivenog SPH metodom s analitičkim rješenjem.....</i>	48