

Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu s otklonjenim upravljačkim površinama

Pašalić, Matej

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:594773>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Matej Pašalić

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak
Dr. sc. Marijan Andrić, mag. ing. aeroing.

Student:

Matej Pašalić

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku na pruženoj pomoći i savjetima tijekom izrade rada.

Također, hvala i komentoru dr. sc. Marijanu Andriću na pomoći i savjetima tijekom izrade koda i pisanja rada.

Matej Pašalić



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 01	
Ur.broj: 15 – 25 –	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Matej Pašalić** JMBAG: **0035238674**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu s otklonjenim upravljačkim površinama**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Vortex lattice method for a lifting surface with deflected control surfaces**

Opis zadatka:

Numerički zahtjevne metode računalne dinamike fluida mogu rezultirati detaljnim uvidom u strujanje oko nosećih površina poput krila aviona, no isto se također može zadovoljavajuće modelirati jednostavnijim numerički metodama. Primjerice, primjenom metoda koje koriste raspodjelu singulariteta po konturi noseće površine kako bi odredile polje brzina u ograničenom području u potencijalnom optjecanju. Jedna od takvih je i metoda vrtložne rešetke (engl. *Vortex Lattice Method*, VLM), koja kao singularitet koristi prstenaste vrtloge raspoređene po nosećoj površini diskretiziranoj duž raspona i tetive. Rešetka vrtloga formirana na ovaj način kao rezultat može dati polje brzina i raspodjelu tlaka po nosećoj površini, dok se deformiranjem rešetke mogu modelirati otkloni upravljačkih površina. Detaljna raspodjela aerodinamičkog opterećenja noseće površine dobivena ovakvom metodom može biti od posebnog interesa pri proračunu čvrstoće konstrukcije krila koja imaju složeniju geometriju, poput prijeloma krila kojeg čini nekoliko trapeznih oblika različitih suženja i/ili različitih iznosa kuta dihedrala te kuta uvijanja po rasponu.

U završnom radu potrebno je:

- modificirati postojeću računalnu implementaciju metode vrtložne rešetke u MATLAB-u za analizu složenijih geometrija nosećih površina;
- prikazati geometriju krila aviona i svih korištenih podataka;
- provesti usporedbu aerodinamičkih koeficijenata krila s dostupnim podacima u neotklonjenoj konfiguraciji te u konfiguraciji s otklonjenim upravljačkim površinama;
- pripremiti i prikazati raspodjelu tlaka po krilu na način da je prikladna za proračun čvrstoće konstrukcije krila.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datumi obrane:
30. 11. 2024.	1. rok: 20. i 21. 2. 2025. 2. rok: 10. i 11. 7. 2025. 3. rok: 18. i 19. 9. 2025.	1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025. 2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025. 3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao: Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Dr. sc. Marijan Andrić

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY	IX
1. UVOD.....	1
2. TEORETSKI OPIS PROBLEMA	2
2.1. Utjecaj krajeva krila	2
2.1.1. Inducirani otpor.....	2
2.2. Potencijalno strujanje	3
2.2.1. Teorem Kutta – Joukowski	4
2.2.2. Helmholtzovi teoremi	4
2.2.3. Biot – Savartov zakon	4
2.2.3.1. Vrtložna nit	5
2.2.3.2. Vrtložna površina.....	5
2.2.3.3. Inducirana brzina	6
2.2.3.4. Potkovičasti vrtlog	7
2.2.3.5. Prstenasti vrtlog	8
3. METODA VRTLOŽNE REŠETKE.....	9
3.1. Pregled numeričkih metoda	9
3.1.1. Prandtlov model noseće linije.....	9
3.1.2. Modificirani model noseće linije	10
3.2. Pregled metode vrtložne rešetke	11
3.2.1. Osnovna jednačba noseće površine.....	11
3.2.1.1. Inducirana brzina prstenastog vrtloga.....	11
3.2.1.2. Ukupna inducirana brzina	12
3.2.2. Rubni uvjeti.....	12
3.2.2.1. Vrtložni trag	13
3.2.3. Matrica utjecaja.....	14
3.2.4. Brzina iz beskonačnosti	15
3.2.5. Konačna jednačba	16
3.2.6. Računanje željenih veličina iz dobivenih rezultata.....	16
3.2.6.1. Apsolutne veličine	17
3.2.6.2. Koeficijenti	17
4. GEOMETRIJSKI MODEL	19
4.1. Trapezni segment	19
4.1.1. Pomoćna funkcija geometrija.....	19
4.1.2. Trapezni segment sa simetričnim profilom.....	20
4.1.3. Trapezni segment krila s nesimetričnim profilom	21
4.1.4. Kontrolne površine.....	23

4.2. Matrice ulaznih podataka	24
4.3. Pomoćna funkcija krilo.....	27
5. ANALIZA REZULTATA	29
5.1. Validacija modela	29
5.2. Odabir krila	30
5.3. Usporedba rezultata.....	32
5.3.1. Koeficijent uzgona krila.....	34
5.3.2. Koeficijent induciranog otpora	34
6. ANALIZA OPTEREĆENJA KRILA.....	37
6.1. Neotklonjena konfiguracija.....	37
6.1.1. Raspodjela tlaka	37
6.1.2. Lokalni uzgon	39
6.1.3. Podjela tlaka po tetivama	41
6.2. Otklonjena konfiguracija.....	42
6.2.1. Raspodjela tlaka	42
6.2.2. Lokalni uzgon	44
6.2.3. Raspodjela tlaka po tetivama	46
7. ZAKLJUČAK.....	48
LITERATURA.....	50

POPIS SLIKA

Slika 1.	Vrtložna plahta, preuzeto iz literature [2]	2
Slika 2.	Inducirani otpor, preuzeto iz literature [2]	3
Slika 3.	Vrtložna nit, preuzeto iz literature [2]	5
Slika 4.	Elementarni četverokut oko ds s cirkulacijom γds , preuzeto iz literature [4]	5
Slika 5.	Inducirana brzina uslijed segmenta AB , preuzeto iz literature [2]	7
Slika 6.	Potkovičasti vrtlog, preuzeto iz literature [3]	7
Slika 7.	Prstenasti vrtlog, preuzeto iz literature [3]	8
Slika 8.	Prandtlova noseća linija, preuzeto iz literature [3]	9
Slika 9.	Modificirani model noseće linije, preuzeto iz literature [3]	10
Slika 10.	Rubni uvjet rešetke, preuzeto iz literature [3]	13
Slika 11.	Vrtložni trag, preuzeto iz literature [3]	14
Slika 12.	Algoritam izvođenja matrice utjecaja, preuzeto iz literature [3]	14
Slika 13.	Primjer jednog segmenta	21
Slika 14.	Zakrivljeni segment	22
Slika 15.	Otklon izlaznog ruba	23
Slika 16.	Krilo s krilcima	24
Slika 17.	Normala na panele, preuzeto iz literature [3]	25
Slika 18.	Prikaz diskretiziranog krila s kontrolnim točkama i normalama	27
Slika 19.	Krilo preuzeto iz literature [6]	27
Slika 20.	Primjer raspodjele lokalnog koeficijenta uzgona, preuzeto iz literature [11]	29
Slika 21.	Lokalna raspodjela uzgona	30
Slika 22.	Geometrija krila, preuzeto iz literature [9]	30
Slika 23.	Krilo Cessne 172 u MATLAB-u	31
Slika 24.	Primjer geometrije krila s grubom podjelom panela	32
SSlika 25.	Ovisnost momenta valjanja o otklonu upravljačkih površina, preuzeto iz literature [10]	33
Slika 26.	Koeficijent sile uzgona u ovisnosti o napadnom kutu	34
Slika 27.	Koeficijent inducirano otpora u ovisnosti o napadnom kutu	35
Slika 28.	Polara krila Cessne 172	36
Slika 29.	Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ po krilu s neotklonjenim upravljačkim površinama bez napadnog kuta	37
Slika 30.	Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ po krilu s neotklonjenim upravljačkim površinama pri napadnom kutu	38
Slika 31.	Raspodjela koeficijenta tlaka po krilu s neotklonjenim upravljačkim površinama bez napadnog kuta	38
Slika 32.	Raspodjela koeficijenta tlaka po krilu s neotklonjenim upravljačkim površinama pri napadnom kutu	39
Slika 33.	Lokalni koeficijent uzgona za krilo s neotklonjenim upravljačkim površinama bez napadnog kuta	40
Slika 34.	Lokalni koeficijent uzgona za krilo pod napadnim kutom	40
Slika 35.	Raspodjela promjene tlaka duž tetiva neotklonjene konfiguracije bez napadnog kuta	41
Slika 36.	Promjena tlaka duž tetiva neotklonjene konfiguracije pod napadnim kutom	42
Slika 37.	Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta ..	43
Slika 38.	Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ otklonjene konfiguracije pri napadnom kutu ..	43
Slika 39.	Bezdimenzijski tlak za noseću površinu otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta	44

Slika 40.	Bezdimenzijski tlak za noseću površinu otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom.....	44
Slika 41.	Raspodjela lokalnog koeficijenta uzgona otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta	45
Slika 42.	Raspodjela lokalnog uzgona otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom	45
Slika 43.	Raspodjela promjene tlaka duž tetiva otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta	46
Slika 44.	Raspodjela promjene tlaka duž tetiva otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom.....	46

POPIS TABLICA

Tablica 1.	Koordinate točaka.....	31
Tablica 2.	Usporedba koeficijenta uzgona	32
Tablica 3.	Otklonjena konfiguracija.....	33
Tablica 4.	Vrijednosti induciranog otpora.....	35

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
a	m	Koordinata početne točke korijenske tetive
a_{ij}	m/s	Utjecajni koeficijent
AR	-	Vitkost krila
\mathbf{a}_{ij}	m/s	Matrica utjecajnih koeficijenata
\mathbf{A}_k	-	Vektor definiran suprotnim vrhovima panela
b	m	Koordinata krajnje točke korijenske tetive, prva na izlaznom rubu
B	m	Raspon krila
\mathbf{B}_k	-	Vektor definiran suprotnim vrhovima panela
c	m	Koordinata krajnje točke vršne tetive, zadnja na izlaznom rubu
c_r	m	Korijenska tetiva
c_t	m	Vršna tetiva
C_{Di}	-	Koeficijent inducirano g otpora
C_l	-	Lokalni koeficijent sile uzgona
C_l	-	Koeficijent momenta valjanja
C_L	-	Koeficijent sile uzgona
C_p	-	Koeficijent tlaka
\mathbf{C}_k	-	Matrica kontrolnih točaka panela
\mathbf{C}_p	-	Matrica vršnih točaka panela
\mathbf{C}_v	-	Matrica vršnih točaka vezanih vrtloga
d	m	Koordinata početne točke vršne tetive, zadnja na prednjem rubu
D	N	Sila otpora
h	m	Udaljenost za Biot – Savartov zakon
i_t	rad	Kut uvijanja vršne tetive
i_w	rad	Kut uvijanja krila
i, j, k, l	-	Brojači, indeksi
IB	-	Broj podjela segmenta duž raspona
IC	-	Broj podjela segmenta duž tetive
M	Nm	Moment valjanja
L	N	Sila uzgona
L'	N/m	Sila uzgona po jedinici duljine
\mathbf{n}	-	Vektor normala
\mathbf{nn}	-	Matrica normala na kontrolne točke panela
Q_∞	m/s	Brzina neporemećenog strujanja fluida iz beskonačnosti
\mathbf{r}	-	Radij vektor
$s_{i,j}$	m ²	Površina jednog panela
S_{ref}	m ²	Referentna površina krila
u, v, w	m/s	Komponente inducirane brzine
\mathbf{V}	m/s	Vektor brzine
\mathbf{V}_{ind}	m/s	Vektor inducirane brzine

w_{ind}	m/s	Inducirana brzina
\mathbf{w}	m/s	Vektor normalnih komponenti induciranih brzina
x, y, z	m	Osi koordinatnog sustava krila
α	rad	Napadni kut
γ	m/s	Jedinična jačina vrtloga
Γ	m ² /s	Intenzitet vrtloga
$\mathbf{\Gamma}$	m ² /s	Matrica intenziteta vrtloga
δ	rad	Kut otklona upravljačkih površina
ΔD	N	Doprinos sili otpora
ΔL	N	Doprinos sili uzgona
Δp	N/m ²	Razlika tlaka po panelu
Δy	m	Širina panela
θ	rad	Pomoćni kut pri definiranju Biot – Savartova zakona
λ	-	Suženje krila
Λ_{LE}	rad	Kut strijele napadnog ruba
ρ_{∞}	kg/m ³	Gustoća zraka
ϕ	rad	Kut dihedrala
Φ	m ² /s	Potencijal brzine

SAŽETAK

Cilj ovog rada bio je izraditi geometrijski model u programskom paketu MATLAB koji bi u kombinaciji s izrađenom računalnom implementacijom metode vrtložne rešetke davao koeficijente aerodinamičke sile uzgona, induciranog otpora i momenta valjanja noseće površine složene geometrije i/ili noseće površine s otklonjenim upravljačkim površinama. Kontrolne površine uvedene su kao deformacija mreže u geometriji. Nakon izrade modela geometrije, analiza je provedena za odabrano krilo složene geometrije noseće površine bez otklonjenih kontrolnih površina, a zatim s otklonom istih. Iz analize su se dobili aerodinamički koeficijenti, te koeficijenti tlaka prikazani na način prikladan za proračune čvrstoće. Dobiveni rezultati uspoređeni su s koeficijentima dobivenim iz već postojećih i dostupnih podataka dobivenih eksperimentalnim putem i analitičkim metodama..

Ključne riječi: Krilo složene geometrije, noseća površina, otklonjena kontrolna površina, metoda vrtložne rešetke, koeficijent uzgona, koeficijent induciranog otpora, koeficijent momenta valjanja

SUMMARY

The aim of this thesis was to create a geometry model in the MATLAB software package, which would, in return, combined with a created MATLAB implementation of vortex lattice method give the user aerodynamic lift coefficient, induced drag coefficient and rolling coefficient of a lifting surface with complex geometry and/or lifting surface with deflected control surfaces. Control surfaces were introduced in the form of deformation in the geometry grid. After the geometrical model was built, an analysis was carried out on the chosen complex geometry lifting surface with control surfaces not deflected, and then with the surfaces deflected. Aerodynamic and pressure coefficients, suitable for further strength analysis, were obtained from this analysis. The results were compared with already existing ones obtained by experiments and analytical methods.

Key words: Complex wing geometry, lifting surface, deflected control surface, vortex lattice method, lift coefficient, induced drag coefficient, rolling coefficient

1. UVOD

Detaljna analiza strujanja zraka oko nosećih površina aviona uvijek je od interesa. Daje uvid u aerodinamičke koeficijente koji su značajni za sve daljnje proračune. Analiza ovog strujanja zadaća je aerodinamike te se ona može vršiti na razne načine. Prema [1], primjenom teorije i jednadžbi mehanike fluida, što dovodi do kompliciranog sustava jednadžbi za čije rješavanje se primjenjuju numeričke metode. Ovo rješenje daje računalna dinamika fluida, temeljena na pojednostavljanju Navier-Stokesovih jednadžbi. No, njihovo rješavanje iziskuje mnogo vremena i sredstava. Zatim teoretski, ali uz određena pojednostavljenja koja su opravdana fizikalnošću i uvjetima problema. Rješenje se također može dobiti iz mjerenja u aerotunelu.

Metoda vrtložne rešetke (eng. Volume Lattice Method, VLM) je numerička metoda koja koristi drugi od gore tri navedena primjera određivanja aerodinamičkih koeficijenata, odnosno sila. Ona koristi raspodjelu singulariteta (vrtloga) izazvanih prestrujavanjem zraka s donjake na gornjaku po konturi srednje noseće površine. Nakon što se odrede jačine vrtloga, pomoću njih se dalje određuje raspodjela brzina i tlaka po nosećoj površini, iz čega se konačno dobivaju aerodinamički koeficijenti. Ova metoda je, dakle zasnovana na potencijalnom stacionarnom strujanju zraka, gdje se strujanje smatra nestlačivim, neviskoznom i bezcirkulacijskim. Stoga je ograničena na primjenu u rasponu brzina do $Ma = 0.3$, na tanke profile koji se mogu zamijeniti svojom srednjom linijom i na male napadne kutove. U ovim uvjetima, ova numerička metoda daje dovoljno dobre rezultate. Odnosno, budući da za rješenja potencijalnog strujanja vrijedi princip superpozicije, ova metoda primjenjiva je u području linearne aerodinamike.

U radu je prvo iznesen kratki teorijski uvod u problem, zatim kratki opis stvaranje metode vrtložne rešetke potrebne za ovaj rad i potom opis implementacije i slaganja geometrije nosećih površina koje su korištene za dobivanje rezultata.

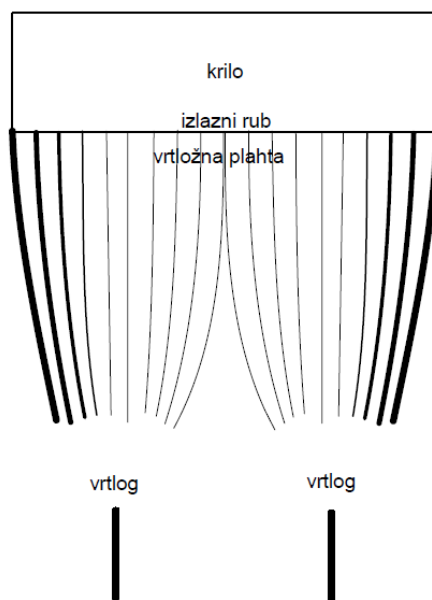
Analiza je provedena na odabranom krilu aviona Cessna 172, a potom uspoređena s dostupnim podacima iz literature i dostupnim eksperimentalnim podacima. Također će se pokazati i usporedba s dostupnim analitičkim rješenjima, kao oblik validacije metode.

2. TEORETSKI OPIS PROBLEMA

U ovom poglavlju iznijet će se kratki osvrt na teoretski opis problema i sve korištene zakone te uvedene pretpostavke za implementaciju metode vrtložne rešetke.

2.1. Utjecaj krajeva krila

Prema [2], uslijed razlike tlakova na donjaci i gornjaci dolazi do prestrujavanja zraka s donjake na gornjaku. To znači da na donjaci postoji komponenta brzina u smjeru od korijena krila prema vrhovima krila, a na gornjaci od vrhova krila prema korijenu. Ovo rezultira formiranjem vrtloga iza krila, koji se udružuju u tzv. „vrtložnu plahu“. Ova optjecanja smanjuju koeficijent uzgona krila, C_L , u odnosu na koeficijent uzgona profila c_l . Isto tako i koeficijent otpora krila C_D manji je negoli koeficijent otpora profila c_d .



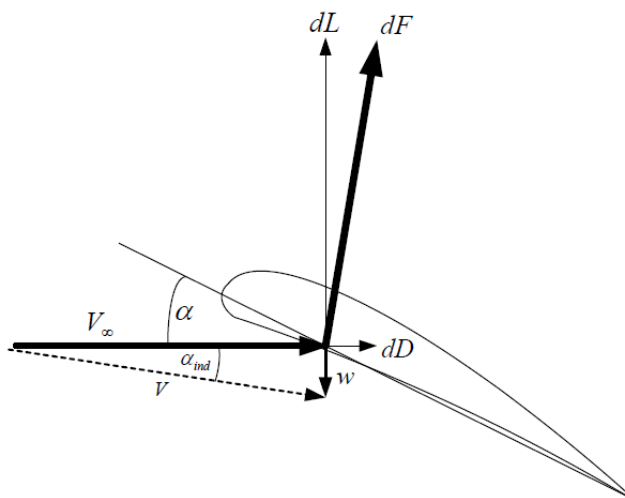
Slika 1. Vrtložna plaha, preuzeto iz literature [2]

Na slici 1. prikazane su vrtložne niti i njihovo udruživanje u vrtložnu plahu. Crte veće debljine predstavljaju veće intenzitete vrtloga, tako da se prikaže da su vrtlozi najjači na vrhovima krila, gdje i dolazi do samog prestrujavanja.

2.1.1. Inducirani otpor

Budući da se pravac brzine optjecanja mijenja oko krila, postoji i komponenta ukupne aerodinamičke sile izazvane upravo zbog promjene pravca. Ta komponenta proteže se u smjeru neporemećene brzine Q_∞ . Vektorska komponenta odgovorna za promjenu pravca brzine optjecanja, w , naziva se inducirana brzina, a komponenta sile izazvana njom inducirani otpor. Dakle, inducirani otpor je posljedica brzine i on se uvijek javlja kod optjecanja krila zbog

prestrujavanja zraka preko krajeva krila. Ove veličine prikazane su na slici 2. za presjek krila duljine dy , a inducirana brzina javlja se u svakome od njih.



Slika 2. Inducirani otpor, preuzeto iz literature [2]

2.2. Potencijalno strujanje

Po definiciji, za potencijalno strujanje vrijedi da se vektorsko polje brzine može prikazati u obliku gradijenta skalarnog potencijala polja. To posljedično za sobom vuče bezvrtložnost vektorskog polja. Odnosno, niti jedna točka, osim singulariteta same točke vrtloga, nema vrtložnosti.

Uvodeći modeliranje pomoću potencijalnog strujanja, problem se ograničava na usko polje malih brzina i neviskoznog strujanja. Nestlačivo strujanje za zrak može se uzeti do $Ma = 0.3$. Efekti viskoznosti postaju značajni tek pri većim brzinama i napadnim kutovima kada dolazi do sloma uzgona, stoga se i viskoznost može zanemariti te potencijalno nestlačivo strujanje postaje primjenjivo.

Kombinirajući jednadžbu brzine polja potencijalnog strujanja s jednadžbom očuvanja mase, ona prelazi u linearnu Laplaceovu jednadžbu. Za stacionarno potencijalno strujanje Eulerova jednadžba, odnosno jednadžba količine gibanja prelazi u Euler-Bernoullijev integral. Prvo se rješava linearna Laplaceova jednadžba, a zatim se iz Euler-Bernoullijevog integrala lako odredi polje tlaka.

Za sva rješenja potencijalnog strujanja vrijedi princip superpozicije. Odnosno, ukupno rješenje strujanja može se odrediti kao zbroj svih elementarnih rješenja po konturi (vrtlozi, dipoli, izvori, ponori). Iz tog proizlazi da će, za ovaj slučaj, točnost traženih veličina ovisiti o odabiru ispravnog tipa singulariteta te raspodjelom istih. Budući da u slici optjecanja oko krila dolazi

do stvaranja vrtložne plahte, u metodi vrtložne rešetke radić će se s vrtlozima ili kombinacijom vrtloga (odnosno vrtložnih niti) kako i samo ime nalaže.

Nadalje će biti dan kratak osvrt na ravninski vrtlog kao singularitet, vrtložnu nit te će biti dan matematički opis prije spomenute inducirane brzine uslijed ovih vrtložnih niti.

2.2.1. Teorem Kutta – Joukowski

Teorem Kutta – Joukowski, prema [3] i [4] glasi: „Ukupna aerodinamička sila u nestlačivom, neviskoznom i bezvrtložnom strujanju u neograničenom fluidu ima iznos opisan jednadžbom (2.1) po jedinici duljine. Djeluje okomito na smjer strujanja.“ Jednadžba glasi:

$$L' = \rho Q_\infty \Gamma \quad (2.1)$$

Izraz (2.1) daje iznos sile uzgona po jedinici širine krila unošenjem aeroprofila u neporemećenu struju zraka. Odnosno, sila uzgona proporcionalna je intenzitetu vrtloga.

2.2.2. Helmholtzovi teoremi

1. Prvi od Helmholtzovih teorema govori da je intenzitet vrtložne niti konstantan niz cijelu duljinu niti.
2. Drugi Helmholtzov teorem tvrdi da vrtložna cijev ne može započeti ni završavati unutar fluida. Odnosno, mora početi i završiti na istom mjestu, tj. napraviti „cijeli krug“ unutar fluida ili joj se kraj/početak mora protezati u beskonačnost. [3]

2.2.3. Biot – Savartov zakon

Biot – Savartov zakon u svom najopćenitijem obliku, zapisan u indeksnoj notaciji, ima oblik prikazan jednadžbom (2.2) [2],[3],[4]:

$$v_i(P) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_{ijm} dl_m x_j}{r^3} \quad (2.2)$$

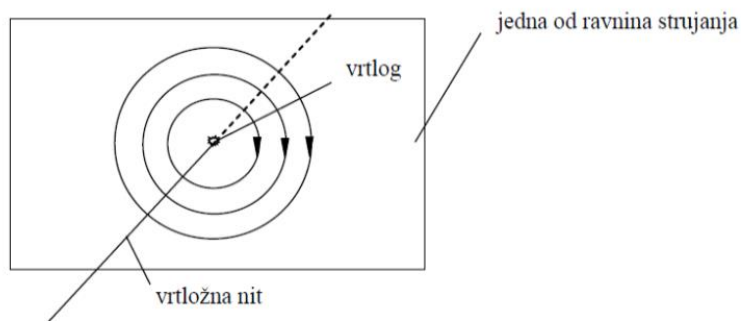
Ovaj zakon govori o iznosu inducirane brzine proizvoljne vrtložne niti. Odnosno, za zadani intenzitet vrtložne niti može se odrediti brzina koju on inducira u bilo kojoj točki. U gornjoj jednadžbi vektor član u nazivniku u pod integralnoj funkciji označava vektor od točke na vrtložnoj cijevi do točke u P u kojoj se traži inducirana brzina.

U brojniku se pojavljuje vektorski umnožak tog vektora i usmjerenog elementa duljine vektorske niti, tako da je očito da će ova brzina biti okomita na ravninu koju čine ova dva vektora.

Ukoliko je vrtložna nit ravna linija, kao što će biti u ovome radu za ovu metodu, jednostavnim matematičkim manipulacijama rješava se integral (2.2) za dobivanje relacija (2.4) do (2.6).

2.2.3.1. Vrtložna nit

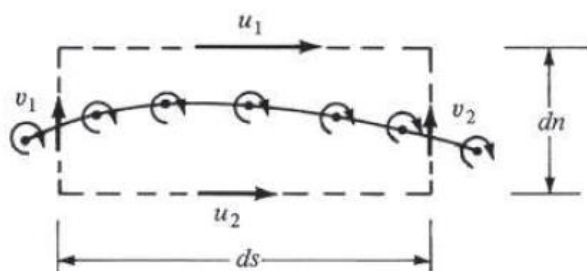
Ako se iz ravninskog potencijalnog strujanja na promatrane točku u kojoj se nalazi ravninski vrtlog jačine Γ povuče zamišljeni pravac u smjeru normale na tu točku i na njega postavje vrtlozi, dobije se vrtložna nit kao što je prikazana na slici 3.



Slika 3. Vrtložna nit, preuzeto iz literature [2]

2.2.3.2. Vrtložna površina

Prema [4], vrtložna površina dobije se ako se beskonačno mnogo vrtložnih niti postavi jedna pokraj druge. Odnosno, ako se kroz neku krivulju provuče mnoštvo vrtložnica (analogno strujnici, vrtložnica je „krivulja kojoj se tangenta poklapa sa smjerom vrtložnosti.“ [2]) Kroz vrtložnu površinu nema protoka. Tanki aeroprofilu zamjenjuju se upravo vrtložnom površinom po svojoj srednjoj liniji profila. Na idućoj slici dat je primjer elementarne vrtložne površine, pomoću koje će biti izveden Kutta rubni uvjet.



Slika 4. Elementarni četverokut oko ds s cirkulacijom γds , preuzeto iz literature [4]

Ovdje se promatra jedna vrtložna nit, tako da znači da cirkulacija duž četverokuta mora biti jednaka cirkulaciji jedne vrtložne niti. Postavljanjem te jednadžbe prema [2] i njezinim daljnjim sređivanjem tako da se dn pusti da teži k nuli (zato što se želi približiti vrtložnoj površini) dobije se jednadžba (2.3):

$$u_1 - u_2 = \gamma. \quad (2.3)$$

Izraz (2.3) govori da je diskontinuitet tangencijalne komponente brzine jednak gustoći vrtložne površine. [2], [3] Dakle, kada bi na kraju aeroprofila postojala gustoća vrtložne površine

$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds}$ različita od nule, to bi fizikalno značilo da na izlazu s aeroprofila postoje dvije različite komponente tangencijalne brzine na istome mjestu, što nije moguće. Stoga, postavlja se takozvani *Kutta rubni uvjet* koji kaže da strujanje napušta konturu glatko i bez diskontinuiteta brzinom konačnog iznosa. [4]

2.2.3.3. Inducirana brzina

Primjenom Biot-Savartovog zakona, prema literaturi [2], beskonačna vrtložna nit jačine Γ inducira u točki P na udaljenosti h od niti brzinu iznosa

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \quad (2.4)$$

Usljed polubeskonačne vrtložne niti, inducirana brzina bit će jednaka:

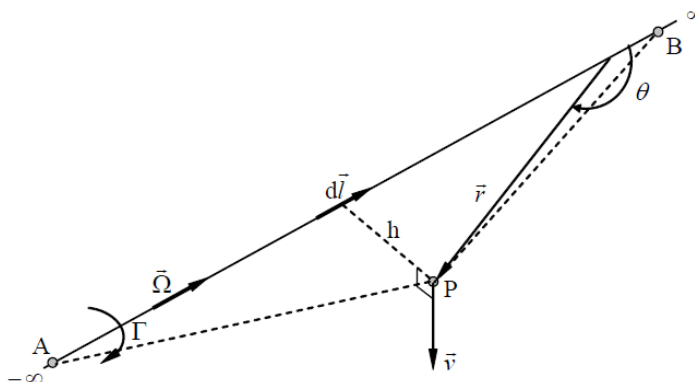
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \quad (2.5)$$

gdje je h najkraća moguća udaljenost točke P od polubeskonačne/beskonačne niti.

Ako se pak radi o segmentu ravne vrtložne niti intenziteta Γ omeđenog točkama A i B, on će u točki P inducirati brzinu koja je po iznosu jednaka:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\theta_A - \cos\theta_B), \quad (2.6)$$

Gdje θ_A i θ_B predstavljaju kutove određene spojnicom točkama A i P, odnosno B i P. Opisano se može vidjeti na slici 5.

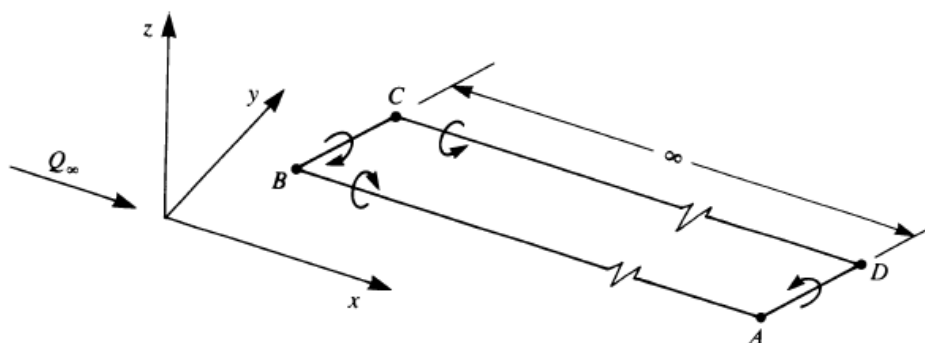


Slika 5. Inducirana brzina uslijed segmenta AB , preuzeto iz literature [2]

Gore izvedene jednačbe korištene su u računalnoj implementaciji, u zapisu pogodnome za računanje u programskom paketu MATLAB.

2.2.3.4. Potkovičasti vrtlog

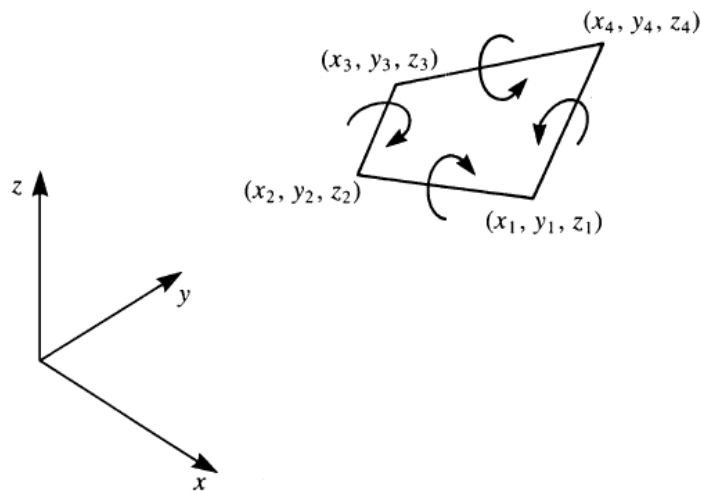
Najjednostavniji oblik singulariteta od više vrtloga je potkovičasti vrtlog. Jedan takav vrtlog prikazan je s desne strane na slici 6. On se, dakle, sastoji od vezanog i dva slobodna vrtloga koja se protežu u polubeskonačnost. Dva polubeskonačna vrtloga predstavljaju vrtložni trag i oni zadovoljavaju Helmholtzove teoreme. Generator uzgona je vezani vrtlog (Kutta – Joukowski). Potkovičasti vrtlog ogleda se u svojoj jednostavnoj primjeni u metodama opisanim u poglavljima 3.1.1 i 3.1.2, no njegova primjena je upravo zbog jednostavnosti ograničena. Primjer jednog posebnog potkovičastog vrtloga prikazan je na slici 6. Očito je da točke A i D nikada neće biti u beskonačnosti, no njihov utjecaj u praksi brzo slabi [3] te je potkovičasti vrtlog primjenjiv.



Slika 6. Potkovičasti vrtlog, preuzeto iz literature [3]

2.2.3.5. Prstenasti vrtlog

Spojene četiri vrtložne niti konačne dužine čine jedan prstenasti vrtlog. Svaki od ova četiri segmenta vrtložnih niti inducira brzinu u nekoj odabranoj točki. Ukupna inducirana brzina u ovoj točki jednostavno se može dobiti zbrajanjem svih četiriju brzina, odnosno zbroje se sve brzine inducirane od svakog vrtloga. Prstenasti vrtlog bit će osnovni element metode te će se upravo on rasporediti po mreži panela, to jest diskretiziranoj mreži srednje površine krila. Jedan prstenasti vrtlog prikazan je na slici 7. [3]



Slika 7. Prstenasti vrtlog, preuzeto iz literature [3]

3. METODA VRTLOŽNE REŠETKE

U ovom poglavlju bit će prikazana sama metoda, kao i neke jednostavnije numeričke metode radi boljeg razumijevanja. Kreiranje geometrijskog modela korištenog u ovom radu bit će detaljnije opisano u idućem poglavlju.

3.1. Pregled numeričkih metoda

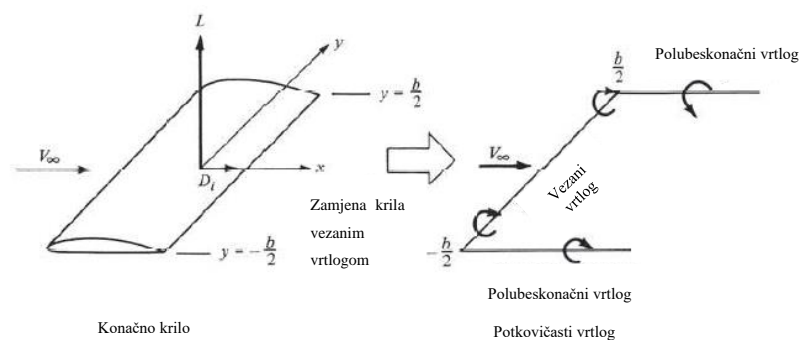
3.1.1. Prandtlov model noseće linije

Najjednostavnija metoda, Prandtlov model noseće linije, krilo zamjenjuje ravnom nosećom linijom. Ova linija mora spajati geometrijska mjesta jedne četvrtine tetiva i biti okomita na ravninu simetrije krila. Zbog svoje ograničenosti primjenjiva je na tanka, nezakrivljena krila pod malim napadnim kutom sa simetričnim profilima. Krilo se diskretizira samo duž raspona, upravo zato što se njegov profil zamjenjuje ravnom crtom.

U ovoj metodi postoji jedan vezani vrtlog, a vrtložne niti dolaze iz beskonačnosti, „putuju“ po slobodnom vrtlogu i na istome mjestu na drugom polukrilu napuštaju krilo.

Vrtložni trag modelira se vrtložnim nitima koje odlaze u beskonačnost. [2]

Ako se promatra jedan presjek, svaka od vrtložnih niti u njemu će inducirati neku brzinu. Ta inducirana brzina, w_{ind} okomita je na raspon krila i neporemećenu brzinu. Upravo ta brzina stvara inducirani otpor, opisan u poglavlju 2.2. Izjednačavanjem aerodinamičke sile s uvjetom Kutta – Joukowski te diskretizacijom modela pomoću Glauertove varijable dobiva se sustav jednačbi, čijim je rješavanjem određena raspodjela cirkulacije po krilu, a zatim i polja brzine i tlaka. Rubni uvjet u metodi Prandtlove noseće linije je taj da ukupna normalna komponenta brzina, koja se sastoji od normalne komponente brzine iz beskonačnosti, brzine inducirane od vrtložnih niti krila (vezani vrtlog) te brzine inducirane od svih vrtložnih niti traga (istječu/utječu iz/u krila/o), mora biti jednaka nuli. [2], [3]. Slika 8. prikazuje Prandtlovu noseću liniju.

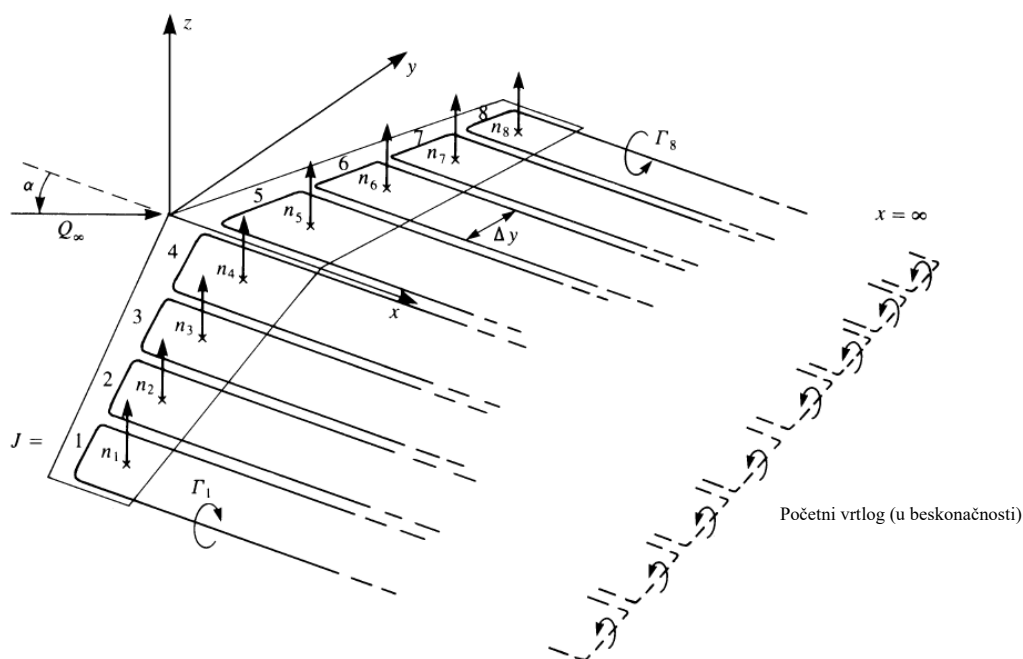


Slika 8. Prandtlova noseća linija, preuzeto iz literature [3]

3.1.2. Modificirani model noseće linije

Prandtlov model noseće linije jako je ograničen. Proširenje u vidu analize većeg broja krila omogućava modificirani model noseće linije (Weissingerov model). Geometrijsko mjesto jedne četvrtine tetiva više ne mora biti pravac okomit na ravninu simetrije krila. Također, moguće je analizu provesti i za uvijeno krilo, kao i krilo s kutom diedrala. Weissingerov model ograničen je na noseće površine s tankim, simetričnim profilima. [2]

U ovom modelu noseća površina diskretizira se nizom panela na krilu. Na mjestu i istječe vrtlog intenziteta Γ_i , a utječe vrtlog intenziteta Γ_{i+1} . Tako se u ovoj metodi slaže niz Π vrtloga jedan do drugoga po izvodnici koja spaja geometrijska mjesta jedne četvrtine tetive. Rubni uvjet glasi da normalna komponenta ukupne brzine na mjestu tri četvrtine tetive panela mora biti jednaka nuli. S tim se dobije sustav jednačbi koji se dalje rješava da se dobije raspodjela singulariteta, polje brzina i polje tlaka. Metoda je, kao i metoda modela noseće linije detaljno opisana u [2], [3].



Slika 9. Modificirani model noseće linije, preuzeto iz literature [3]

Slika 9. prikazuje podjelu modela po panelima. Ukoliko se želi razmatrati krilo sa zakrivljenom srednjom linijom aeroprofila, Weissingerov model više nije primjenjiv zato što se ne može primjenjivati rubni uvjet da je inducirana brzina na tri četvrtine tetive jednaka normalnoj komponenti brzine iz beskonačnosti. Dalje se mreža mora diskretizirati i po tetivi.

3.2. Pregled metode vrtložne rešetke

I prethodno navedene dvije numeričke metode, kao i metoda vrtložne rešetke temelje se na potencijalnom strujanju.

Kao što je istaknuto na kraju poglavlja 3.1.2, metoda vrtložne rešetke krilo diskretizira po tetivi i rasponu. Dobije se mreža panela po kojima se zatim raspoređuju prstenasti vrtlozi, opisani u poglavlju 2.2.3.4. Ova metoda je, dakle nadogradnja na model noseće linije.

Iz postavljene mreže panela zatim je potrebno dobiti određene točke korištene za izračun, što je opisano u idućem poglavlju. Ideja iza svake računalne implementacije ove metode je približno ista, prema literaturi [3], [5]. Ovdje će se provesti jedan takav proračun i implementacija u MATLAB-u.

Postupak prikazivanja implementacije metode ovdje je u obrnutom redoslijedu, odnosno prvo će se prikazati izračun svih potrebnih veličina, a zatim detaljno opisati svi parametri korišteni za izračun i modeliranje geometrije.

3.2.1. Osnovna jednadžba noseće površine

Singularitet koji se koristi u metodi je već opisani prstenasti vrtlog (2.2.3.5). Krilo se zamjenjuje srednjom površinom, te se singulariteti raspodjeljuju po površini. Prema postupku opisanome u [3], osnovni uvjet koji mora biti zadovoljen na nosećoj površini je:

$$w_{ind} + V_{\infty}\alpha = 0. \quad (3.1)$$

Jednadžba (3.1) iznosi rubni uvjet o nepromočivosti stijenke, odnosno ukupna normalna komponenta brzine u svakoj kontrolnoj točki mora biti jednaka nuli.

3.2.1.1. Inducirana brzina prstenastog vrtloga

Neka se na slici 7. promatra točka izvan prstenastog vrtloga, označena sa P. Polazeći od jednadžbi (2.4)-(2.6) može se zapisati ukupna inducirana brzina od strane cijelog prstenastog vrtloga u točki P.

Jedna nit, naprimjer nit 1 – 2 inducira brzinu u točki P čiji su intenziteti komponenti jednaki:

$$u = K (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_x, \quad (3.2)$$

$$v = K (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_y, \quad (3.3)$$

$$w = K (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_z, \quad (3.4)$$

U gornjim jednadžbama konstanta K jednaka je:

$$K = \frac{\Gamma}{4\pi|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left(\frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1}{r_0} - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_2}{r_0} \right), \quad (3.5)$$

gdje su:

- Γ - intenzitet vrtložne niti
- \mathbf{r}_1 - radij-vektor P-1
- \mathbf{r}_2 - radij-vektor P-2
- \mathbf{r}_0 - radij-vektor 1-2
- r_0 - intenzitet radij-vektora 1-2

Ovaj zapis pogodan je za implementaciju u MATLAB-u.

Tako složena formula zapisana preko koordinata točaka zapisana je u funkciji naziva VORTXL (*vortex line*) koja računa induciranu brzinu od jedne vrtložne niti konačne duljine u proizvoljnoj točki.

$$(u, v, w) = \text{VORTXL}(x, y, z, x1, y1, z1, x2, y2, z2, \text{Gamma})$$

U funkciji VORTXL, analogno literaturi [3], u, v, w su komponente inducirane brzine od jednog segmenta konačne vrtložne niti, x, y i z su koordinate točke P u kojoj se traži iznos inducirane brzine, a x_i, y_i i z_i su koordinate točaka 1 i 2 na prstenastom vrtlogu.

3.2.1.2. Ukupna inducirana brzina

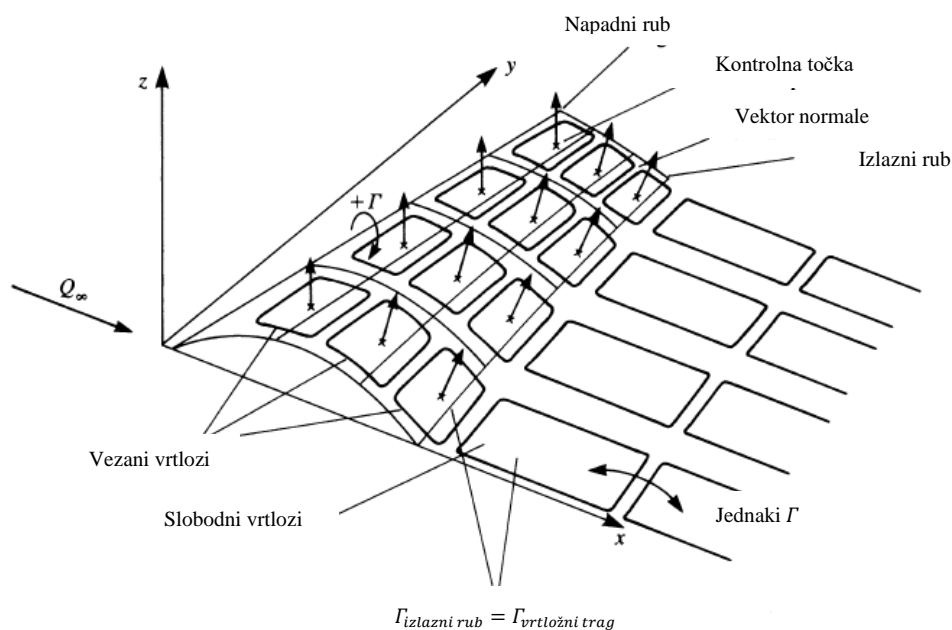
Nakon što se pronađe inducirana brzina uslijed jednog segmenta vrtložne niti konačne dužine, ide se u pronalazak ukupne inducirane brzine u jednoj točki od cijelog prstenastog vrtloga. Ova je formula spremljena u funkciju VORING, a izrađena je prema literaturi [3]. Funkciju VORTXL poziva četiri puta kao ekvivalent četirima nitima od kojih se sastoji prsten.

Kako bi se izračunala brzina inducirana izlaznim vrtložnim nitima, napravljena je nova funkcija slična funkciji VORING, s tim što se iz ukupne brzine izbacuju vezani vrtlozi prstenastog vrtloga na izlaznom rubu. Upravo pomoću ove funkcije bit će modeliran vrtložni trag, odnosno rubni uvjeti na izlaznom rubu.

3.2.2. Rubni uvjeti

Drugi rubni uvjet je Kutta uvjet. Odnosno, on se veže na izlazni vrtlog sa stražnjega ruba krila. Ovdje primijenjen, on govori da neposredno iza krila, iza svakoga panela u zadnjem redu mora postojati vrtlog jednakog intenziteta, a suprotne orijentacije kao prstenasti vrtlog na tom panelu. Odnosno, njegov intenzitet i smjer unaprijed su određeni činjenicom da ne smije generirati nikakvu silu unutar fluida budući da nije dio noseće površine. Kako bi bili zadovoljeni

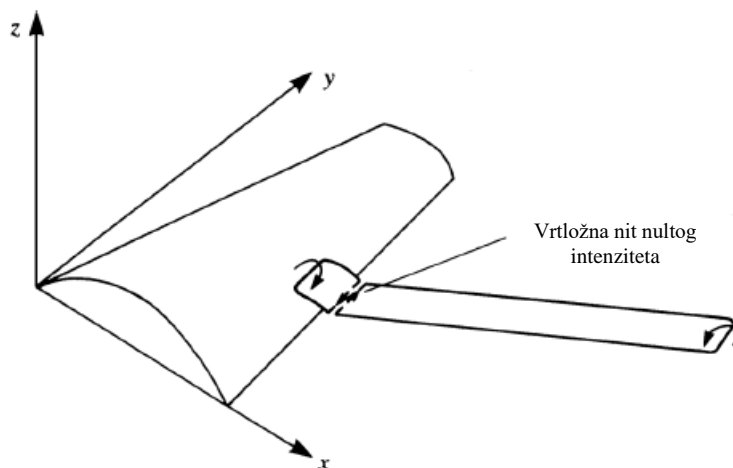
Helmholtzovi teoremi, ovi izlazni vrtlozi moraju biti paralelni sa smjerom neporemećene brzine, to jest nikakva sila ne djeluje na njih (ne mijenja im se intenzitet niti imaju početak ili kraj unutar fluida). Slika 10. prikazuje Kutta rubni uvjet.



Slika 10. Rubni uvjet rešetke, preuzeto iz literature [3]

3.2.2.1. Vrtložni trag

Nastavljajući se na Kutta rubni uvjet, jasno je da vrtložni trag mora napuštati izlazni rub i ostati paralelan neporemećenom strujanju. Postavlja se pitanje kako on napušta izlazni rub? Oblik vrtložnog traga u ovako implementiranoj metodi nema značajan utjecaj na bezdimenzijske koeficijente otpora, kao što je pokazano u [6], zbog malih napadnih kutova [3]. Stoga se u ovome radu usvaja da vrtložni trag izravno napušta izlazni rub paralelno s neporemećenom brzinom strujanja. Tu se govori o tzv. *krutom vrtložnom tragu*. Njegov intenzitet određen je Kutta rubnim uvjetom, opisanog u (3.2.2). Slika 11. pokazuje usvojeni oblik vrtložnog traga.



Slika 11. Vrtložni trag, preuzeto iz literature [3]

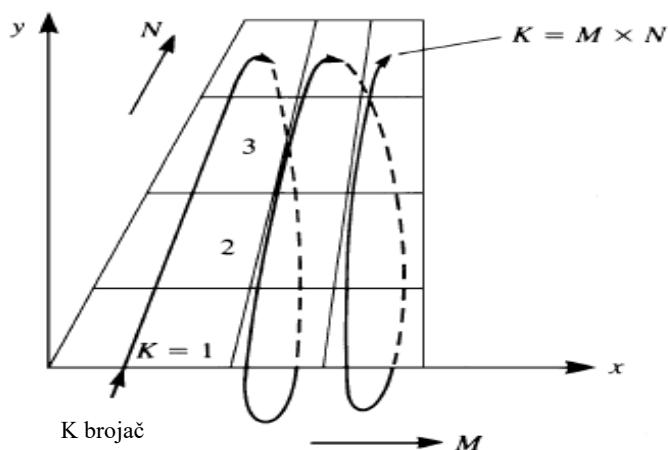
3.2.3. Matrica utjecaja

Matrica utjecaja definirana je kao

$$\mathbf{a}_{k,l} = \mathbf{v}_{\text{ind},k} \mathbf{n}_k, \quad (3.6)$$

U gornjem izrazu, matrica $\mathbf{a}_{k,l}$ predstavlja matricu utjecaja.

Neka je jedno jednostavno trapezno krilo podijeljeno na IB (N) panela uzduž raspona i IC (M) panela duž tetive (poglavlje 4) (Oznake M i N korištene su u literaturi [3]). Prema slici 12. bit će opisan algoritam traženja matrice utjecaja.



Slika 12. Algoritam izvođenja matrice utjecaja, preuzeto iz literature [3]

Polazeći od panela u prvom stupcu i retku, ide se po brojaču K koji ide kroz prvi red panela po rasponu. Prvi član matrice utjecanja, a_{11} predstavlja brzinu koju prstenasti vrtlog **jediničnog intenziteta** s prvog panela (drugi indeks) inducira u prvjoj kontrolnoj točki (prvi indeks).

Analogno tomu, generalni član $a_{k,l}$ predstavlja induciranu od strane l -tog prstenastog vrtloga u k -toj kontrolnoj točki.

Ova matrica korisna je matematički, budući da iz izraza za inducirane brzine razdvaja brzine i intenzitete vrtloga, a fizikalno djelomično predstavlja objašnjenje Kutta – Joukowski teorema. Vidljivo je da će inducirana brzina, a samim time i uzgon biti veći što je veći intenzitet cirkulacije.

Matrica utjecaja u programu je izračunata prolaskom kroz dvostruku for – petlju.

Nakon izračuna matrice utjecaja, konačno se za ukupnu induciranu brzinu može zapisati izraz u kontrolnoj točki k od strane vrtloga :

$$w_{k,l} = a_{k,l} \Gamma_l \quad (3.7)$$

U izrazu (3.7), član s desne strane je ukupna inducirana brzina u k -toj kontrolnoj točki od strane l -tog vrtloga intenziteta Γ_l . Ukupna normalna brzina u k -toj kontrolnoj točki dobije se sumiranjem brzina induciranih od svih prstenastih vrtloga po krilu:

$$w_k = \sum_{l=1}^{M \times N} a_{k,l} \Gamma_l \quad (3.8)$$

Očito je da će inducirane brzine biti najveće na dijagonali, što osigurava stabilnost programa i proračuna [3], [4]. Svi indeksi prikazani u gornjim izrazima izvedenim prema [3], osim N i M, zadržani su u programskoj implementaciji koda. Indeksi N i M zamijenjeni su nazivima IB i IC. Konačna matrica utjecajnih koeficijenata ima naziv **a**.

3.2.4. Brzina iz beskonačnosti

Nakon što je se odredio prvi član u jednadžbi (3.1), preostaje odrediti i drugi sumand. On će jednostavno biti jednak projekciji brzine iz beskonačnosti na komponente koordinatnog sustava. Bit će zapisan u matricu **RHS** (eng. *Right Hand Side*).

Matrica se određuje iz sljedeće jednadžbe:

$$\mathbf{RHS} = - V_\infty \mathbf{n}_i \quad (3.9)$$

Odnosno, traži se normalna komponenta brzine iz beskonačnosti u i -toj kontrolnoj točki.

Dosad opisani postupak implementiran je u obliku MATLAB koda kako bi se izračunale matrica utjecaja te matrica **RHS**, koja isto ime nosi u kodu.

Vektor \mathbf{n}_i je normala na kontrolnu točku. Njegov izračun bit će prikazan kasnije, a on je obavljen prema [3] i spremljen u trodimenzionalnu matricu u programu imena **nn**.

3.2.5. Konačna jednadžba

Ubacivanjem izraza (3.8) i (3.9) u početnu jednadžbu, dobije se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\sum_{l=1}^{M \times N} a_{k,l} \Gamma_l = - Q_{\infty} \mathbf{n}_i \quad (3.10)$$

Jednadžba (3.10) matrična je jednadžba čijim se rješavanjem dobivaju nepoznati intenziteti cirkulacije potrebni za daljnji proračun. Budući da su inducirane brzine prstenastog vrtloga po intenzitetu najjače upravo u kontrolnoj točki unutar tog prstenastog vrtloga te u njegovo neposrednoj blizini (Biot – Savartov zakon, intenzitet brzine obrnuto proporcionalan udaljenosti), očito je da će članovi na dijagonali matrice \mathbf{a} imati najveću vrijednost. U izračunu matrice \mathbf{a} postavljen je uvjet: ukoliko je udaljenost r manja od broja koji je numerički u MATLAB-u jednak nuli, onda će i inducirana brzina biti jednaka nuli. [3][4]

Raspisani sustav jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,N \times M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N \times M,1} & \cdots & a_{N \times M, N \times M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{N \times M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{\infty 1} \\ \vdots \\ -V_{\infty, N \times M} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Taj sustav može se u jednostavnom obliku zapisati kao matrična jednadžba (3.12):

$$\mathbf{a}\Gamma = \mathbf{RHS}. \quad (3.12)$$

Njezinim rješavanjem u MATLAB-u u obliku $\Gamma = \mathbf{a} \setminus \mathbf{RHS}$ dobije se konačno rješenje nepoznatih intenziteta prstenastih vrtloga.

3.2.6. Računanje željenih veličina iz dobivenih rezultata

Daljnji proračun odnosi se na dobivanje željenih veličina, odnosno u ovome slučaju silu uzgona, otpora i prirast tlaka po krilu. Sve ove veličine pomažu u određivanju konačnih, bezdimenzijskih koeficijenata sile uzgona, otpora te bezdimenzijskog koeficijenta tlaka, odnosno raspodjelu tlaka po krilu (panelima).

Kao što je ranije rečeno, za izračun svih normalnih komponenti induciranih brzina koje će se koristiti za izračun otpora trebat će „nova“ matrica utjecaja \mathbf{b} , koja će na stražnjem rubu imati izbačen vezani vrtlog, odnosno iz funkcije VORING miču se inducirane brzine vezanih vrtloga.

Kao i sve jednadžbe izvedene u poglavlju 3.2, i dalje prikazane jednadžbe izvedene su pomoću literature [3].

3.2.6.1. Apsolutne veličine

1. Sila uzgona (teorem Kutta – Joukowski)

Na napadnom rubu sila uzgona bit će jednaka:

$$\Delta L_{1,j} = \rho Q_{\infty} \Gamma_{1,j} \Delta y_{1,j} \quad (3.13)$$

Na ostatku krila ona će imati iznos dan jednadžbom (3.14):

$$\Delta L_{i,j} = \rho Q_{\infty} (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{i,j} \quad (3.14)$$

U gornjim jednadžbama član s lijeve strane predstavlja prirast sile uzgona po panelu. Zadnji član s desne strane predstavlja širinu panela u smjeru raspona krila. Ukupna sila uzgona dobiva se jednostavnim sumiranjem svih panelnih sila uzgona.

2. Sila otpora

Na napadnom rubu sila otpora jednaka je:

$$\Delta D_{ind,1,j} = -\rho w_{ind,1,j} \Gamma_{1,j} \Delta y_{1,j} \quad (3.15)$$

Za sve panele iza, analogno izrazu (3.14) uvodi se sljedeće:

$$\Delta D_{ind,i,j} = -\rho w_{ind,i,j} (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{i,j} \quad (3.16)$$

Stoga, analogno ukupnoj sili uzgona moguće je izračunati ukupnu silu otpora sumiranjem svih sila otpora po panelima. Ovakav način izračuna sila ukomponiran je u računalnu implementaciju.

3. Prirast tlaka po panelu

Prirast tlaka po panelu dobije se jednostavnim dijeljenjem sile uzgona svakog panela i njemu pripadne površine:

$$\Delta p_{i,j} = \frac{\Delta L_{i,j}}{s_{i,j}} \quad (3.17)$$

4. Moment valjanja

Svaka sila $\Delta L_{i,j}$ izaziva moment $\Delta M_{i,j}$ krakom $y_{i,j}$. Krak je jednak udaljenosti po osi y od kontrolne točke panela (i,j) . Ukupan moment valjanja M bit će jednak sumi svih $\Delta M_{i,j}$.

3.2.6.2. Koeficijenti

Potrebni koeficijenti dobiju se jednostavnim dijeljenjem ukupnih sila uzgona, odnosno otpora referentnom vrijednošću. Dakle, vrijedi:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho Q_\infty^2 S_{ref}} \quad (3.18)$$

$$C_{Di} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho Q_\infty^2 S_{ref}} \quad (3.19)$$

U jednadžbi (3.19) indeks i kod koeficijenta otpora govori da se radi o induciranom otporu.

Koeficijent tlaka može se prikazati za svaki panel uz pomoć ukupne inducirane brzine u kontrolnoj točki panela. [3] Povezani su jednadžbom:

$$C_{p,k} = 1 - \frac{Q_k^2}{Q_\infty^2} \quad (3.20)$$

Koeficijent momenta valjanja dobije se normiranjem ukupnog momenta valjanja s referentnom silom pomnoženom referentnom duljinom, što je ovdje raspon krila.

$$C_l = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho Q_\infty^2 S_{ref} B} \quad (3.21)$$

4. GEOMETRIJSKI MODEL

Geometrija je kreirana po uzoru na literaturu [5]. Krilo je podijeljeno na trapezne segmente koji se potom „spajaju“ na mjestu preklapanja. Ovakav način modeliranja omogućuje implementiranje kompleksne geometrije krila u model, kao što je dvostruka strijela napadnog ruba, promjena kuta dihedrala krila ili uvijanje krila. Kao što je i prije rečeno, ova metoda ograničena je na noseće površine s tankim profilima koje se mogu zamijeniti svojom srednjom linijom. Kontrolne površine bit će uvedene kao deformacija mreže noseće površine.

Ograničenje ovakve implementacije je jednolik aeroprofil po cijelome krilu zbog dobivanja vršnih točaka panela i svih ostalih točaka potrebnih za proračun, te se za potrebe ovog rada promatraju krila jednolikog aeroprofila. Također, potrebno je imati pristup bazi podataka spomenutog aeroprofila.

4.1. Trapezni segment

Prvo će se definirati koordinatni sustav pomoću kojega se definira segment:

- os y gleda u pravcu razmaha krila,
- os x gleda u pravcu tetive profila,
- os z usmjerena je prema visini krila,
- korijenska tetiva leži u ravnini simetrije krila.

Za jedan segment potrebno je zadati četiri točke. Neka su to točke a , b , c i d . Budući da se radi o tankim profilima, one određuju krajnje položaje srednje noseće površine.

Točka a nalazi se na korijenskoj tetivi na napadnom rubu krila. Zatim se, prateći korijensku tetivu, ide do točke b , koja se dakle nalazi na korijenskoj tetivi na izlaznom rubu krila. Od točke b do točke c dolazi se prateći izlazni rub. Točka c je definirana presjecištem izlaznog ruba i vršne tetive. Konačno, analogno prethodno iznesenom, točka d nalazi se na vršnoj tetivi pri napadnome rubu.

Neka je točka a uvijek postavljena u ishodište koordinatnog sustava $(0,0,0)$. Točka b će imati y i z koordinate jednake nuli, budući da se radi o korijenskoj tetivi. Uvijanje korijenske tetive krila postiže se pogodnim namještanjem napadnog kuta.

Jedan segment, a posljedično i jedno cijelo polukrilo nalazi se u istom kvadrantu.

4.1.1. Pomoćna funkcija geometrija

Prije nego što se pođe u opis izrade geometrijskog prikaza i svih potrebnih točaka za gore izračun opisan u poglavlju tri, izrađena je pomoćna funkcija geometrija. Za zadane četiri

točke segmenta, ova funkcija računa sve geometrijske parametre krila kojeg bi činila dva ovakva zadana segmenta, kao što su raspon krila, površina, duljine tetiva, uvijanje, kut dihedrala, postavni kut vršne tetive, vitkost krila, faktor suženja i kut napadnog ruba. Pomoću njih, kad se zadaju četiri točke vrha krila, bit će definirane ostale točke na napadnom i izlaznom rubu.

Dakle, njezin poziv u MATLAB-u izgleda ovako:

```
[B,S, phi, lambda_LE, cr, ct, iw, it, lambda, AR]=geometrija(a,b,c,d).
```

U gornjem izrazu, sljedećim varijablama pridruženi su nazivi:

- S – referentna površina krila koje bi se sastojalo od dva takva segmenta,
- B – raspon krila koje bi se sastojalo od dva takva segmenta,
- phi – kut dihedrala krila,
- lambda_LE – kut strijela napadnog ruba ,
- cr, ct – korijenska, odnosno vršna tetiva,
- iw, it – kut uvijanja krila, kut uvijanja vršne tetive (jednaki po iznosu jer se kut uvijanja korijenske tetive uvodi namještanjem napadnog kuta),
- lambda, AR – faktor suženja krila te vitkost krila.

4.1.2. Trapezni segment sa simetričnim profilom

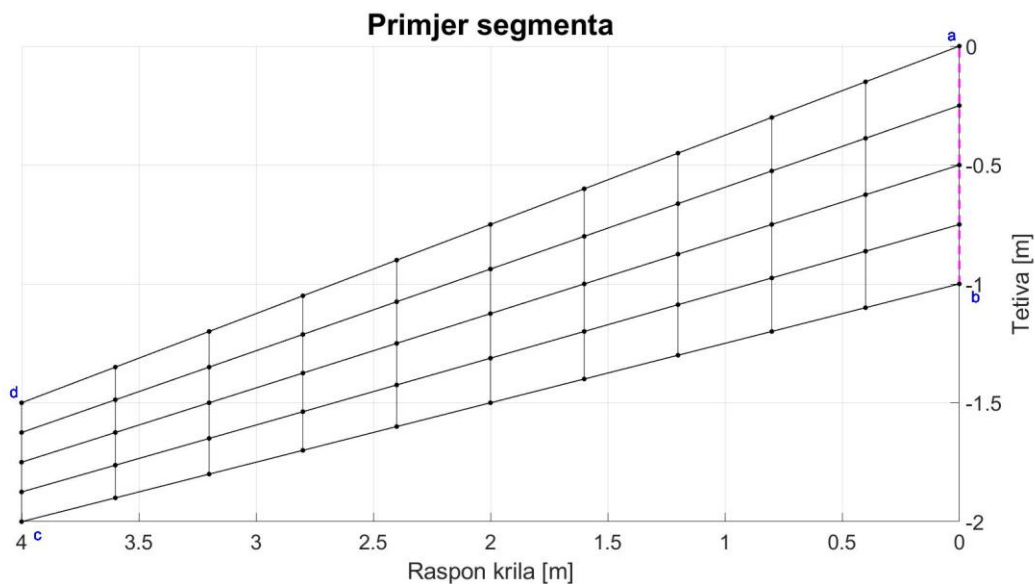
Segment sa simetričnim profilom kao srednju liniju imat će ravnu crtu. Stoga je jednostavno definirati sve potrebne točke.

Neka je zadan broj panela po rasponu segmenta, IB, te broj panela po rasponu tetive, IC. To znači da se po napadnom, odnosno izlaznom rubu nalazi IB+1 vršnih točaka panela (uključujući točke *a, b, c* i *d*). Analogno tome, podjelom krila na IC panela po tetivi dobije se IC+1 točaka na svakoj tetivi krila.

Posljedično prethodno rečenome, bit će ukupno $(IB+1)*(IC+1)$ vršnih točaka panela. Ove točke spremljene su u matricu C_p .

U novoj skripti, koja neka nosi ime `segment`, prvo se zadaju točke *a, b, c* i *d* kao ulazni parametri za poziv funkcije `geometrija`. Uz poziv pomoćne funkcije, za segment se dobiju sve potrebne geometrijske karakteristike. Zatim, definirane su relacije za *x, y* i *z* koordinate točaka koje se nalaze na tetivama i rubovima krila. Njihovom linearnom interpolacijom između napadnog i izlaznog ruba dobiju se sve vršne točke panela, budući da se profil zamjenjuje ravnom crtom pa su onda sve linije koje povezuju napadni i izlazni rub ujedno i tetive.

Za četiri proizvoljno odabrane točke, s podjelom od $IB=10$ panela duž raspona segmenta i $IC=4$ panela duž tetive, dobije se sljedeća slika.



Slika 13. Primjer jednog segmenta

Na gornjoj slici isprekidanom magenta linijom prikazana je korijenska tetiva. Također su dodane oznake za točke a, b, c i d . Vršne točke panela prikazane su crnim točkama.

4.1.3. Trapezni segment krila s nesimetričnim profilom

Krila koja imaju tanke profile sa zakrivljenom srednjom linijom trebaju malo više ulaznih podataka od onih sa simetričnim profilom. Postupak je sličan. Zadaju se četiri točke koje ograničavaju krilo. Isto se, kao i u prijašnjem poglavlju, pozivom funkcije `geometrija` dobiju svi potrebni parametri segmenta za definiranje točaka.

No, ukoliko se želi zakrivljeni profil, potrebno je zadati vektor točaka u kojemu će biti z koordinate točaka srednje linije profila normirane tetivom. To neka je vektor \mathbf{zcl} . Dakle, ako se krilo želi podijeliti na IC panela duž tetive, u vektoru \mathbf{zcl} morat će se nalaziti dvije točke manje nego li ih ima na tetivama, odnosno imat će $IC-1$ točaka. Svaka točka mora se očitati za željeni profil i unijeti ručno u vektor kako bi metoda radila za zakrivljene profile.

Ako se krilo želi podijeliti na $IC=4$ panela duž tetive, vektor \mathbf{zcl} imat će tri točke. Svaka točka očitava se na mjestu koje je od početka tetive u postocima udaljeno za $\mathbf{zcl}(i) * \frac{1}{IC} * 100\%$. U prethodnom izrazu, i predstavlja broj točke u vektoru \mathbf{zcl} .

Stoga, za željenu podjelu na četiri panela duž tetive segmenta krila, točke vektora \mathbf{zcl} morat će biti očitane za 25 %, 50% i 75% tetive.

Ako se želi uviti i korijenska tetiva, onda se i z koordinata točke b mora podesiti na željenu visinu, koja se izračunava iz zahtijevanog kuta uvijanja i duljine korijenske tetive.

Primjer spremanja vektora \mathbf{zcl} može se vidjeti ispod:

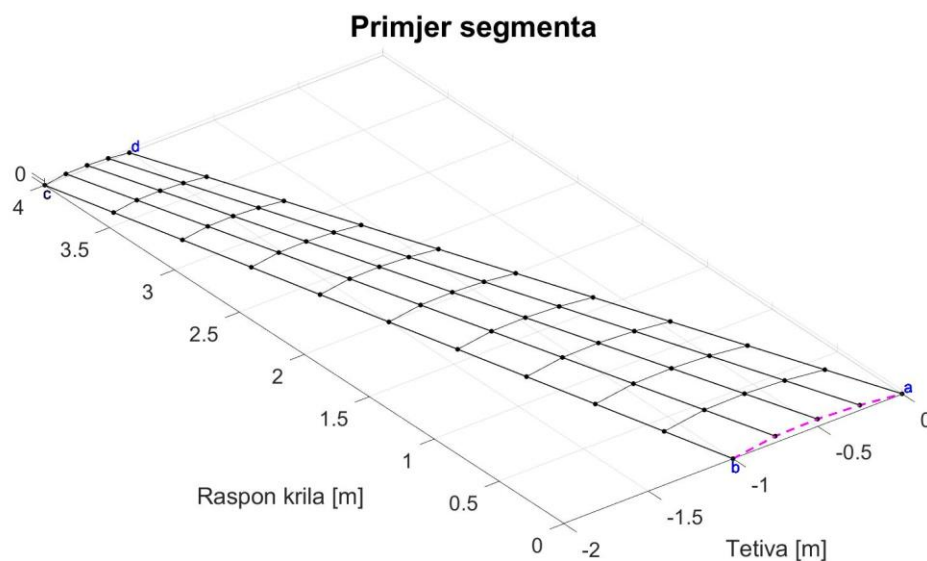
```
zcl=[0.034375,0.038889,0.0263889]; [7]
```

Ovdje su za profil NACA 4412 izračunate tražene točke.

Potom se definiraju točke na tetivama i rubovima krila, s dodatkom točaka vektora \mathbf{zcl} . One se dodaju z koordinatama točaka korijena i vrha segmenta (budući da su one dobivene iz debljine profila normiranog tetivom, pomnožilo ih se sa iznosom duljine tetive u korijenu, odnosno vrhu segmenta).

Ovaj put, linearno su se interpolirale točke između tetiva, budući da tetive više nisu ravne i interpoliranje između napadnog i izlaznog ruba krila ne može to pokriti.

Ovisno o broju panela po rasponu segmenta, pronađene su odgovarajuće točke na napadnom i izlaznom rubu. Počevši od njih, kod linearno interpolira duž tetive, od točke do točke. To rezultira matricom vršnih točaka panela \mathbf{C}_p .



Slika 14. Zakrivljeni segment

Slika 14. prikazuje krilo s istim vršnim točkama kao i sa slike 13., s tim da je dodan profil NACA 4412 s podjelom na četiri panela duž tetive.

Ovako definiran segment spremljen je u funkciju `segment` kojoj je poziv

```
[Cp,Ck,Cv,Cvk,nn,s,B,phi]=segment(a,b,c,d,IB,IC)
```

Unutar ove funkcije, kao što je već rečeno, potrebno je pozvati funkciju `geometrija`.

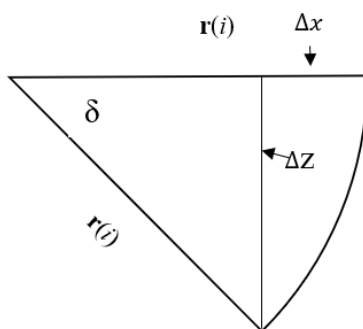
Za simetrične profile, vektor \mathbf{zcl} jednostavno će biti: `zcl=zeros(IC-1);` .

4.1.4. Kontrolne površine

Kontrolne površine modelirane su funkcijom *krilca*. U njoj se, deformacijom mreže, postiže otklon zadnjeg reda panela za zadani kut.

Okvirni postupak:

1. Napraviti isti opis geometrije kao u funkciji *segment*.
2. Izračunati za zadnji red panela dimenziju panela duž tetive i spremiti u vektor \mathbf{r} .
3. Taj red se rotira za kut δ .
4. Izračunati nove x i z koordinate otklonjenog izlaznog ruba. To se može učiniti jednostavnim matematičkim manipulacijama. Ako se na mjestu i točka izlaznog ruba zarotira za otklon δ , onda će njezina z koordinata biti otklonjena za $\mathbf{r}(i) \cdot \sin(\delta)$, a x koordinata za $\mathbf{r}(i) \cdot (1 - \cos(\delta))$. Za potrebe ovoga rada pomak y koordinate dovoljno je mal da ne čini značajnu razliku.



Slika 15. Otklon izlaznog ruba

5. Iz matrice \mathbf{C}_p izbaciti koordinate prvobitnog izlaznog ruba i ubaciti novodobivene preko postupka opisanog u prijašnjim točkama.
6. Dobiti novu matricu \mathbf{C}_p .

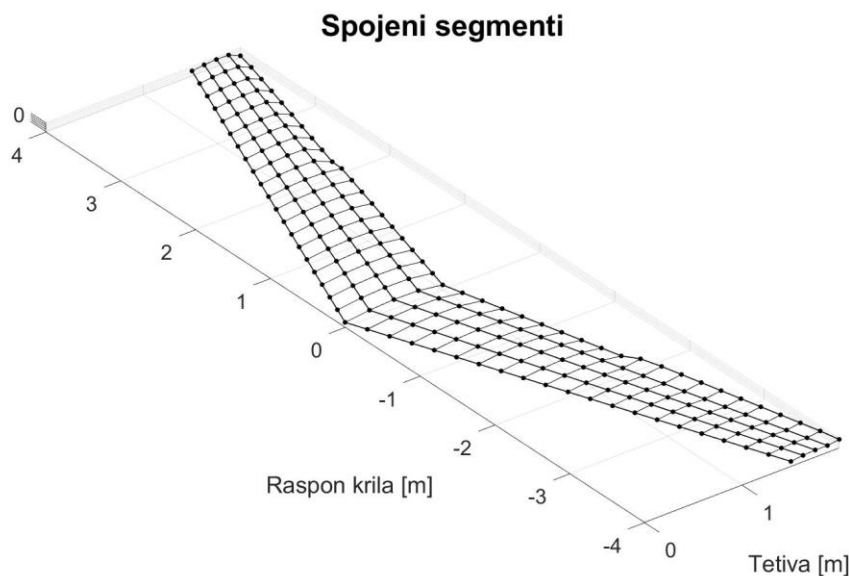
U funkciji *krilca* odmah je spremljena i geometrija druge strane krila, odnosno x koordinate krilca drugog polukrila su iste, sve y imaju suprotan predznak. Kod z koordinata iste su sve osim zadnjeg reda, koji predstavlja z koordinatu otklonjene upravljačke površine. z koordinate otklonjene upravljačke površine s druge strane krila bit će jednake onima iz matrice \mathbf{C}_p , umanjena za dvostruki iznos pomaka u smjeru osi z .

Ako se matrica točaka s jedne strane polukrila spremi u matricu $\mathbf{Cp1}$, onda za drugo krilce vrijedi: $\mathbf{Cp2}(\text{end}, :, 3) = \mathbf{Cp1}(\text{end}, :, 3) - 2 * \text{pomakz}$;

U vektor **pomakz** spremljeni su odkloni u z smjeru za zadani kut.

Ovakav postupak daje otklonjenu kontrolnu površinu koja čini $\frac{1}{IC} * 100\%$ tetive. Zato je zgodno uzeti primjere gdje kontrolna površina čini 20 ili 25 % tetive.

Funkcija **krilca** kombinira se s funkcijom **segment** kako bi se dobilo cijelo krilo. Jedno cijelo krilo, čija je polovica jednaka kao na slici 14., ovaj put sastavljeno od segmenta i krilaca diferencijalno otklonjenih za 15° , prikazano je na slici 16.



Slika 16. Krilo s krilcima

Načinjena je finija podjela mreže. Nedostatak izračuna s krilcima je nemogućnost dupliranja točke. Odnosno, nakon otklona krilaca na istom mjestu javlja se „ista“ točka koja ima različite iznose z koordinata. Zbog toga, u izračun ulazi samo jedna, ona od krilca, a mreža se dijeli na finije dijelove kako bi se ovaj efekt umanjio.

4.2. Matrice ulaznih podataka

Nakon što je utvrđen prikaz geometrije, pomoću matrice točaka **Cp**, čiji je postupak dobivanja izveden ranije, dolazi se do ostalih potrebnih podataka. Naime, prema [3], hvatišta lokalnih sila uzgona na panelima nalazi se u kontrolnim točkama, koje se nalaze na polovici širine panela po rasponu i na tri četvrtine panela po tetivi. Ove točke spremljene su u matricu **Ck**. Matrica **Ck** dobije se jednostavnim prolaskom kroz dvostruku *for* – petlju u MATLAB-u. Za jedan segment, čija je matrica vršnih točaka panela spremljena u matricu **Cp**, petlja izgleda ovako:

```
Ck=zeros(IC,IB,3);
```

```
for i=1:IC
```

```
    for j=1:IB
```

```
        t=0.25;
```

```
        X1=Cp(i,j,1); Y1=Cp(i,j,2); Z1=Cp(i,j,3);
```

```
        X2=Cp(i+1,j,1); Y2=Cp(i+1,j,2); Z2=Cp(i+1,j,3);
```

```
        X3=Cp(i,j+1,1); Y3=Cp(i,j+1,2); Z3=Cp(i,j+1,3);
```

```
        X4=Cp(i+1,j+1,1); Y4=Cp(i+1,j+1,2); Z4=Cp(i+1,j+1,3);
```

```
        Ck(i,j,1)=(X1+X3)/2*t+(1-t)*(X2+X4)/2;
```

```
        Ck(i,j,2)=(Y3+Y1)/2*t+(Y2+Y4)/2*(1-t);
```

```
        Ck(i,j,3)=t*(Z1+Z3)/2+(1-t)*(Z4+Z2)/2;
```

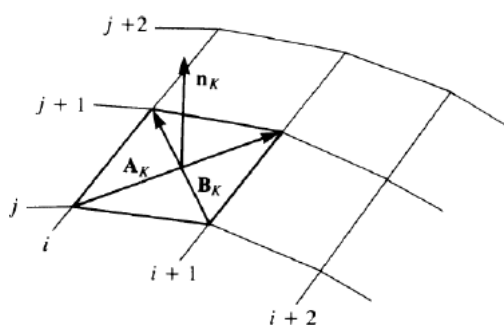
```
    end
```

```
end
```

Faktor t uzima u obzir da su z i x koordinate kontrolnih točaka pomaknute van središta. Odnosno, utjecaj ulaznog ruba panela na koordinatu kontrolne točke bit će jednak faktoru t , a utjecaj izlaznog ruba bit će jednak faktoru $1-t$.

Dalje je potrebno definirati normale na kontrolne točke. Budući da su paneli četverokuti, jedinične normale na njih jednostavno se mogu izračunati normiranjem vektorskog umnoška dvaju vektora koji čine dijagonale tog četverokuta. [3]

Slika 17. prikazuje jednu takvu normalu:



Slika 17. Normala na panele, preuzeto iz literature [3]

Kod za izračun normala izgleda ovako:

```

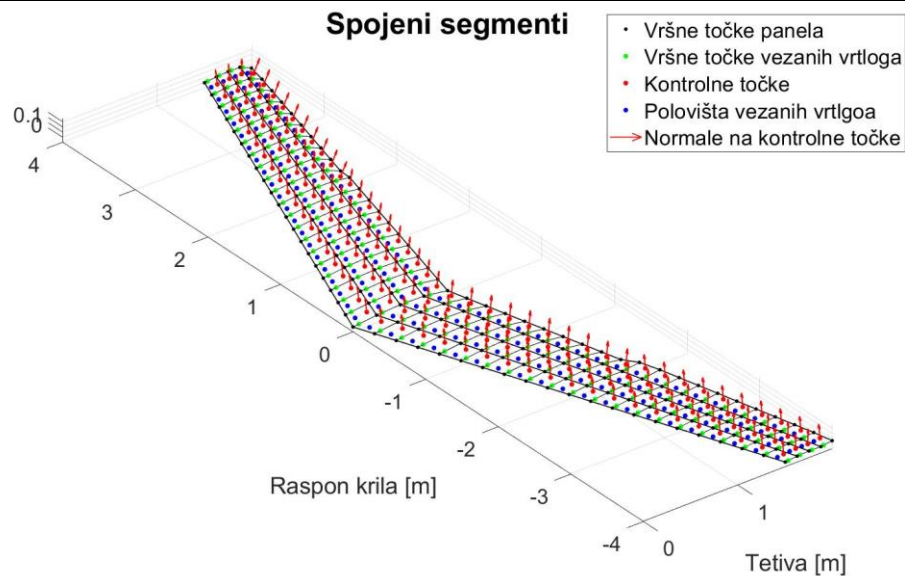
nn=zeros(IC,IB,3);
for i=1:IC
    for j=1:IB
        X1=Cp(i,j,1); X2=Cp(i,j+1,1);
        Y1=Cp(i,j,2); Y2=Cp(i,j+1,2);
        Z1=Cp(i,j,3); Z2=Cp(i,j+1,3);
        X3=Cp(i+1,j,1); X4=Cp(i+1,j+1,1);
        Y3=Cp(i+1,j,2); Y4=Cp(i+1,j+1,2);
        Z3=Cp(i+1,j,3); Z4=Cp(i+1,j+1,3);
        P1=[X1,Y1,Z1]; P2=[X2,Y2,Z2];
        P3=[X3,Y3,Z3]; P4=[X4,Y4,Z4];
        Ak=P1-P4; Bk=P3-P2;
        N=cross(Ak,Bk);
        if dot(N,[0,0,1]) < 0
            N=-N;
        end
        nn(i,j,:)=N/norm(N);
    end
end
end

```

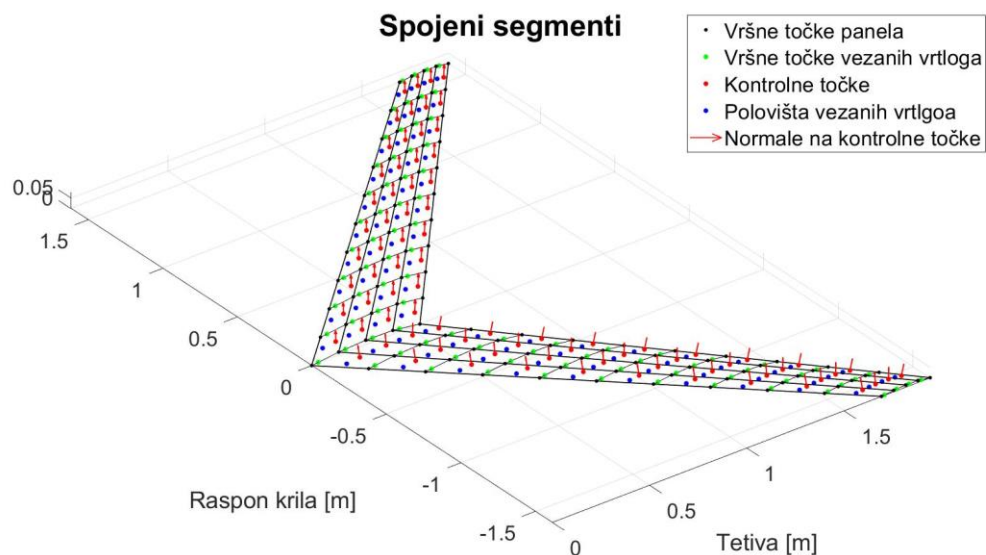
Normale su spremljene u matricu **nn**.

Točke u kojima se nalaze hvatišta vezanih vrtloga prstenastih vrtloga nalaze se na jednoj četvrtini tetive po dužini tetive, a na samim tetivama su. One su također točke vrlo bitne za izračun potrebnih veličina te se definiraju na sličan način kao i kontrolne točke. One su spremljene u matricu **Cv**.

Na posljetku, potrebno je definirati i polovišta vezanih vrtloga. Oni će se dakle nalaziti na četvrtini tetive panela i na polovici panela po rasponu.



Slika 18. Prikaz diskretiziranog krila s kontrolnim točkama i normalama



Slika 19. Krilo preuzeto iz literature [6]

Sve ove veličine ucrtane su na slikama 18. i 19. Na slici 18. je isto krilo kao i s prethodne slike, dok se za sliku 19. koristilo krilo jednako onome korištenome u radu [6].

Na slikama 18. i 19. vide se prikazane sve točke, kao i normale.

4.3. Pomoćna funkcija krilo

Na samom kraju, napravljena je funkcija `krilo`. U njoj se pozivaju funkcije `segment` i `krilca` kako bi se dobile matrice za oba dijela polukrila. Zatim su složene u velike matrice koje sadrže vršne točke panela od cijelog krila, kontrolne točke za cijelo krilo, kao i točke vezanih vrtloga i njihova polovišta za cijelo krilo. Ove četiri matrice, uz geometrijske parametre ulaz su za funkcije koje računaju inducirane brzine i intenzitete vrtloga. One su ključ za dobro

definiranje metode. Gore opisan način modeliranja krila omogućava, kao što je rečeno, dobivanje kompleksnijih geometrija krila.

Slaganjem segmenata omogućuju se razne geometrije, a moguće je modelirati i geometrija kojima zadnja tetiva nije paralelna sa x osi.

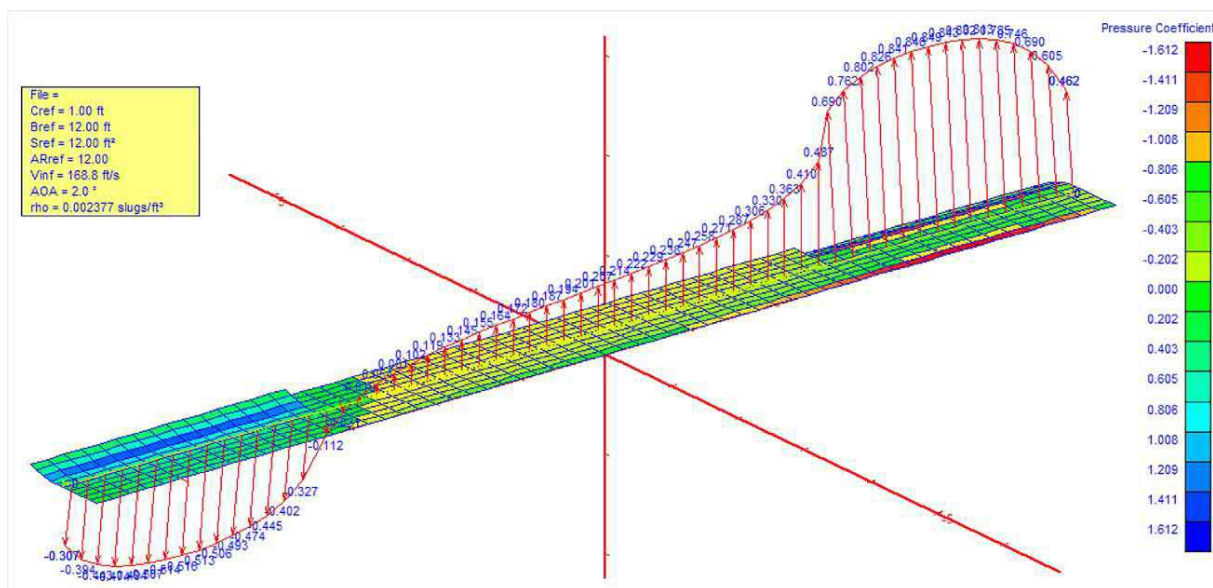
Jedna takva složena noseća površina prikazana je i analizirana u idućem poglavlju.

5. ANALIZA REZULTATA

5.1. Validacija modela

U literaturi [11] prikazan je način validacije krila pomoću lokalnog koeficijenta uzgona. Naime, ako se pronađe koeficijent uzgona za svaki od panela cijeloga krila te sumiraju svi po tetivi, dobiva se raspodjela uzgona po krilu. Ovakav način prikaza uzgona pogodan je za daljnje konstrukcijske proračune.

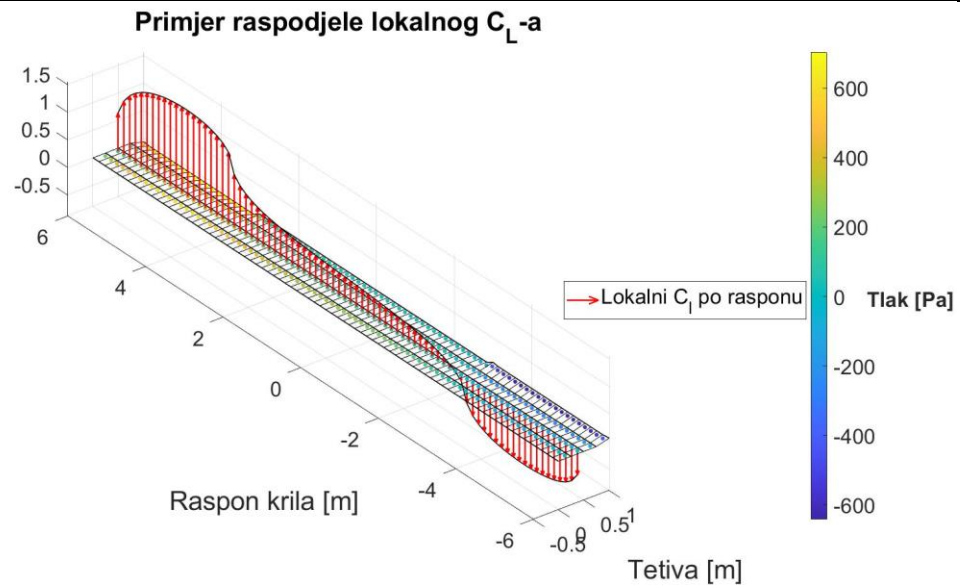
Na slici 20., preuzetoj iz literature [11], dan je primjer koeficijenta uzgona po rasponu promatranog krila:



Slika 20. Primjer raspodjele lokalnog koeficijenta uzgona, preuzeto iz literature [11]

Za jedno obično pravokutno krilo simetričnog profila, kojemu se upravljачka površina otklanja na pola raspona polukrila, implementacijom u MATLAB-u dobijaju se rezultati prikazani na slici 21.

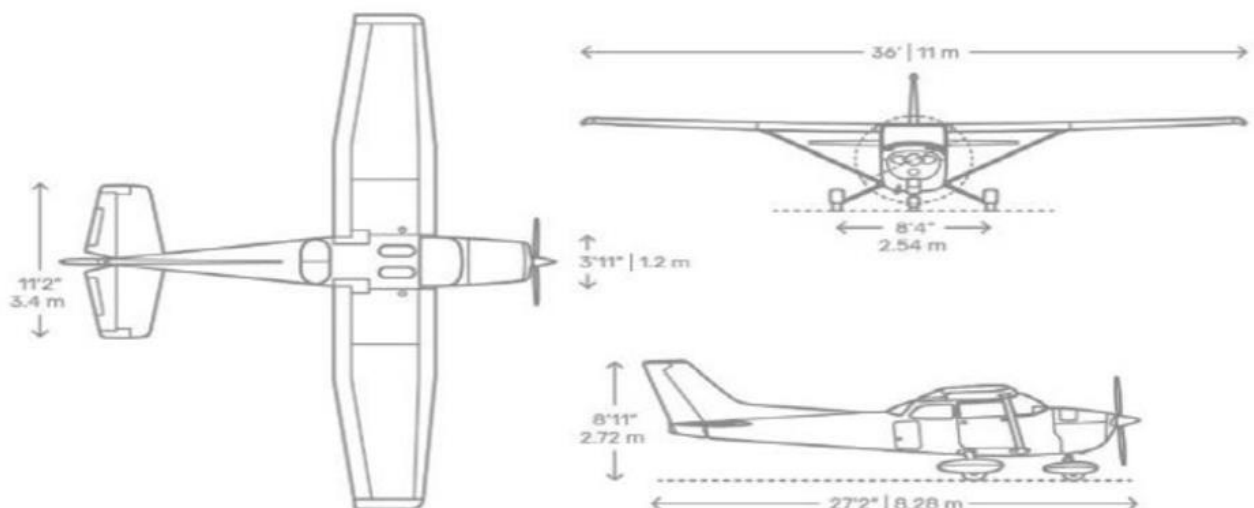
Za istu geometriju s neotklonjenim površinama opisane u [11] za primjer sa slike 20., dobije se koeficijent uzgona jednak $C_L=0.17682$, dok se u [11] dobila vrijednost $C_L=0.1765$, što dodatno validira ovaj model.



Slika 21. Lokalna raspodjela uzgona

5.2. Odabir krila

Za analizu odabrano je krilo Cessne 172, budući da se tu radi o letu na podzvučnim brzinama koje ne prelaze $Ma=0.3$. Iz literature [8], [9] određene su lokacije točaka.



Slika 22. Geometrija krila, preuzeto iz literature [9]

Budući da se radi o složenoj geometriji, sastavljeno je iz dva trapezna segmenta. Izračunate točke prikazane su u tablici 1:

Tablica 1. Koordinate točaka

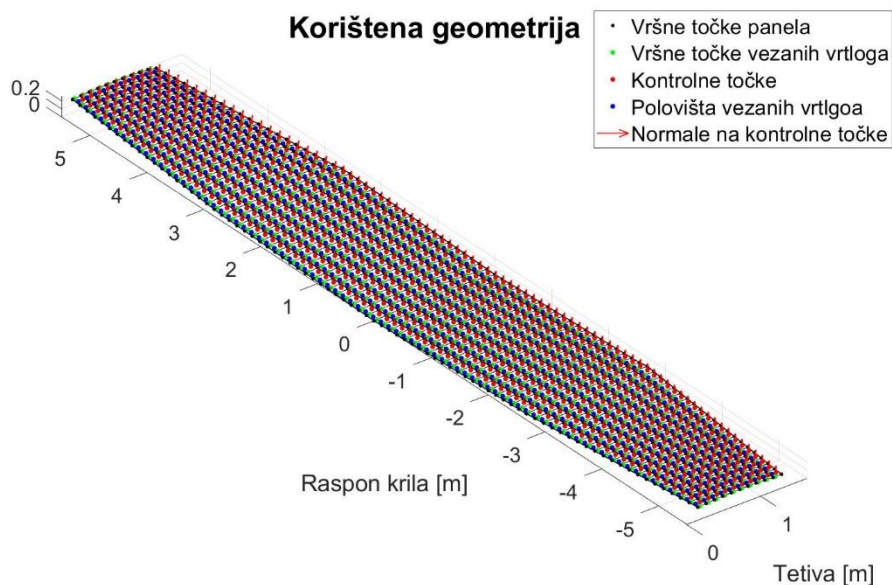
<i>a</i>	[0,0,0]	<i>d</i>	[0, 2.68, 0.07954]
<i>b</i>	[1.63,0,0]	<i>e</i>	[0.15, 5.50, 0.16324]
<i>c</i>	[1.63, 2.68,0.07954]	<i>f</i>	[1.28, 5.50, 0.16324]

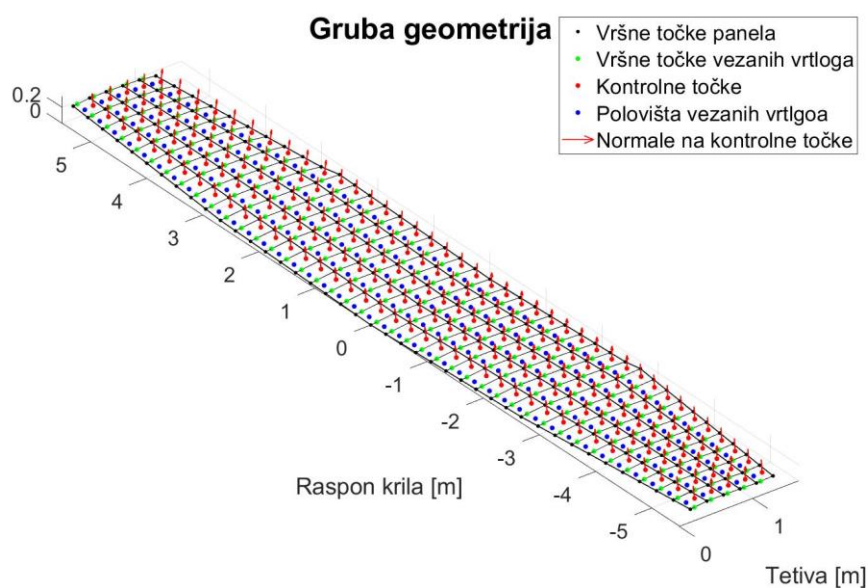
Rezultati će biti uspoređeni i verificirani s literaturom dostupnom u [8], [9].

Kod ovoga krila radi se o profilu NACA serije 4, NACA2412. Potrebni podaci za izračun z koordinata srednje linije preuzeti su iz [7].

Za krilo s neotklonjenim upravljačkim površinama, radi konvergencije rezultata, broj panela duž tetive postavljen je na 15, a za svaki od segmenata na 20.

Budući da upravljačka površina zauzima oko 22 % tetive, kod analize noseće površine s otklonjenom kontrolnom površinom, krilo će se podijeliti na pet segmenata duž tetive i po 20 duž svakog segmenta. Slika 23. prikazuje pravu podjelu geometrije krila kod izračuna koeficijenata s neotklonjenom upravljačkom površinom, no radi preglednosti dodana je i slika s manje podjela (slika 24.).

**Slika 23. Krilo Cessne 172 u MATLAB-u**



Slika 24. Primjer geometrije krila s grubom podjelom panela

Ni na slici 24. nije sve najjasnije vidljivo, no pokazat će se da rezultati konvergiraju tek s većim brojem panela tako da takva raspodjela panela nije primjenjiva.

5.3. Usporedba rezultata

Za kutove od -2 do 12° , u razmaku od po 2° izračunat je koeficijent uzgona C_L . Rezultati su verificirani po literaturi [8]. Sljedeća tablica prikazuje koeficijente uzgona:

Tablica 2. Usporedba koeficijenta uzgona

$\alpha, [^\circ]$	-2	0	2	4	6	8	10	12
C_L	0.0296	0.1913	0.3528	0.5138	0.6742	0.8338	0.9924	1.1497
C_L [8],[9]	-	-	-	-	-	0.8378	0.97795	1.14085

Iako u literaturi [8] nisu izravno navedene vrijednosti za napadne kutove u rasponu od -2 do 6° , dana je vrijednost za 8° , koja se jako dobro poklapa.

U literaturi [9] dan je izravan podatak za napadne kutove od 10° i 12° . Prikazan je u tablici 2. Relativno odstupanje koeficijenta uzgona pri napadnom kutu od 8° , 10° i 12° redom iznosi 0.48 %, 1.47 % te 0.77 %. Koeficijent uzgona za veće napadne kutove nije analiziran, budući da se tada izlazi iz područja malih napadnih kutova, koje ograničava primjenu ove metode.

U literaturama [8] i [9] radi se o analizi iste Cessne u istim uvjetima, tako da se može zaključiti da ova podudaranja potvrđuju valjanost metode.

Također, bitno je istaknuti da je cijelo krilo sastavljeno kao ono na slici 18., odnosno od običnog trapeznog segmenta i segmenta s krilcem. Kut odklona krilaca postavljen je na 0° . Rezultati koeficijenta momenta valjanja, za sve napadne kutove, iznosili su u rangu 2×10^{-17} do 4×10^{-17} , što se može pripisati numeričkoj grešci i računu u MATLAB-u.

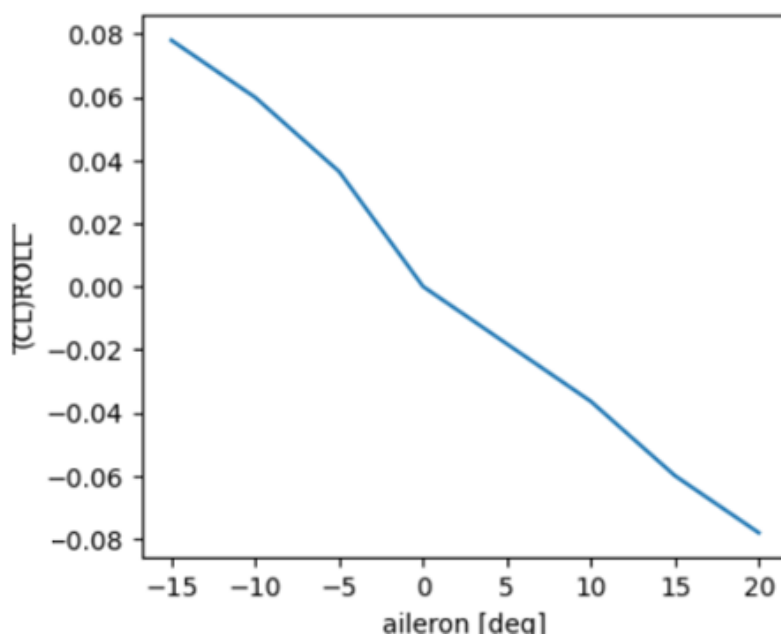
Iznosi koeficijenta uzgona te koeficijenta momenta valjanja za diferencijalni otklon krilaca od 0° i 5° pri napadnom kutu od 0° prikazan je u tablici 3, s time što je se ovaj put mreža diskretizirala s 10 panela po tetivi, a krilce je otklonjeno s predzadnjeg panela.

Tablica 3. Otklonjena konfiguracija

	$\delta=0^\circ$	$\delta=5^\circ$
C_L	0.1913	0.1913
C_l	-5.6342×10^{-19}	0.0186
C_{Di}	0.0016	0.0022

Vidljivo je da mreža još nije u potpunosti konvergirala. Koeficijent uzgona ostaje približno konstantan, s porastom koeficijenta momenta valjanja, kao što je i očekivano, uz porast otpora. Budući da je u cilju postići bolji rezultat, mrežu je potrebno finije diskretizirati, a krilca modelirati na prikazani način, s time što se otklanja više zadnjih panela za više mogućnosti.

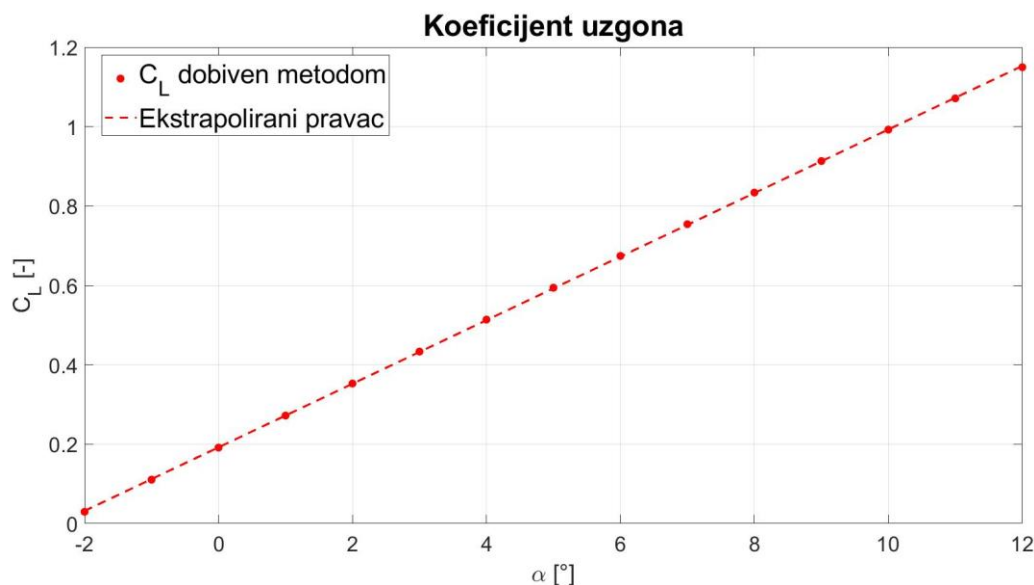
U literaturi [10] dan je dijagram koeficijenta momenta valjanja u ovisnosti o odklonu upravljačkih površina. Očitanjem s dijagrama vidi se malo odstupanje po momentu valjanja. On za 5° iznosi oko -0.02 (u kodu su suprotno definirani pozitivni i negativni momenti).



SSlika 25. Ovisnost momenta valjanja o odklonu upravljačkih površina, preuzeto iz literature [10]

5.3.1. Koeficijent uzgona krila

Na idućem dijagramu prikazana je dobivena ovisnost C_L – a o napadnom kutu α .



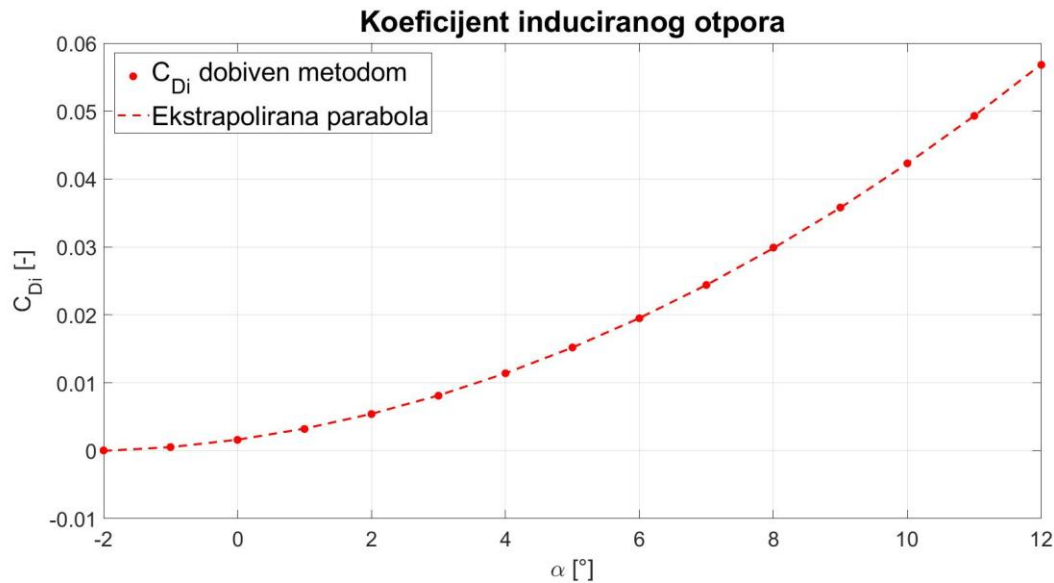
Slika 26. Koeficijent sile uzgona u ovisnosti o napadnom kutu

Sa slike 26. može se vidjeti gotovo pa linearan pomak od točke do točke. Nagib pravca koji najbolje ekstrapolira zadane C_L -ove jednak je 0.0801, odnosno vrijedi $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 0.0801$, s tim što se mora obratiti pažnja da se ovdje radi o napadnom kutu u stupnjevima, a ne radijanima. Odsječak na y osi jednak je 0.1921. To je C_L kada je napadni kut jednak nuli. Za ovako ekstrapolirani pravac, nulti napadni kut bit će jednak -2.398° , dok je prema literaturi [9] nulti napadni kut jednak -2.07° . Ova razlika ne predstavlja veliku apsolutnu razliku, no ipak čini 14.68 % relativne razlike.

Može se zaključiti da se C_L vrlo dobro ponaša u opisanim uvjetima.

5.3.2. Koeficijent inducirano otpora

Za Cessnu 172 koeficijenti inducirano otpora nisu dostupni u pretraženoj literaturi, no njihova analiza ovdje će ipak biti provedena. Pri dobivanju rezultata potrebno je paziti na fizikalni smisao rezultata.



Slika 27. Koeficijent induciranog otpora u ovisnosti o napadnom kutu

Na slici 27. vide se dobiveni inducirani otpori. Ekstrapolirani polinom drugog reda jako dobro opisuje ponašanje između točaka, što fizikalno ima smisla, budući da je poznato [1] da je

$C_{Di} = f(C_L^2)$. Nadalje, što je koeficijent uzgona bliže nultom napadnom kutu, to će i inducirani otpor biti manji, što slika 27. pokazuje. Odnosno, pri većoj brzini i većem napadnom kutu i inducirani otpor bit će veći.

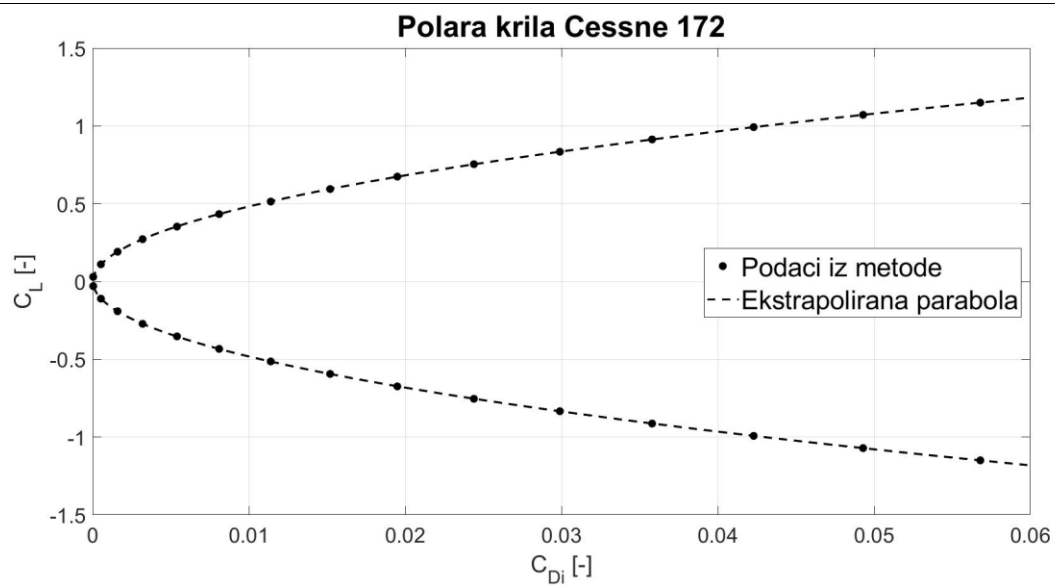
Iz svega iznesenog da se zaključiti da je rješenje u najmanju ruku fizikalno.

U sljedećoj tablici dani su inducirani otpori dok nema otklona upravljačkih površina.

Tablica 4. Vrijednosti induciranog otpora

α , [°]	-2	0	2	4	6	8	10	12
C_{Di}	4.2×10^{-5}	0.0016	0.0054	0.0114	0.0195	0.0299	0.0423	0.0568

Na kraju, još će biti prikazana funkcijska ovisnost $C_L = C_L(C_{Di})$, odnosno polara krila promatranoga aviona.



Slika 28. Polara krila Cessne 172

Ekstrapolirani polinom opisuje ponašanje točaka jednako dobro kao u prethodna dva slučaja, odnosno rješenje ima fizikalnog smisla, što se da zaključiti iz dijagrama prikazanih na slikama 26., 27. i 28.

6. ANALIZA OPTEREĆENJA KRILA

U ovom poglavlju prikazat će se i opterećenje po krilu izazvano strujanjem zraka.

Opterećenje će biti prikazano za neotklonjenu konfiguraciju te za diferencijalno otklonjene upravljačke površine, za iznose 5° i -5° . Također će biti analizirana i raspodjela koeficijenta tlaka C_P po krilu, odnosno panelima za spomenute konfiguracije.

Mreža će se ovaj put diskretizirati s 10 panela duž tetiva te po 20 panela duž svakog od dva segmenta.

6.1. Neotklonjena konfiguracija

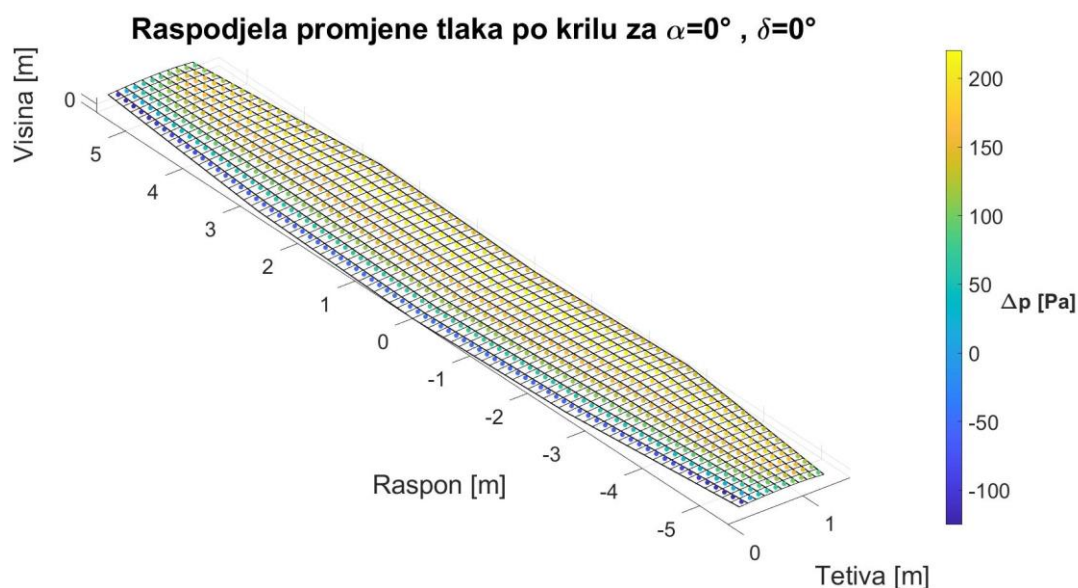
Noseća površina s neotklonjenim kontrolnim površinama prikazana je na slikama 23., odnosno 24. i ona je predmet analize ovog podpoglavlja.

Za neotklonjenu konfiguraciju pri napadnom kutu od 0 i 8° , s kojima se provodila analiza raspodjele tlaka, rezultati za koeficijente aerodinamičkih sila mogu se naći u prethodnom poglavlju.

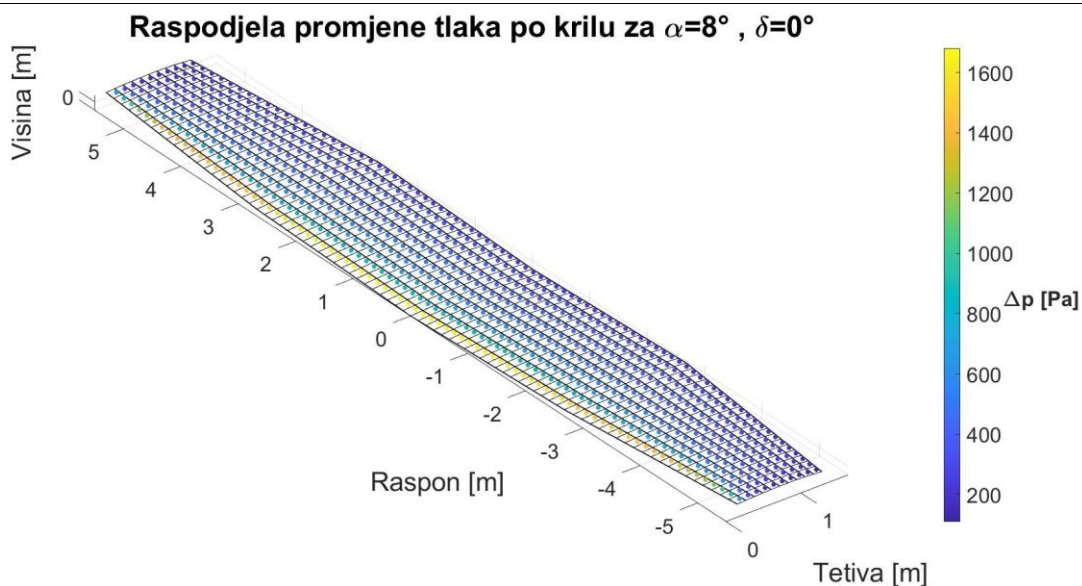
U sljedećim podpoglavljima prikazat će se i analizirati raspodjela tlaka po panelima, odnosno u kontrolnim točkama svakog panela.

6.1.1. Raspodjela tlaka

Prikaz opterećenja po krilu od posebnog je interesa za daljnju analizu. Aerodinamičko opterećenje jako je značajno pri proračunavanju konstrukcije krila, a ova metoda daje uvid u njegovu detaljnu raspodjelu po krilu.



Slika 29. Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ po krilu s neotklonjenim upravljačkim površinama bez napadnog kuta



Slika 30. Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ po krilu s neotklonjenim upravljачkim površinama pri napadnom kutu

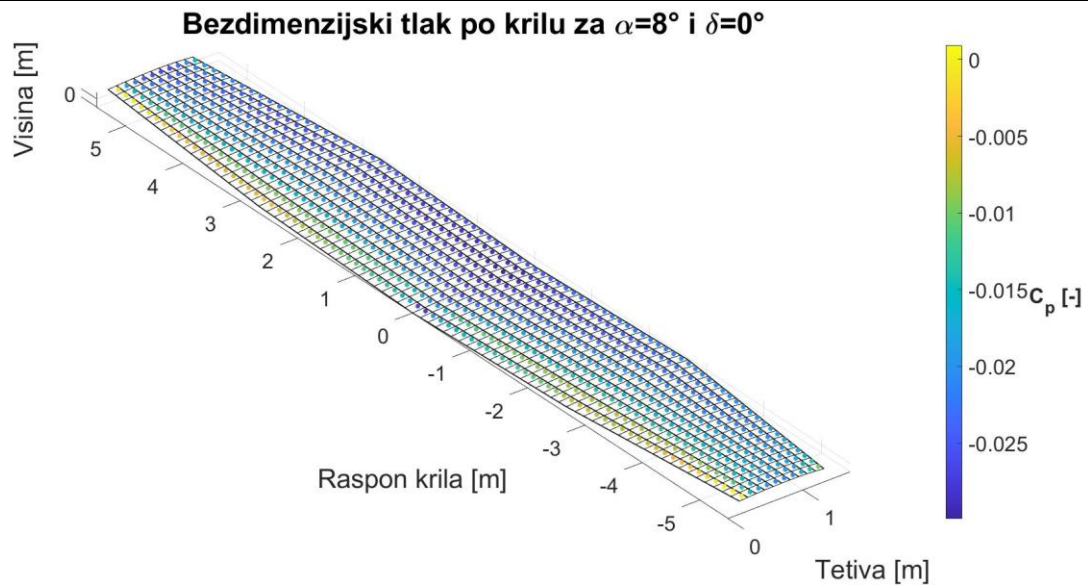
Kao što se može vidjeti na slikama 29. i 30., najveći je prirast tlaka na napadnom rubu, gdje se nalazi zaustavna točka i vladaju totalne veličine stanja.

Cijela matrica koja u sebi sadrži promjene tlakova u svim kontrolnim točkama zapisana je u jednadžbi (3.17).

Bitno je uočiti utjecaj napadnog kuta na tok struje zraka preko krila. Veći napadni kut kao posljedicu ima glađe, brže strujanje koje rezultira i manjim tlakom. Dakle, tlak najvišu vrijednost ima na početku krila i pada kako struja putuje tetivom. Slijedi prikaz raspodjele tlaka po krilu u bezdimenzijskom obliku, odnosno kao koeficijent tlaka:



Slika 31. Raspodjela koeficijenta tlaka po krilu s neotklonjenim upravljачkim površinama bez napadnog kuta

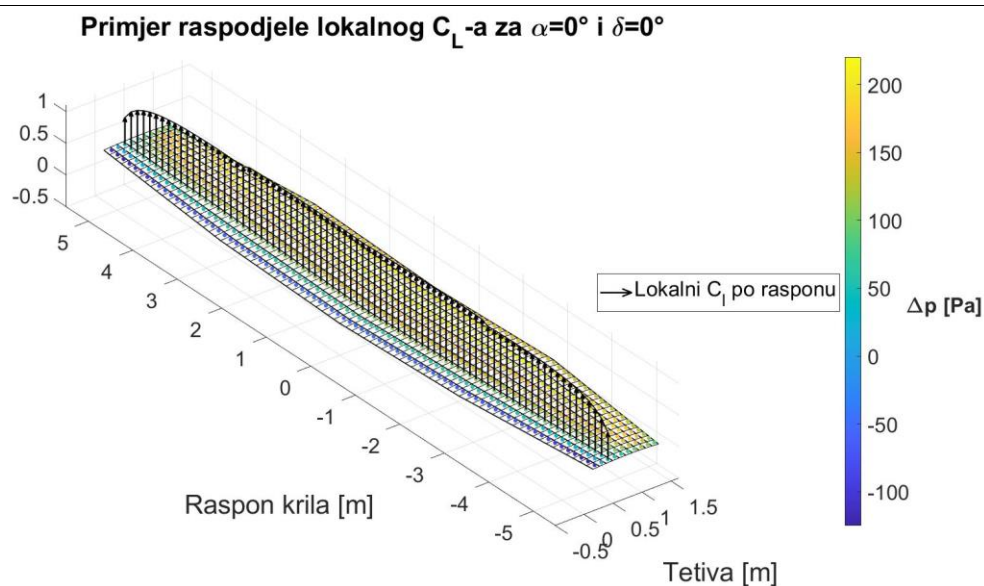


Slika 32. Raspodjela koeficijenta tlaka po krilu s neotklonjenim upravljajčkim površinama pri napadnom kutu

Očito je da pri napadnom kutu dolazi do porasta brzine preko krila, dok pri opstrujavanju krila bez napadnog kuta nema značajnog porasta brzine. U tom slučaju dolazi do malog usporavanja brzine pri izlazu struje s krila, odnosno porastu tlaka.

6.1.2. Lokalni uzgon

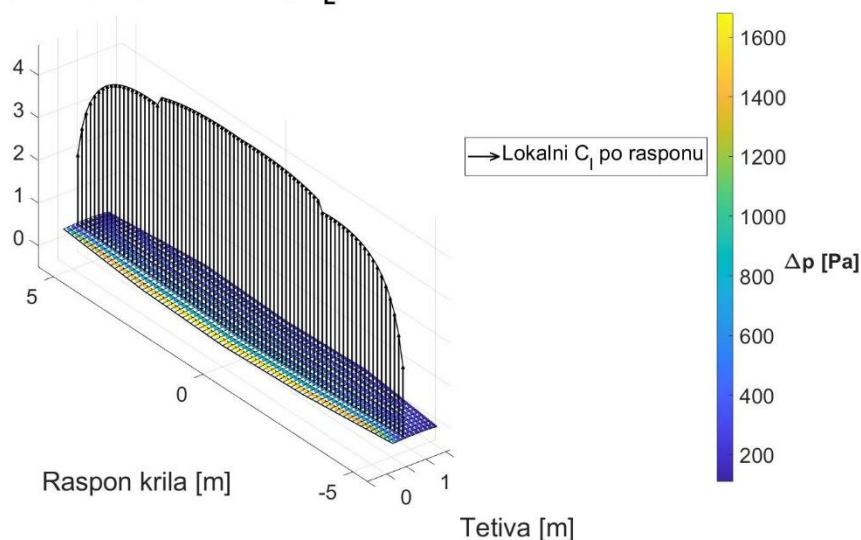
Uvid u aerodinamičko opterećenje daje i raspodjela uzgona po krilu kao posljedica promjene tlaka. Što je veća promjena tlaka, veći je i uzgon te i samo aerodinamičko opterećenje konstrukcije. Ovim prikazom lakše je predvidjeti mjesta na kojima se javlja najveće opterećenje. Ovakva vrsta prikaza također je vrlo pogodna za daljnji proračun čvrstoće konstrukcije krila.



Slika 33. Lokalni koeficijent uzgona za krilo s neotklonjenim upravljačkim površinama bez napadnog kuta

Slika 33. prikazuje raspodjelu lokalnog koeficijenta uzgona po razmahu krila. Vidljivo je da je lokalni koeficijent uzgona uvijek veći od nule za promatrani slučaj. Simetričan je s obzirom na ravninu simetrije krila, kao što je bilo i za očekivati. Budući da nema krilaca ili neke druge upravljačke površine koja bi ga smanjila, on je veći od nule po cijelom presjeku krila.

Primjer raspodjele lokalnog C_L -a za $\alpha=8^\circ$ i $\delta=0^\circ$



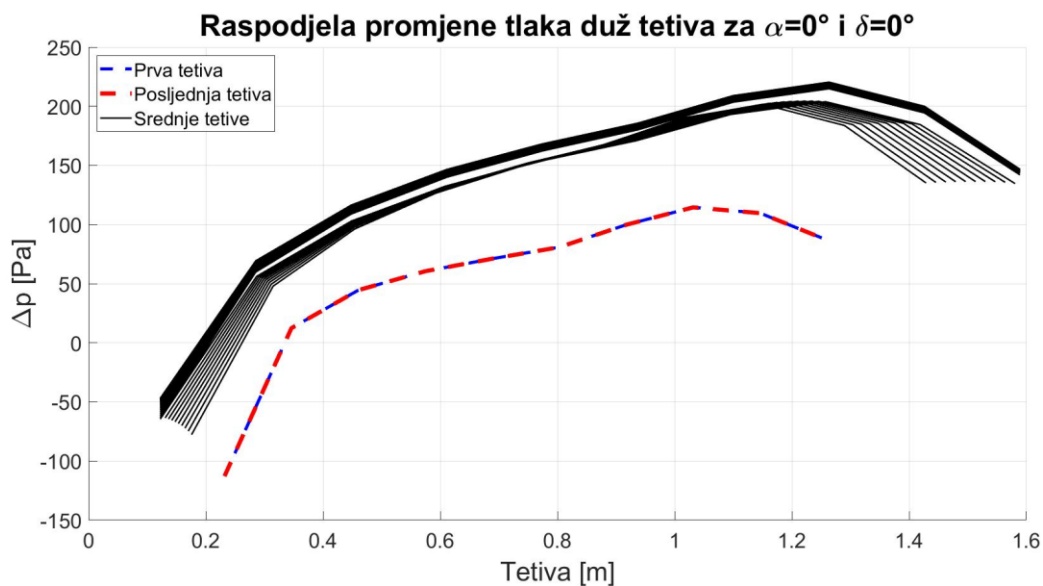
Slika 34. Lokalni koeficijent uzgona za krilo pod napadnim kutom

Jače izražen koeficijent uzgona dobije se kod krila pod napadnim kutom. Koeficijent uzgona na slici 34. također je simetričan s obzirom na ravninu xz. Na slikama 33. i 34. vidljivo je da je pad tlaka na gornjaci najveći, odnosno struja ima veći prirast brzine upravo zbog napadnog kuta, koji omogućuje glađe nastrojavanje na profil.

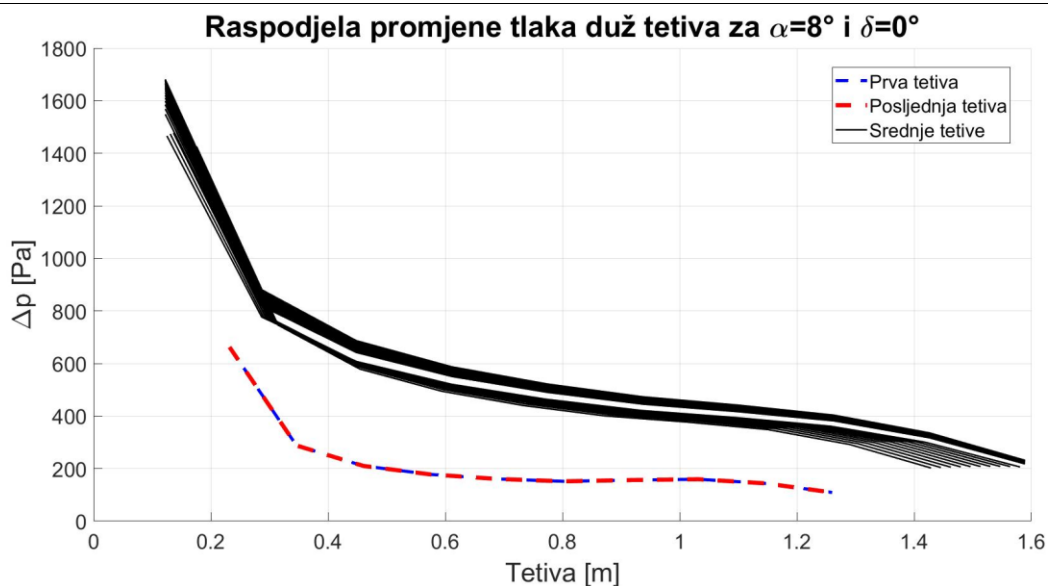
Važno je uočiti diskontinuitet na prijelazu geometrija noseće površine. U oba slučaja ovaj diskontinuitet dovodi do smanjenja lokalnog koeficijenta uzgona. Struja zraka odjednom nailazi na površinu manju nego prije, što automatski smanjuje lokalni koeficijent uzgona.

6.1.3. Podjela tlaka po tetivama

Također kao parametar pri analizi opterećenja može poslužiti i analiza raspodjele tlaka po tetivama. Očekivano je da će najviše opterećena mjesta biti ona gdje je najviši koeficijent uzgona. Također se može vidjeti i utjecaj napadnog kuta na oblik raspodjele tlaka po krilu. Ova analiza ekvivalentna je analizi prikazanoj u poglavlju 6.1.2. Rezultati jedne mogu se naslutiti i zaključiti na osnovi rezultata druge analize, budući da se kod obje radi o prikazu aerodinamičkih opterećenja. Utjecaj napadnog kuta vidi se u tome što brzina puno glađe nastrojava na krilo te je puno manji gubitak ukupne energije uslijed udara struje na napadni rub krila.



Slika 35. Raspodjela promjene tlaka duž tetiva neotklonjene konfiguracije bez napadnog kuta



Slika 36. Promjena tlaka duž tetiva neotklonjene konfiguracije pod napadnim kutom

Analogno slikama 33. i 34., ovdje tlak prati isti trend. Najveća promjena tlaka je na napadnom rubu, gdje udara u profil (odnosno napadni rub). Vidljivo je da napadni kut puno pomaže pri ostvarivanju brzine i pada tlaka, odnosno na slici 36. se vidi kako tlak, to jest njegova promjena pada po tetivama, što prati fizikalnu sliku strujanja duž tetive.

Važno je uočiti kako se uslijed napadnog kuta gubitak energije dogodi pri udaru na rub, dok pri nastrujavanju bez napadnog kuta gubitak energije svoj maksimum ima unutar područja krila.

Također, zbog simetrije krila i simetrije strujanja, raspodjela tlaka je također simetrična, Na slikama 35. i 36. poklapaju se prva i zadnja tetiva, zbog čega ih je teško razaznati. Odnosno, raspodjela promjene tlaka je također simetrična te prati lokalni koeficijent uzgona. Raste od prve do srednje tetive te pada istim putem nazad do zadnje tetive. Isto vrijedi za oba napadna kuta.

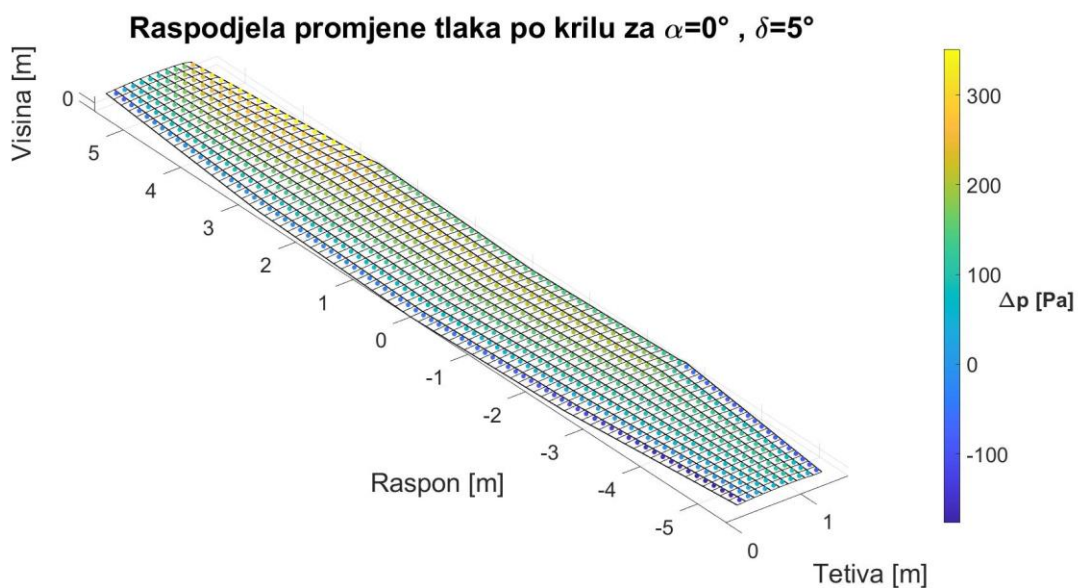
6.2. Otklonjena konfiguracija

Dalje će se provesti analiza istog krila, ali s otklonom upravljačkih površina. Budući da upravljačke površine mijenjaju sliku strujanja oko cijeloga krila, one su od posebnog interesa za aerodinamičke proračune. Njihovim otklonom cilj je povećati/smanjiti silu uzgona, što znači da se dodatno povećava aerodinamičko opterećenje konstrukcije krila.

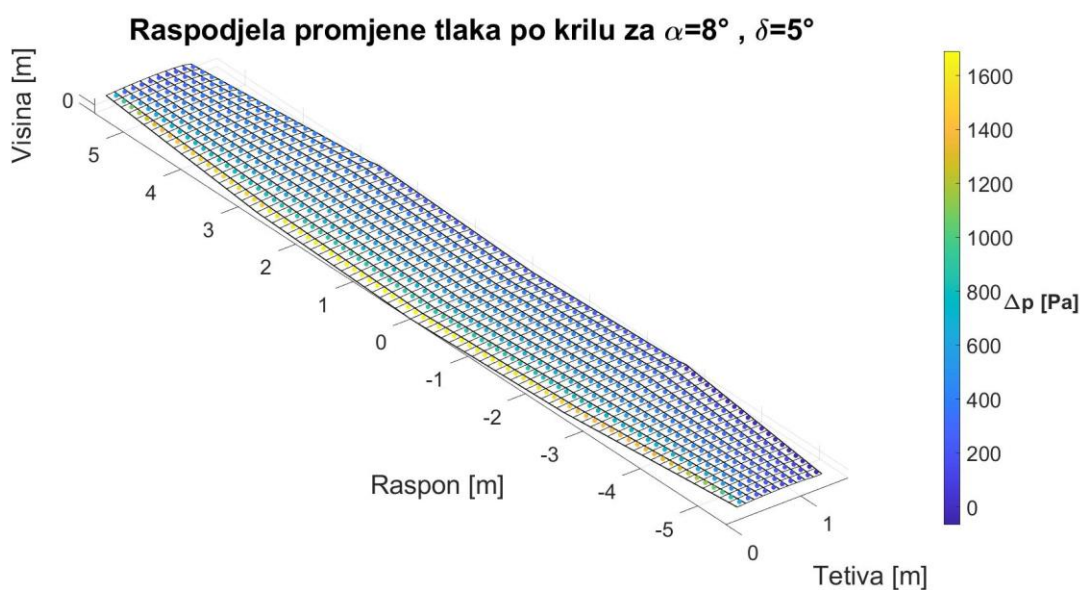
Analiza je provedena za napadne kutove od 0 i 8 °, ovaj put s diferencijalno otklonjenim kontrolnim površinama s kutom otklona u iznosu od 5°.

6.2.1. Raspodjela tlaka

I mali otkloni upravljačkih površina mijenjaju opterećenje po krilu, kao što će biti prikazano. Zato je jako bitno da upravljačke i noseće površine, uz aerodinamičke kriterije, zadovoljavaju i konstrukcijske kriterije.



Slika 37. Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta



Slika 38. Raspodjela promjene tlaka $\Delta p_{i,j}$ otklonjene konfiguracije pri napadnom kutu

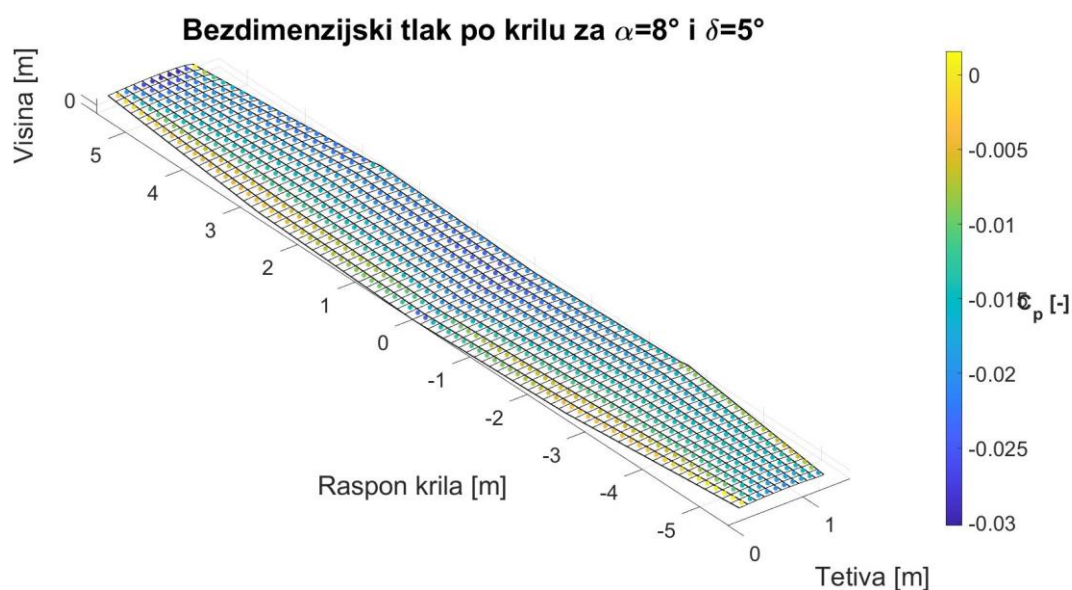
Na slici 37. vidi se slično ponašanje tlaka kao na nosećoj površini bez otklona, s jednom iznimkom na kraju. Naime, kad struja zraka nailazi na kontrolnu površinu otklonjenu prema dolje, ona prati tu zakrivljenost te se savija prema dolje, ubrzavajući. Analogno tomu, struja zraka s lijeve strane nailazi na prepreku i povećava joj se tlak. Zbog toga dolazi do usporavanja

struje zraka, a usporavanje struje zraka rezultira povećanjem tlaka zraka. Ova promjena tlakova posljedično za sobom vuče promjenu sile uzgona, istog predznaka kao i promjena tlaka.

Kao dodatnu usporedbu, priložit će se i bezdimenzijski koeficijent tlaka.



Slika 39. Bezdimenzijski tlak za noseću površinu otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta

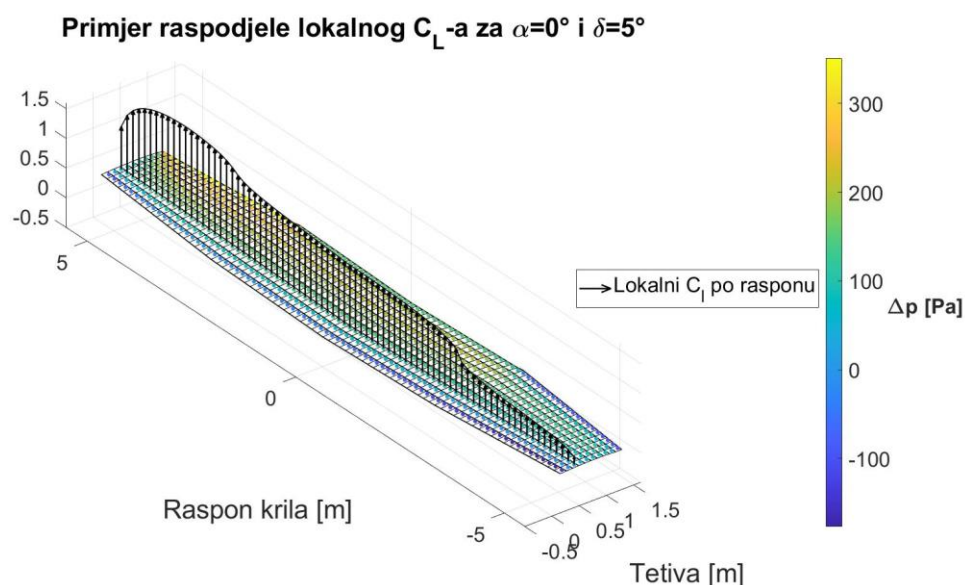


Slika 40. Bezdimenzijski tlak za noseću površinu otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom

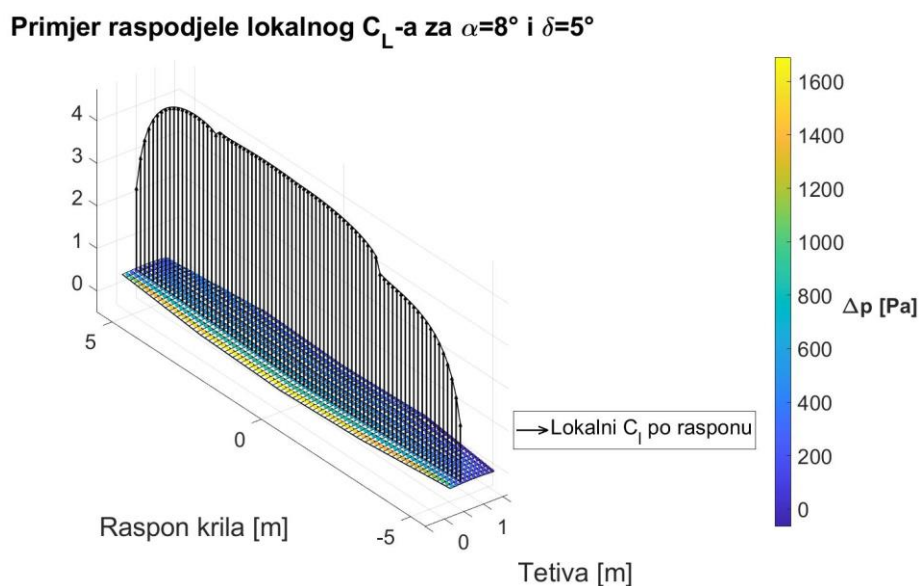
Na slici 39. vidljiv je blagi porast koeficijenta uzgona, a noseća površina pod napadnim kutom, koja je prikazana na slici 40. za sebe veže kontinuirani pad tlaka duž krila, izuzev mjesta na kojemu je upravljačka površina otklonjena prema gore.

6.2.2. Lokalni uzgon

Kao što je rečeno, otklon kontrolnih površina mijenja sliku strujanja. U nekim slučajevima, to pak rasterećuje konstrukciju (tlak na mjestima raste i smanjuje mogući uzgon), a na nekima ima suprotni učinak, sve u ovisnosti o otklonu kontrolne površine.



Slika 41. Raspodjela lokalnog koeficijenta uzgona otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta



Slika 42. Raspodjela lokalnog uzgona otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom

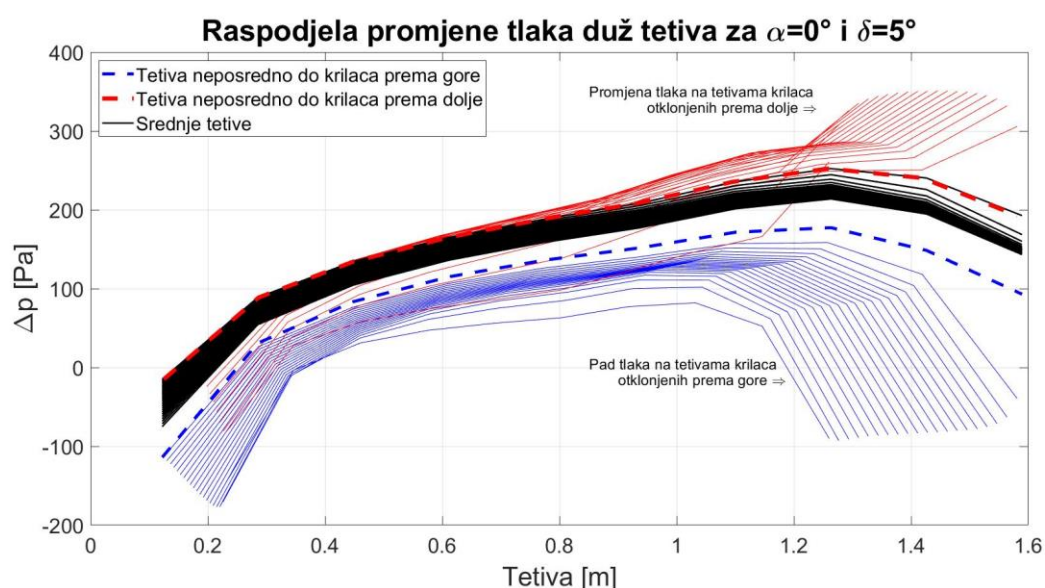
Lokalni koeficijenti uzgona više nisu simetrični. Slike 41. i 42. pokazuju raspodjelu lokalnog uzgona po razmahu krila. Na slici 41. vidljiv je utjecaj krilaca više nego na 42. Ovaj utjecaj smanjuje uzgon na mjestu djelovanja skoro na nulu. Tu se govori o rasterećenju konstrukcije. Na drugom kraju krila dolazi do povećanja uzgona. To jest, uzgon je preraspodijeljen s jednoga na drugi kraj krila, zbog čega dolazi do pojave momenta valjanja krila. Ipak, na slici 42. jači je

utjecaj napadnog kuta negoli smanjenja uzgona. Odnosno, uzgon je relativno smanjen puno manje negoli u slučaju kada se radi o strujanju bez napadnog kuta.

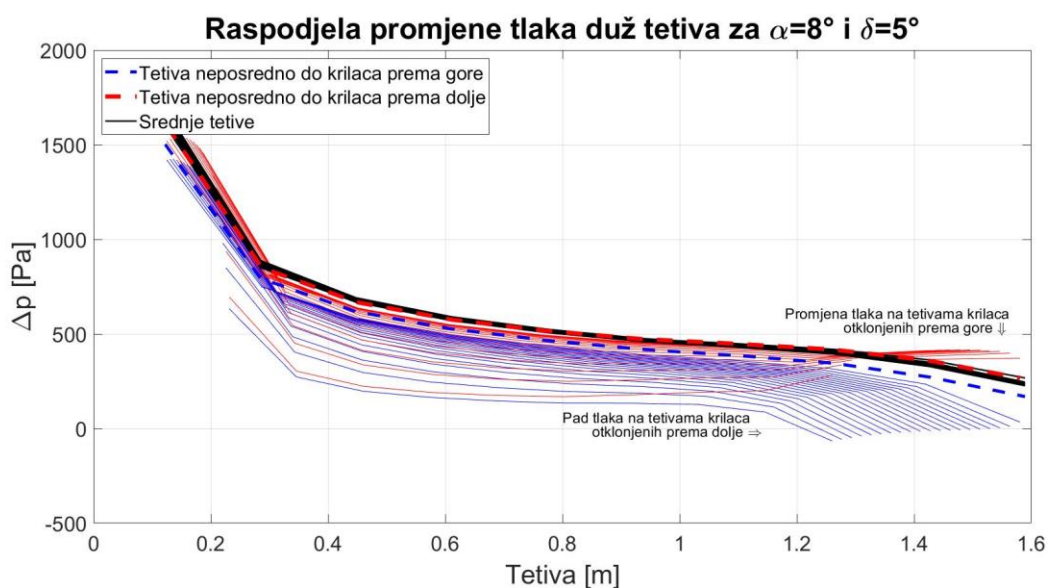
Ovdje je također izražen prijelaz između dva segmenta krila. I ovdje dolazi do pada lokalnog koeficijenta uzgona na mjestu promjene geometrije noseće površine.

6.2.3. Raspodjela tlaka po tetivama

Kod otklona kontrolnih površina, pojavit će se i nešto drugačija raspodjela tlaka duž tetiva upravo zbog promjene tlaka na kontrolnim površinama, kao što se i pokazalo u poglavlju 6.2.2. Zbog toga, rezultati se već naziru. Ovdje će se opet pokazati da raspodjela tlaka više nije ista na tetivama koje se nalaze na suprotnim krajevima krila.



Slika 43. Raspodjela promjene tlaka duž tetiva otklonjene konfiguracije bez napadnog kuta



Slika 44. Raspodjela promjene tlaka duž tetiva otklonjene konfiguracije pod napadnim kutom

Na slikama 43. i 44. plavom i crvenom neisprekidanom tankom linijom označena je promjena tlaka na svim tetivama kontrolnih površina. Na slici 43. puno je vidljiviji utjecaj kontrolnih površina negoli na slici 44. Iako zrak nastrujava lakše na krilo i gubi manje energije, to znači da ima i manje vremena da se ubrza na krilcu. Ipak, tlak na krilcima pri napadnom kutu je već dovoljno mali, što osigurava veći lokalni uzgon. Također, ova mala razlika je relativna. Zato je ona puno manje primjetna kod većeg napadnog kuta, tu je već jako veliki tlak, odnosno uzgon.

7. ZAKLJUČAK

Nakon što se metoda vrtložne rešetke implementirala u programski paket MATLAB, validirana je te se pomoću nje provela analiza odabranoga krila. Rezultati analize poklapali su se s dostupnim eksperimentalnim podacima i analitičkim izračunima.

U radu je napravljeno sljedeće:

- Dan je kratak teorijski osvrt na matematičku formulaciju i iskazivanje zakona koji su kasnije korišteni kako bi se metoda što jednostavnije, ali točnije mogla implementirati. Uvedene su polazne pretpostavke pri formulaciji metode, kao i ograničenja korištenja metode.
- Prikazane su neke jednostavnije numeričke metode te njihovi nedostaci koji se otklanjaju primjenom metode vrtložne rešetke.
- Opisana je sama metoda te način na koji je prilagođena tako da se može primijeniti u MATLAB – u. U radu su bile i priložene neke napravljene funkcije koje su korištene u izradi.
- Detaljno je opisan postupak stvaranje geometrije, počevši od jednog segmenta sa simetričnim aeroprofilom, a zatim i sa zakrivljenom srednjom linijom. Segmenti se dalje mogu slagati jedan na drugoga kako bi se dobilo krilo željene geometrije. Također je prikazan i način modeliranja kontrolnih površina, koje su uvedene kao deformacija dijela mreže panela. U ovome poglavlju pokazan je i način slaganja ulaznih parametara koji ulaze u izračun opisan u trećem poglavlju.
- Metoda je zatim validirana i definirano je odabrano krilo na kojemu se provela daljnja analiza. Iz krila su izvučeni potrebni ulazni podaci za metodu. Provedena je analiza aerodinamičkih koeficijenata, koji su se poklapali s eksperimentalnim i onima dostupnima u literaturi. Uz aerodinamičke koeficijente, analizirana je i raspodjela tlaka po krilu uslijed strujanja te je prikazana raspodjela tlaka po krilu bez otklonjenih upravljačkih površina i potom s otklonom istih. Rezultati su prikazani na način prikladan za daljnji proračun čvrstoće konstrukcije krila.

U ovome radu pružen je detaljan uvid u metodu vrtložne rešetke, njezino formuliranje i implementaciju u programskome paketu MATLAB. Metoda je verificirana te daje zadovoljavajuće rezultate, kako za aerodinamičke koeficijente, tako i za daljnji proračun čvrstoće.

S ciljem povećanja točnosti upravljačke površine treba podijeliti na više panela, odnosno one trebaju uzimati više zadnjih panela. Utjecaj problema preklapanja točke kontrolne površine i segmenta do može se umanjiti boljom diskretizacijom segmenta koji se nalazi pokraj kontrolne površine.

Unatoč svim uvedenim pojednostavljenjima, metoda daje zadovoljavajuće rezultate te svoju primjenu može pronaći kao preliminarni proračun za čvrstoću konstrukcija. Također, može pomoći i pri preliminarnom određivanju aerodinamičkih koeficijenata.

LITERATURA

- [1] Janković, S., Vrdoljak, M.: Performanse zrakoplova, skripta, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [2] Janković, S., Vrdoljak, M., Virag, Z.: Aerodinamika 1, skripta, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [3] Katz, J., Plotkin, A.: Low-speed aerodynamics, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Anderson, Jr. J. D.: Fundamentals of aerodynamics, Sixth edition, McGraw-Hill, 2017.
- [5] Andrić, M.: Prošireni nestacionarni model aerodinamičke interferencije leta u formaciji, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2023.
- [6] Mačak, J.: Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu jednostavne geometrije, Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [7] Selig, M.: UIUC Airfoil Coordinates,
https://mselig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html, posjećeno: veljača 2025.
- [8] Bašak, H., Akdemir, A.: Design Optimization of Cessna 172 Wing With Biomimetic Design Approach, Research Article, 2024.
- [9] Mousa, N. A., Attia, O. H. Attia, Mahmood, H. A., Nor Mariah, A.: Optimization Efficiency of the Aircraft Wing of Cessna 172 Skyhawk by Absorbent Adverse Pressure Using Tangential Suction Slot Without Vacuum Device, 2022.
- [10] Analyzing Cessna 172 using DATCOM <https://cookierobotics.com/085/> , posjećeno: veljača 2025.
- [11] Gudmundsson, S.: General Aviation Aircraft Design, Applied Methods and Procedures, *Butterworth – Heinemann*, 2022.