

# Proračun čvrstoće vertikalnog silosa za cement

---

Čanadija, Noa

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:997887>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Noa Čanadija

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Noa Čanađija

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Skozritu na izdvojenom vremenu za usmjeravanje i asistiranje prilikom moje izrade završnog rada.

Također se zahvaljujem prijateljima i kolegama s fakulteta za puno pomoći i lijepih trenutaka prilikom studiranja, a najviše se zahvaljujem svojoj obitelji, posebice roditeljima, na iznimnoj potpori, ustrajanju i autoritetu prilikom mog školovanja.

Noa Čanađija



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Noa Čanađija**

JMBAG: **0035224913**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun čvrstoće vertikalnog silosa za cement**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Strength calculation of a vertical cement silo**

Opis zadatka:

Silosi su vertikalni spremnici koji se koriste za skladištenje raznih rastresitih materijala. U osnovi su sastavljeni od jednog ili više uspravno postavljenih cjevastih segmenata, najčešće su kružnog, ali mogu biti i četverokutnog, šestokutnog ili osmerokutnog presjeka. Gotovo uvijek imaju dno u obliku lijevka s vratima za pražnjenje silosa tj. utovar materijala na vozila.

Koristeći zadane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima vertikalnog spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće, tj. izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom proračunskog paketa koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristite dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Datum predaje rada:

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.  
2. rok: 10. i 11. 7. 2025.  
3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.  
2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.  
3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

*Ivica Skozrit*

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*V. Soldo*

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Upravljanje cementnim silosom.....	2
1.2. Održavanje silosa .....	2
1.3. Cement .....	2
1.4. Opis problema .....	3
1.5. Određivanje dimenzija silosa s obzirom na način protoka materijala.....	3
2. METODA KONAČNIH ELEMENATA .....	5
2.1. Programski paket Abaqus .....	5
2.2. Konačni elementi .....	6
2.2.1. Ljuskasti konačni elementi .....	6
2.2.2. Elementi za analizu 3D problema .....	6
3. VERIFIKACIJA .....	8
3.1. Cilindrični spremnik .....	8
3.1.1. Analitičko rješenje .....	9
3.1.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata .....	12
3.2. Posuda .....	21
3.2.1. Analitičko rješenje .....	22
3.2.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata .....	31
4. VERTIKALNI SILOS ZA CEMENT .....	35
4.1. Analitičko rješenje silosa .....	35
4.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata .....	44
4.3. Usporedba analitičkih i grafičkih rješenja cilindra .....	47
4.4. Usporedba analitičkih i grafičkih rješenja konusa .....	48
5. ZAKLJUČAK.....	50
LITERATURA.....	51

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Silos [7] .....	1
Slika 2.	Ulazni parametri geometrije silosa [8] .....	4
Slika 3.	Prikaz tipova konačnih ljuskastih elemenata [5] .....	7
Slika 4.	Često korišteni 3D elementi: a) heksaedarski element prvog reda, b) heksaedarski element drugog reda, c) tetraedarski element drugog reda [5] .....	7
Slika 5.	Uspravni cilindrični spremnik .....	8
Slika 6.	Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sile i momenta .....	10
Slika 7.	Dijagram raspodjele radijalnog pomaka po visini ljuske .....	11
Slika 8.	Rubni uvjeti i opterećenje modela cilindra .....	12
Slika 9.	Prikaz mreže konačnih elemenata s četverokutnim ljuskastim elementima .....	13
Slika 10.	Prikaz radijalnog pomaka cilindra .....	13
Slika 11.	Prikaz naprezanja cilindra prema von Mises-u .....	14
Slika 12.	Konvergencija ljuskastih konačnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku .....	15
Slika 13.	Usporedba radijalnog pomaka po visini ljuske .....	15
Slika 14.	Konvergencija 3D konačnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku .....	16
Slika 15.	Prikaz radijalnog pomaka C3D20R, C3D15 i C3D8R elemenata po visini ljuske .....	17
Slika 16.	Prikaz osnosimetričnog modela s rubnim uvjetima i opterećenjem .....	18
Slika 17.	Prikaz mreže konačnih elemenata s osnosimetričnim ljuskastim elementima .....	18
Slika 18.	Prikaz radijalnog pomaka cilindra kreiranog pomoću osnosimetričnih konačnih elemenata .....	19
Slika 19.	Prikaz naprezanja cilindra prema von Mises-u kreiranog pomoću osnosimetričnih konačnih elemenata .....	19
Slika 20.	Konvergencija osnosimetričnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku .....	20
Slika 21.	Prikaz radijalnog pomaka CAX4R i CAX8R elemenata po visini ljuske .....	20
Slika 22.	Posuda opterećena unutarnjim tlakom [9] .....	21
Slika 23.	Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sila i momenata dijelova posude .....	22
Slika 24.	Redukcija vanjskog opterećenja na $Fr$ i $Mt$ .....	24
Slika 25.	Konusna ljuska .....	26
Slika 26.	Radijalni pomak duž meridijana cilindrične ljuske .....	30
Slika 27.	Kut zakreta cilindrične ljuske .....	31
Slika 28.	Model posude s rubnim uvjetima i opterećenjem .....	32
Slika 29.	Prikaz mreže konačnih elemenata modela posude .....	33
Slika 30.	Prikaz radijalnog pomaka posude .....	33
Slika 31.	Prikaz naprezanja posude prema von Mises-u .....	34
Slika 32.	Dijagramski prikaz radijalnog pomaka .....	34
Slika 33.	Skica silosa .....	35
Slika 34.	Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sila i momenata dijelova silosa .....	36
Slika 35.	Redukcija vanjskog opterećenja prstena .....	39
Slika 36.	Konusna ljuska silosa .....	41
Slika 37.	Prikaz pojednostavljenog silosa s rubnim uvjetima i opterećenjem .....	45
Slika 38.	Prikaz mreže konačnih elemenata .....	45
Slika 39.	Prikaz raspodjele naprezanja po von Mises-u u Paskalima .....	46
Slika 40.	Prikaz raspodjele radijalnog pomaka silosa u metrima .....	46
Slika 41.	Dijagramski prikaz usporedbe rezultata radijalnog pomaka po visini cilindra .....	47
Slika 42.	Dijagramski prikaz usporedbe rezultata kuta zakreta po visini cilindra .....	47

---

Slika 43.	Dijagramski prikaz usporedbe rezultata radijalnog pomaka po koordinati $s$ konusa .....	48
Slika 44.	Dijagramski prikaz usporedbe rezultata kuta zakreta po koordinati $s$ konusa .....	49



---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Osnovni parametri silosa ..... 4

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$a$	m	Širina poprečnog presjeka prstena
$a'$	m	Udaljenost između glavne i pomoćne radijalne osi prstena
$b$	m	Visina poprečnog presjeka prstena
$C_s$	kg	Kapacitet silosa
$D_c$	Nm	Fleksijska krutost cilindra
$D^k$	Nm	Fleksijska krutost konusa
$E$	N/m <sup>2</sup>	Modul elastičnosti
$F_x$	N	Sila u smjeru osi $x$
$F_r$	N/m	Redukcijska sila
$G$	N	Težina tereta
$H$	m	Visina ljuske
$h$	m	Debljina ljuske
$J_1$	m	Prva glavna karakteristika prstena
$J_1'$	m	Prva pomoćna karakteristika prstena
$J_2$	m <sup>2</sup>	Druga glavna karakteristika prstena
$J_2'$	m <sup>2</sup>	Druga pomoćna karakteristika prstena
$J_3$	m <sup>3</sup>	Treća glavna karakteristika prstena
$J_3'$	m <sup>3</sup>	Treća pomoćna karakteristika prstena
$L_c$	m	Visina cilindra silosa
$L_k^d$	m	Visina donjeg konusa silosa
$L_k^g$	m	Visina gornjeg konusa silosa
$L_{p,max}$	m	Maksimalna visina punjenja silosa
$l, l_1, l_2$	m	Duljine
$M$	Nm	Moment savijanja
$M_0$	Nm/m	Unutarnji moment
$M_t$	Nm/m	Moment torzije
$N$	N	Normalna sila
$N_x, N_\varphi, N_g$	N/m	Membranske sile
$p, p_1, p_2$	N/m <sup>2</sup>	Tlakovi
$p_h$	N/m <sup>2</sup>	Hidrostatski tlak
$Q_0$	N/m	Unutarnja sila
$Q_r^k$	N/m	Membranska poprečna sila kod konusa
$R$	m	Radijus ljuske
$R_g$	m	Radijus na vrhu silosa
$R_i$	m	Radijus otvora za ispust tvari na silosu
$r$	m	Radijus ljuske na proizvoljnom mjestu
$r_1$	m	Meridijanski glavni radijus

---

$r_2$	m	Cirkularni glavni radijus
$s$	m	Koordinata u smjeru konusne ljuske
$u_r$	m	Radijalni pomak
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen tereta
$w$	m	Radijalni pomak
$w_c$	m	Radijalni pomak cilindra
$w_k$	m	Radijalni pomak konusa
$w_c^m$	m	Membranski pomak cilindra
$w_k^m$	m	Membranski pomak konusa
$w_c^f$	m	Fleksijski pomak cilindra
$w_k^f$	m	Fleksijski pomak konusa
$\alpha$	rad	Kut zakreta
$\alpha_{11}$	m <sup>2</sup> /N	Uplivni koeficijent
$\alpha_{22}$	m/N	Uplivni koeficijent
$\alpha_{33}$	N <sup>-1</sup>	Uplivni koeficijent
$\alpha_c$	rad	Kut zakreta cilindra
$\alpha_k$	rad	Kut zakreta konusa
$\alpha_c^f$	rad	Fleksijski kut zakreta cilindra
$\alpha_k^f$	rad	Fleksijski kut zakreta konusa
$\alpha_c^m$	rad	Membranski kut zakreta cilindra
$\alpha_k^m$	rad	Membranski kut zakreta konusa
$\beta$	m <sup>-1</sup>	Geometrijsko materijalna značajka ljuske
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\vartheta$	°	Kut konusne ljuske
$\vartheta_{gr}$	°	Granični kut konusne ljuske

**SAŽETAK**

Glavni cilj ovoga rada je provesti numerički proračun vertikalnog silosa za cement koji je svojom konstrukcijom i dimenzijama praktički identičan realnom silosu.

U prvom poglavlju općenito se opisuju silosi i procesi koji se odvijaju u njima te se deklarira problem koji je potrebno riješiti. Prikazan je način na koji su se odredile dimenzije silosa s obzirom na način protoka materijala pri ispuštanju iz silosa.

Zatim se objašnjava primjena metode konačnih elemenata te se opisuju konkretni elementi koji su se koristili pri analizi.

Prikazani su verifikacijski primjeri koji su poslužili kao jednostavniji primjeri za rješavanje problematike silosa kako bi se utvrdila ispravnost elemenata potrebnih za analizu samoga silosa.

U četvrtom poglavlju proveden je analitički proračun pojednostavljenog silosa te su rezultati uspoređeni s rezultatima koji su se dobili numeričkim putem. Na kraju se provodi analiza silosa s konstrukcijom koja je bliska realnoj te se daju rezultati analize i uspoređuju s rezultatima koji su se dobili kod pojednostavljenog silosa.

Ključne riječi: vertikalni silos, cement, metoda konačnih elemenata, numerički proračun, analitički proračun

---

**SUMMARY**

The main goal of this thesis is to carry out a numerical calculation of the vertical cement storage silo, which is, by its dimensions and construction, practically identical to a real silo.

In the first chapter, silos and processes that take place in silos are explained as well as the problem that needs to be solved. The method by which the silo dimensions were determined, with respect to the manner of material flow during silo discharge, is shown.

In addition, the finite element method as well as the elements that were used in analysis of this thesis are explained.

Verification examples that were used as simple examples for silo problematics solving are shown in order to determine correctness of the elements required for silo analysis.

In the fourth chapter, an analytical calculation of the simplified silo was performed and the results were compared with the results obtained by numerical method. Finally, an analysis of the silo with construction similar to the real silo is performed and the results of the analysis, as well as the results comparison with the simplified silo, are shown.

Key words: vertical silo, cement, Finite Element Method, numerical calculation, analytical calculation

## 1. UVOD

Silos je visoka građevina, naspram svoje relativno male širine, koja služi za skladištenje žitarica, cementa i drugih rastresitih tvari. Ovisno o potrebi, može biti izgrađen od čelika, betona (armiranog ili prednapregnutog), drva ili polimera. Silosi su u osnovi sastavljeni od jednog ili više uspravnih cjevastih spremnika najčešće kružnog, a rjeđe mogu biti i četverokutnog, šesterokutnog ili osmerokutnog presjeka. Gotovo uvijek imaju dno u obliku lijevka s vratima za pražnjenje tj. za utovar materijala u vozila. Punjenje silosa se vrši odozgo te može biti mehaničko ili pneumatsko. Radi automatizacije punjenja i pražnjenja, silosi su često opskrbljeni različitim uređajima: elevatorima, transporterima, pneumatskim crpkama i slično.

Silosi, s obzirom na klase pouzdanosti te ovisno o pouzdanosti konstrukcije i različitim utjecajima otkazivanja konstrukcije, dijele se na [6]:

- klasa pouzdanosti 1 (silosi kapaciteta manjeg od 100 tona),
- klasa pouzdanosti 2 (svi silosi iz standarda koji nisu svrstani u druge klase),
- klasa pouzdanosti 3 (silosi sa kapacitetom većim od 10000 tona i silosi sa kapacitetom većim od 1000 tona kod kojih se pojavljuje ekscentrično pražnjenje s omjerom  $e_0/d_c$  ( $e_0$  predstavlja ekscentričnost izlaznog otvora, dok  $d_c$  promjer cilindričnog dijela silosa)  $> 0,25$  i zdepasti silos s ekscentricitetom gornje plohe  $e_v/d_c$  ( $e_t$  predstavlja ekscentričnost središta gornje površine materijala u slučaju kad je silos pun)  $> 0,25$ ).

Na slici 1. prikazana su tri silosa za pohranu cementa marke *Elkon*<sup>®</sup>.



Slika 1. Silos [7]

## **1.1. Upravljanje cementnim silosom**

Procedure uključene u rad silosa za cement su uglavnom vezane za sistematsko punjenje i pražnjenje cementa. Proces utovara koristi gornji ulaz kroz koji se cement sipa u silos, često olakšan pneumatskim pumpnim sistemom koji gura materijal unutra. Kada se zatraži uskladišteni cement, on se oslobađa preko mehanizma za pražnjenje koji se nalazi na dnu silosa i brzo se transportira do svog odredišta. Ključni aspekt rada silosa za cement je konstantno održavanje nadzora razine cementa u skladišnoj jedinici. Potrebne su redovne provjere kako bi se osiguralo da volumen cementa ne prelazi kapacitet silosa, što bi potencijalno moglo uzrokovati strukturalne probleme. Ovo stalno praćenje pomaže da se osigura nesmetan rad silosa, doprinoseći ukupnoj operativnoj efikasnosti.

## **1.2. Održavanje silosa**

Održavanje silosa kritičan je aspekt njegovog rada. Potrebni su rutinski postupci čišćenja kako bi se spriječilo potencijalno nakupljanje cementa koje može dovesti do daljnjih prepreka. Povrh toga, treba redovno vršiti detaljne inspekcije konstrukcije, fokusirajući se na mehanizam pražnjenja, kako bi se identificirali bilo kakvi znaci trošenja. Ukupna funkcionalnost silosa može se značajno poboljšati ovim mjerama. Ne samo da dosljedno održavanje produžava radni vijek silosa, već i maksimizira njegovu efikasnost. Stoga, preventivno održavanje silosa za cement nije samo njegovo očuvanje, već i promocija njegovih performansi.

## **1.3. Cement**

Cement je vezivo, kemijska tvar korištena za gradnju koja se stvrdnjava i prijanja na druge materijale što rezultira njihovim međusobnim spojem. Cement se rijetko koristi sam, već puno češće radi povezivanja pijeska i/ili šljunka. Cement pomiješan s finim šljunkom daje mort za zidanje, a s pijeskom ili grubljim šljunkom uz dodatak vode proizvodi beton koji je među najkorištenijim materijalima koja postoje.

Cementi koji se koriste u građevinarstvu obično su anorganski, često na bazi vapna ili kalcijevog silikata te su ili hidraulički ili rjeđe nehidraulički, ovisno o sposobnosti cementa da se veže uz prisutnost vode.

Hidraulički cementi stvrdnjavaju se i postaju ljepljivi kemijskom reakcijom između suhih sastojaka i vode. Kemijska reakcija rezultira mineralnim hidratima koji nisu jako topivi u vodi. Za razliku od hidrauličkih, nehidraulički cementi ne stvrdnjavaju se u vlažnim uvjetima ili pod

vodom. Umjesto toga, stvrđavaju se dok se suše i reagiraju s ugljičnim dioksidom u zraku. Otporni su na djelovanje kemikalija nakon stvrđavanja.

#### 1.4. Opis problema

Projektirati silos ne znači samo proračunati dimenzije konstrukcijskih elemenata, već i proučiti geometrijske oblike objekta, položaj i veličinu ispusnog otvora s opremom za punjenje i pražnjenje skladišnog prostora. Potrebno je adekvatno procijeniti statički pritisak i pritisak zbog protjecanja materijala tijekom pražnjenja i dinamičke efekte. Nejednolika djelovanja, toplinske utjecaje i utjecaje zbog nestandardne tvorničke proizvodnje također treba uzeti u obzir.

Jedan od najkritičnijih slučajeva opterećenja (djelovanja) na silos je opterećenje pri punjenju silosa. Način proračuna i uzimanja u obzir opterećenja pražnjenja uvelike ovise o načinu protoka uskladištenog materijala koji se pojavljuje tijekom pražnjenja.

Uzimajući u obzir projektiranje geometrije silosa, potencijalni problemi uključuju stvaranje svoda (tzv. zasvođavanje) preko otvora ispusta, formiranje cjevaste rupe kroz materijal i sam način protoka tijekom pražnjenja. Sklonost rasutog materijala zasvođavanju ili formiranju cjevaste rupe je prvenstveno povezano s njegovom kohezivnošću, dok način protoka tijekom pražnjenja ovisi o kutu unutarnjeg trenja materijala i trenju koje se pojavljuje između materijala i stjenki silosa.

Masovni protok je moguć jedino u slučaju strmih i glatkih stjenki lijevka i ako se materijal prazni kroz cijeli otvor ispusta. Ako su stjenke lijevka plitke (ravne) i hrapave, pojavit će se dimnjački protok. U slučaju dimnjačkog protoka, u pokretu je jedino dio materijala koji se nalazi u području iznad ili u okolini ispusta. Materijal uz stjenke silosa miruje i naziva se „mrtva“ ili nepomična zona [1].

#### 1.5. Određivanje dimenzija silosa s obzirom na način protoka materijala

U sklopu ovoga zadatka pomoću programa *Silostress tool*<sup>®</sup> [8] određena je geometrija silosa kod koje se javlja masovni protok. Na slici 2. je prikazan način na koji se odredila geometrija silosa, tako da su se unosili različiti parametri kako bi se ostvario optimum između kapaciteta silosa do 100 tona i kako bi se ostvario masovni protok tijekom pražnjenja silosa. Prema slici 2., kapacitet ovog silosa se određuje kao umnožak gustoće tvari (*RHOMIN*) i volumena tvari (*Bulk solid volume*):

$$C_s = 1440 \cdot 58,99 = 84946 \text{ kg.} \quad (1.5.1)$$



Kako silos ima ukupan kapacitet od 84,9 tona, on pripada u klasu pouzdanosti 1. Iako se odredila geometrija silosa s obzirom na masovni protok u sklopu ovoga zadatka neće se razmatrati slučaj opterećenja pri pražnjenju silosa, već će se u sklopu ovoga zadatka razmatrati slučaj kada je ispušt iz silosa zatvoren i napunjen do iskorištenja maksimalnog kapaciteta.

Slika 2. Ulazni parametri geometrije silosa [8]

U razmatranju ovoga zadatka uzeta je približna gustoća cementa za beton koja iznosi 1440 kg/m<sup>3</sup>. Tablica 1. prikazuje osnovne parametre silosa koji su korišteni u kasnijem proračunu.

Tablica 1. Osnovni parametri silosa

Maksimalna visina punjenja	8 m
Visina cilindričnog dijela	5 m
Promjer cilindričnog dijela	3,5 m
Kut nagiba konusa	20°
Promjer izlaznog otvora	1 m
Kapacitet silosa	84946 kg

## 2. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda koja se primjenjuje u mehanici deformabilnih tijela za rješavanje problema statike i dinamike. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan broj podpodručja koja se nazivaju konačni elementi, pa se razmatrani kontinuum prikazuje kao mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama na konturi elementa koje se nazivaju čvorovi. Stanje u svakom elementu, kao što je primjerice polje pomaka, deformacije, naprezanja, temperature te ostalih veličina u problemu polja, opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Te funkcije moraju zadovoljavati odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava. Budući da je metoda konačnih elemenata numerička metoda, sva dobivena rješenja su približna, odnosno realnim vrijednostima može se samo približiti uz pravilan odabir proračunskog modela i uz pravilno odabrane tipove konačnih elemenata. Zbog toga je naročito važno poznavati fizikalno ponašanje konstrukcije koja se analizira te poznavati teorijske osnove konačnih elemenata. U vremenu kad se količina prirodnih resursa svakim danom smanjuje, od velike je važnosti i optimiranje količine materijala potrebnog za izradu konstrukcije. Bitno je naglasiti da je važnost metode konačnih elemenata došla do izražaja pojavom snažnijih računala, upravo zbog toga jer je broj jednačbi često vrlo velik, pogotovo za složenije modele [2].

### 2.1. Programski paket *Abaqus*<sup>®</sup>

*Abaqus*<sup>®</sup> [3] je programski paket koji se zasniva na metodi konačnih elemenata i primjenjuje se za rješavanje različitih problema kao što su analiza pomaka i naprezanja, prijenos topline, difuzija mase, akustička analiza te mnogi drugi.

*Abaqus*<sup>®</sup> se sastoji od dva osnovna proizvoda: *Abaqus/Standard*<sup>®</sup> i *Abaqus/Explicit*<sup>®</sup>. *Abaqus/Standard*<sup>®</sup> se koristi za rješavanja statičkih i dinamičkih slučajeva opterećenja raznih konstrukcija, dok se *Abaqus/Explicit*<sup>®</sup> koristi kod simuliranja kratkih tranzijentnih dinamičkih slučajeva kao što je na primjer test sudara automobila.

Svi programski paketi koji služe za rješavanje problema koristeći metodu konačnih elemenata podijeljeni su u nekoliko radnih cjelina, kako bi se olakšalo upravljanje i kontrola podataka:

- učitavanje ulaznih podataka (pretprocesor),
- izračunavanje (procesor),

- prikaz rezultata (postprocesor).

U pretprocesoru se opisuje geometrija odabranog proračunskog modela. Geometrija proračunskog modela može biti napravljena u *Abaqus/CAE*<sup>®</sup>-u, ili u bilo kojem Computer-Aided Design (CAD) programskom paketu. U procesoru se pomoću algoritama rješava sustav više jednadžbi s više nepoznanica i stvaraju se podaci za grafički prikaz rezultata koji se prikazuju u postprocesoru. U postprocesoru se prikazuju deformirani oblici proračunskog modela te raspodjela unutarnjih sila i naprezanja, itd.

## 2.2. Konačni elementi

U ovom odlomku su prikazani elementi koji će se koristiti tijekom analize verifikacijskih primjera te tijekom analize silosa. Podaci o elementima preuzeti su iz [5].

### 2.2.1. Ljuskasti konačni elementi

Ljuskasti konačni elementi koriste se kod modela kod kojih je jedna dimenzija (npr. debljina) mnogo manja od ostalih dimenzija te su naprezanja u smjeru te dimenzije zanemariva. U *Abaqus*<sup>®</sup>-u postoje tri vrste ljuskastih elemenata i to su elementi za općenitu upotrebu u analizi ljusaka (eng. *General-purpose conventional shell elements*), zatim elementi za tanke ljuske (eng. *Thin conventional shell elements*), te elementi za debele ljuske (eng. *Thick conventional shell element*).

Modelirajući konvencionalnim elementima, diskretiziramo tijelo definirajući srednju plohu te naknadno zadajemo debljinu elementa (eng. *section property*). Primjenom 3D ljuskastih elemenata modeliramo čitavo tijelo, a debljina je određena pomoću udaljenosti između čvorova. Osim toga razlikuju se i stupnjevi slobode. 3D ljuskasti element, kao i ostali 3D elementi koji su opisani u sljedećem poglavlju, ima samo translacijske stupnjeve slobode, dok konvencionalni ima i rotacijske, odnosno 6 stupnjeva slobode po čvoru. Osnosimetrični ljuskasti elementi imaju 3 stupnja slobode i to su translacije u  $r$  i  $z$  smjeru, te rotaciju u  $r$ - $z$  ravnini.

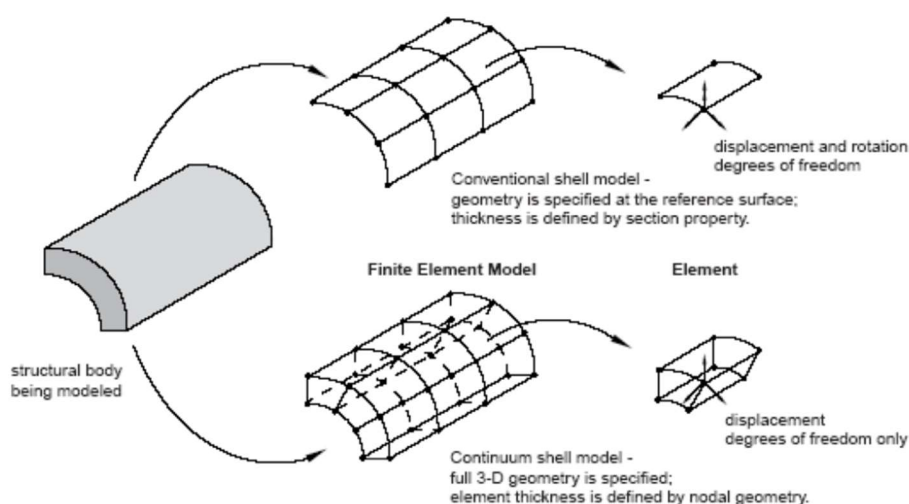
Na slici 3. prikazani su tipovi konačnih ljuskastih elemenata.

### 2.2.2. Elementi za analizu 3D problema

Općenito se ovi elementi mogu iskoristiti za modeliranje dijelova najrazličitije geometrije izloženih različitim opterećenjima. Međutim, ovi se elementi koriste kada je geometrija i/ili

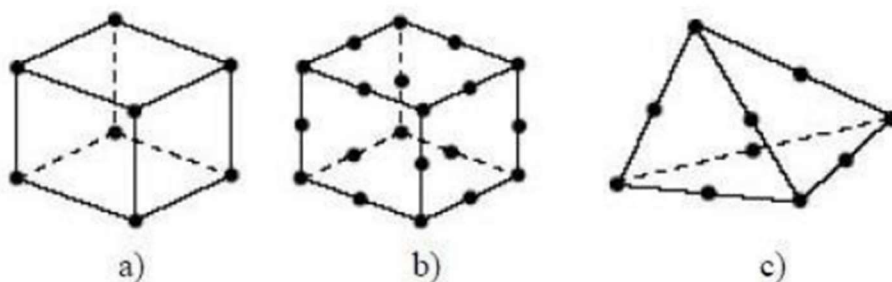
opterećenje prekompleksno da bi se problem rješavao nekim drugim tipom elemenata s manje prostornih dimenzija jer je za postizanje iste točnosti, kao za jednodimenzijske i dvodimenzijske probleme, potreban mnogo veći broj stupnjeva slobode, što samu analizu čini dugotrajnijom i računalno skupljom. Ovom tipu elemenata naziv počinje sa slovom C, a mogu biti u obliku četverostrane prizme (eng. *hexaedra*), trostrane prizme (eng. *wedge*) ili tetraedarski pa im u tom slučaju u nazivu slijedi 3D. Mogu biti osno simetrični stoga u nazivu slijedi AX. Stupnjevi slobode kod elemenata za 3D probleme su 3 translacije u svakom čvoru (1, 2 i 3), dok su kod 2D elemenata aktivni samo stupnjevi slobode 1 i 2.

Kod ovih elemenata izlazne varijable (npr. naprezanja i deformacije) su vezane uz globalni Kartezijev koordinatni sustav, ali je, kao i kod ljuskastih elementa, izlazne varijable moguće vezati uz prethodno definirani lokalni koordinatni sustav.



Slika 3. Prikaz tipova konačnih ljuskastih elemenata [5]

Slika 4. prikazuje neke od često korištenih 3D elemenata.



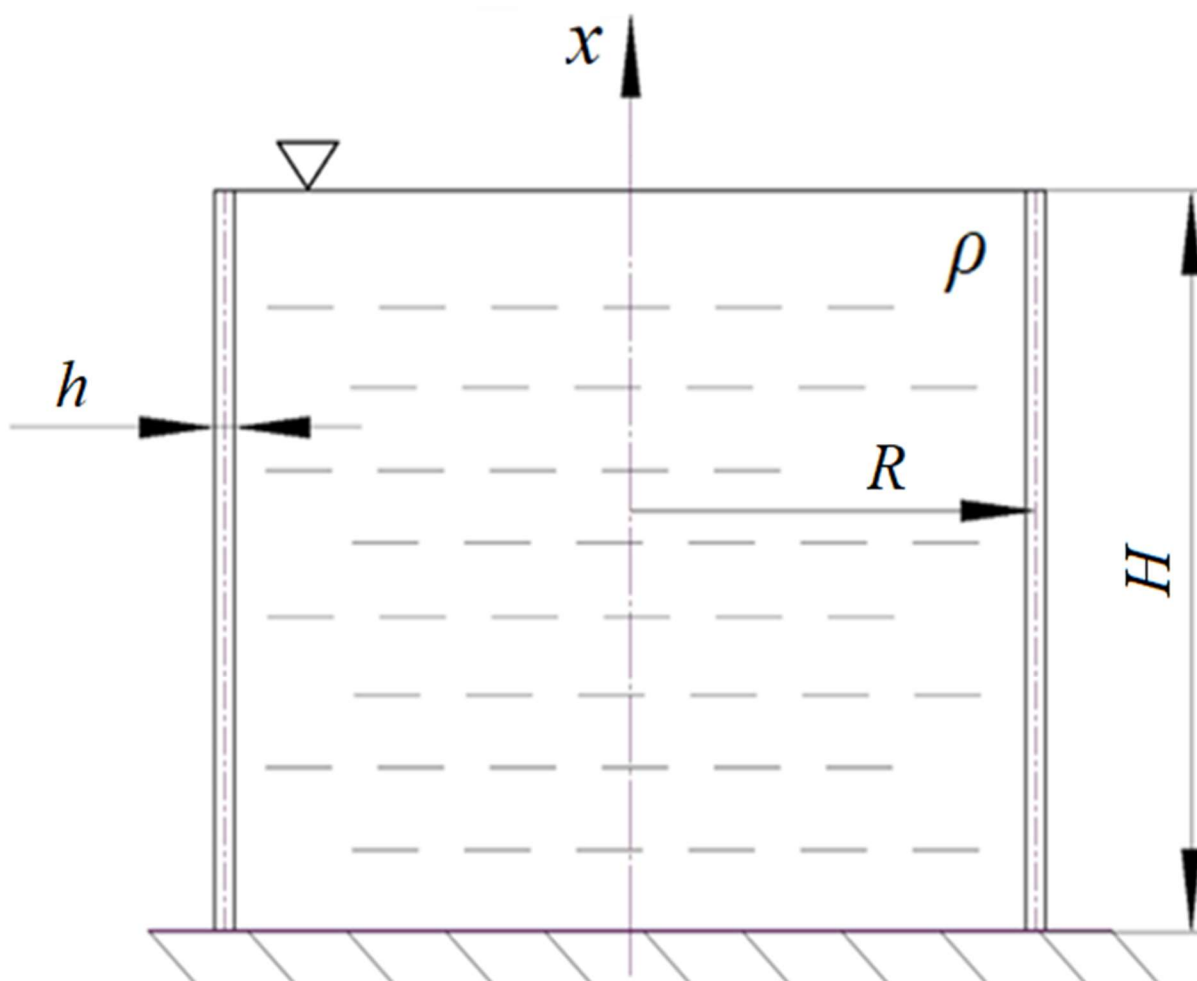
Slika 4. Često korišteni 3D elementi: a) heksaedarski element prvog reda, b) heksaedarski element drugog reda, c) tetraedarski element drugog reda [5]

### 3. VERIFIKACIJA

Provjera učinkovitosti konačnih elemenata koji će se koristiti u daljnjem radu provest će se na jednostavnijim primjerima za koje je poznato analitičko rješenje. Cilj je identificirati one elemente koji najbolje mogu opisati naš problem. Provest ćemo nekoliko verifikacijskih problema i pokazati konvergenciju rješenja korištenjem različitih tipova konačnih elemenata.

#### 3.1. Cilindrični spremnik

Uspravni cilindrični spremnik polumjera ( $R$ ) 0,5 m napunjen je kapljevinom gustoće ( $\rho$ ) 1000 kg/m<sup>3</sup> prema slici 5. Cilindrični spremnik je uklješten na dnu, dok je gornji kraj spremnika slobodan i nalazi se na visini ( $H$ ) 0,5 m od uklještenja. Debljina stjenke ( $h$ ) spremnika iznosi 10 mm, materijal je čelik čiji modul elastičnosti ( $E$ ) iznosi 210 GPa, a Poissonov faktor ( $\nu$ ) je jednak 0,3. Potrebno je odrediti raspodjelu radijalnog pomaka stjenke.



Slika 5. Uspravni cilindrični spremnik

### 3.1.1. Analitičko rješenje

Pri analitičkom rješavanju spremnika prikazanoga na slici 5. koristit ćemo se formulacijama teorije tankih ljsaka koje su objašnjene u literaturi [4]. Kako se unutar spremnika nalazi tekućina, na stjenku spremnika će djelovati hidrostatski tlak, a potrebno je još i obratiti pažnju na način na koji je spremnik oslonjen. U ovom primjeru je spremnik uspravljen na horizontalnoj podlozi pa iz tog razloga nema meridijanskih sila. Meridijanska sila kod cilindričnog spremnika  $N_x$  je paralelna s osi  $x$  jer je izvodnica spremnika ravna, odnosno meridijanski glavni radijus  $r_1$  teži u beskonačnost.

Jednadžba za raspodjelu hidrostatskog tlaka po duljini izvodnice spremnika glasi:

$$p_h = \rho \cdot g \cdot (H - x). \quad (3.1.1)$$

Iznos meridijanske sile je, zbog uklještenja na dnu, jednak za cijeli spremnik i iznosi:

$$N_x = 0. \quad (3.1.2)$$

Cirkularna sila ovisi o hidrostatskom tlaku. Njezin općeniti izraz glasi:

$$N_\varphi = p \cdot r_2, \quad (3.1.3)$$

pri čemu  $r_2$  predstavlja cirkularni glavni radijus zakrivljenosti koji je za cilindrični spremnik konstantan i iznosi:

$$r_2 = R. \quad (3.1.4)$$

Ako izraze (3.1.1) i (3.1.4) uvrstimo u izraz (3.1.3), dobijemo izraz za cirkularnu silu:

$$N_\varphi = \rho \cdot g \cdot x \cdot R. \quad (3.1.5)$$

Izraz za radijalni membranski pomak [4] glasi:

$$w^m = \frac{r}{E \cdot h} (N_\varphi - \nu \cdot N_x), \quad (3.1.6)$$

a sređeni izraz za radijalni membranski pomak glasi:

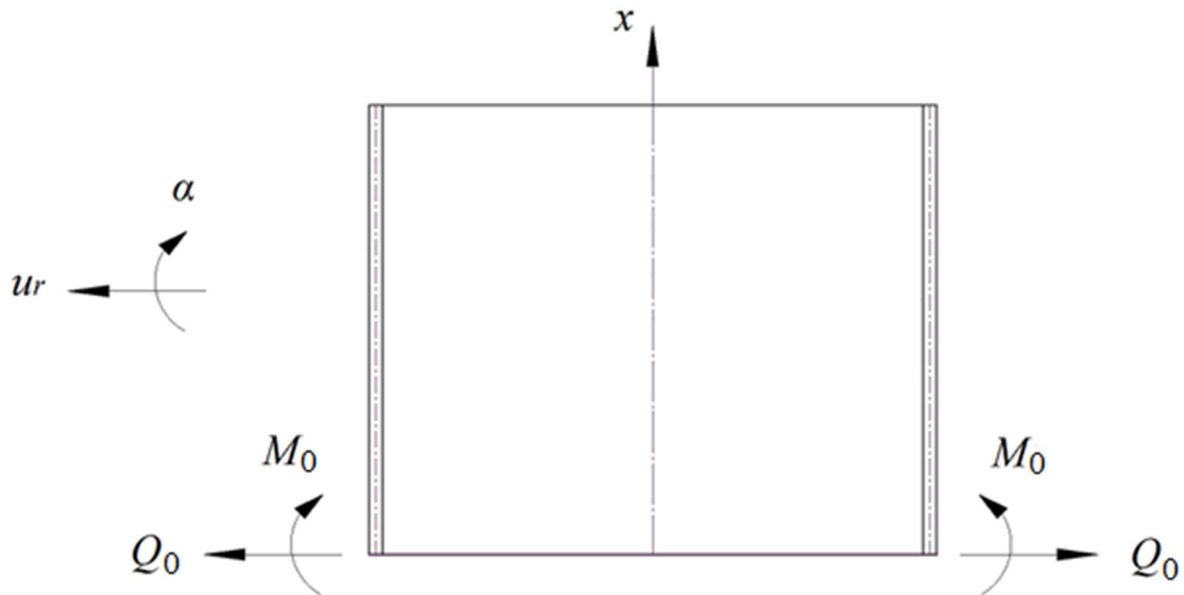
$$w_c^m = \frac{\rho \cdot g \cdot x}{E \cdot h} \cdot R^2. \quad (3.1.7)$$

Derivacijom radijalnog membranskog pomaka po  $x$  dobije se membranski kut zakreta  $\alpha_c$ .

Deriviranjem izraza (3.1.7) po  $x$  dobijemo:

$$\alpha_c^m = \frac{\rho \cdot g}{E \cdot h} \cdot R^2. \quad (3.1.8)$$

Slika 6. prikazuje cilindrični spremnik rastavljen veza na dnu, odnosno u uklještenju, pri čemu  $Q_0$  predstavlja poprečnu silu, a  $M_0$  moment savijanja. Smjerovi poprečne sile i momenta savijanja su pretpostavljeni u smjeru pozitivnog smjera radijalnog pomaka i kuta zakreta koji su definirani na slici 6.



Slika 6. Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sile i momenta

Ukupni radijalni pomak i kut zakreta sastoje se od savojnih i membranskih pomaka i kuteva zakreta koji se jednaki 0 zbog uklještenja na dnu:

$$w_c = w_c^f + w_c^m = 0, \quad (3.1.9)$$

$$\alpha_c = \alpha_c^f + \alpha_c^m = 0. \quad (3.1.10)$$

Pomak i zakret ljuske usred savijanja iznose:

$$w_c^f = \alpha_{11} \cdot Q_0 + \alpha_{12} \cdot M_0, \quad (3.1.11)$$

$$\alpha_c^f = \alpha_{21} \cdot Q_0 + \alpha_{22} \cdot M_0. \quad (3.1.12)$$

U izrazima (3.1.11) i (3.1.12)  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  i  $\alpha_{22}$  predstavljaju uplivne koeficijente koji su jednaki:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3}, \quad (3.1.13)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2}, \quad (3.1.14)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{D_c \cdot \beta_c}, \quad (3.1.15)$$

pri čemu su  $D_c$  fleksijska krutost ljuske, a  $\beta_c$  geometrijsko-materijalna značajka ljuske. Oni su definirani izrazima:

$$D_c = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3.1.16)$$

$$\beta_c = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 \cdot h^2}}. \quad (3.1.17)$$

Rješavanjem gornjih izraza te uvrštavanjem u izraze (3.1.9) i (3.1.10) dobivaju se dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$4,328 \cdot 10^{-3} \cdot Q_0 + 7,868 \cdot 10^{-5} \cdot M_0 + 5,8393 \cdot 10^{-4} = 0, \quad (3.1.18)$$

$$7,868 \cdot 10^{-5} \cdot Q_0 + 2,861 \cdot 10^{-6} \cdot M_0 + 1,1679 \cdot 10^{-6} = 0. \quad (3.1.19)$$

Izrazi (3.1.18) i (3.1.19) dobiveni su za  $x = 0$ , odnosno za uklještenje spremnika. Rješavanjem dviju jednačbi s dvije nepoznanice dobivamo iznose za silu i moment:

$$Q_0 = -0,255 \text{ N/mm}, \quad (3.1.20)$$

$$M_0 = 6,604 \text{ Nmm/mm}. \quad (3.1.21)$$

Iz izraza (3.1.20) je vidljivo da je  $Q_0$  negativna što znači da je unutarnja sila suprotnog smjera od njezinog pretpostavljenog smjera. Za raspodjelu radijalnog pomaka po visini ljuske se koristi izraz [4]:

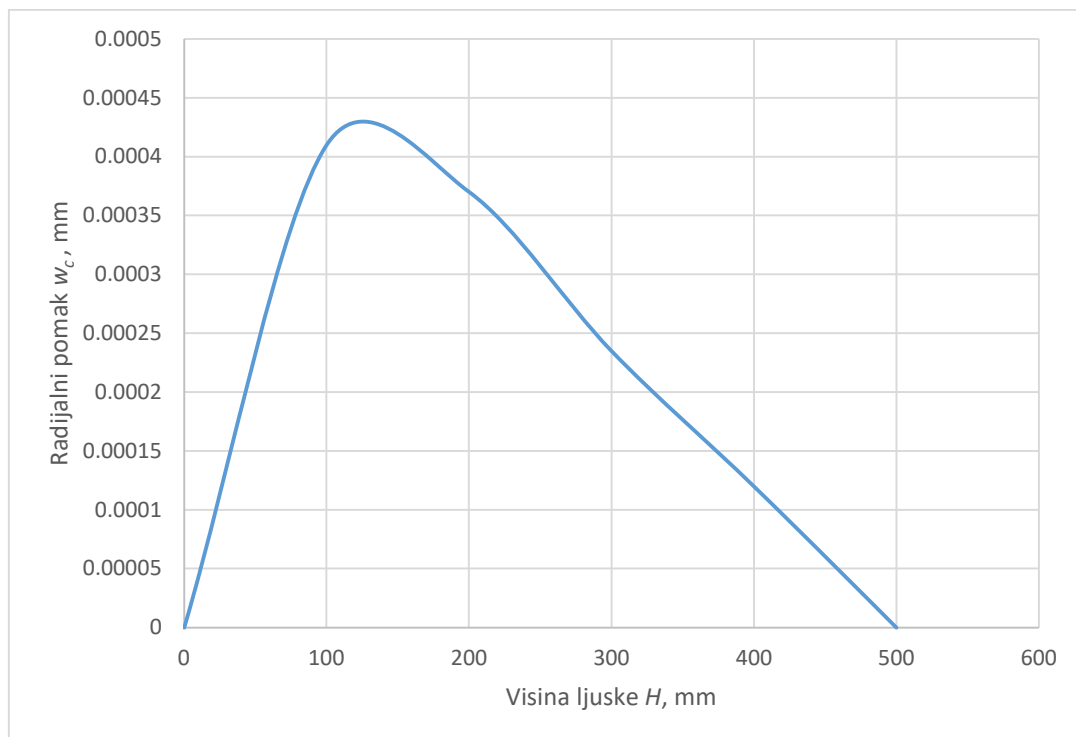
$$w_c(x) = \frac{Q_0}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3} \cdot f_4(x\beta_c) + \frac{M_0}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2} \cdot f_3(x\beta_c) + w_c^m, \quad (3.1.22)$$

pri čemu  $f_3(x\beta_c)$  i  $f_4(x\beta_c)$  predstavljaju eksponencijalno trigonometrijske funkcije koje iznose:

$$f_3(x\beta_c) = e^{-x\beta_c} \cdot [\cos(x\beta_c) - \sin(x\beta_c)], \quad (3.1.23)$$

$$f_4(x\beta_c) = e^{-x\beta_c} \cdot \cos(x\beta_c). \quad (3.1.24)$$

Na slici 7. je prikazana raspodjela radijalnog pomaka po visini ljuske.



Slika 7. Dijagram raspodjele radijalnog pomaka po visini ljuske



### 3.1.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata

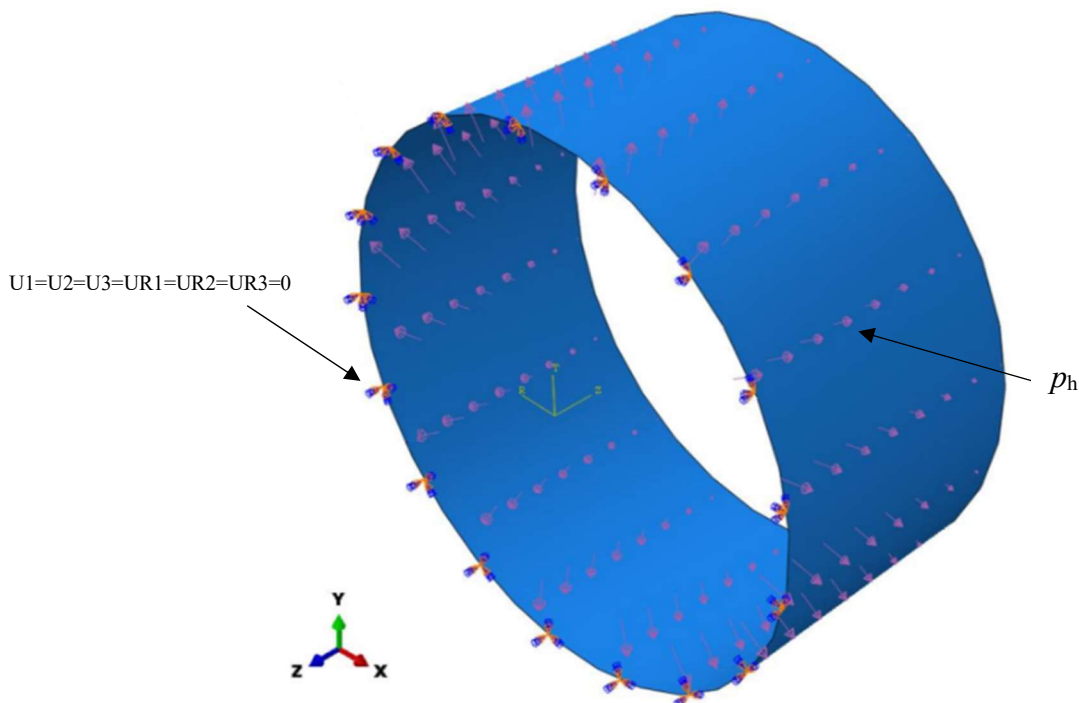
Analiza će se provesti pomoću tri vrste konačnih elemenata:

- ljuskastim,
- 3D elementima,
- osnosimetričnim.

#### Ljuskasti konačni elementi

U ovoj su analizi korišteni različiti ljuskasti elementi kako bi se utvrdilo na koji način elementi konvergiraju te koji element najbrže konvergira prema analitičkom rješenju.

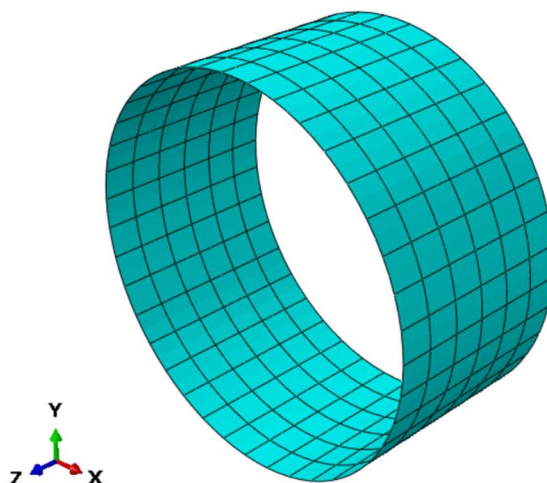
U programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup> je, vrstom modela „*Shell*“, modeliran cilindar prema zadanim dimenzijama. Zatim se definira materijal i njegova svojstva koja se pridodaju modelu u opciji „*Property module*“ prilikom dodjeljivanja presjeka cilindru. Kao što je vidljivo iz slike 8., na dnu cilindra su zadani rubni uvjeti (uklještenje po cijelom donjem rubu), a na unutarnjoj stjenki cilindra je kreirano opterećenje koje predstavlja hidrostatski tlak (čija je raspodjela po visini stijenke cilindra linearna).



Slika 8. Rubni uvjeti i opterećenje modela cilindra

Napravljena je mreža konačnih elemenata pri čemu se koristio različiti broj elemenata. Prvo sam krenuo od analize s manjim brojem elemenata koji su zatim postupno povećavani kako bi se ispitala konvergencija određenih elemenata te utvrdilo koji su elementi najpogodniji za složenije probleme spremnika.

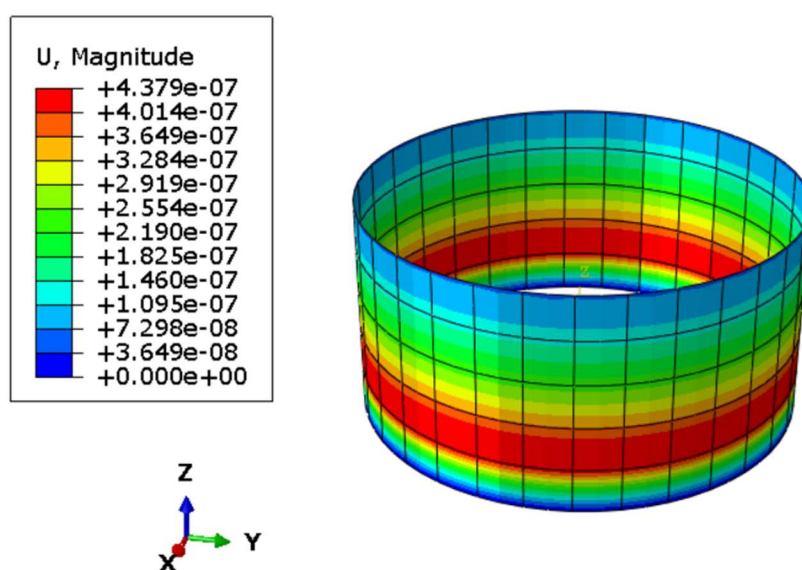
Na slici 9. je prikazan model sa kreiranom mrežom konačnih elemenata koju čine 234 ljuskastih elemenata tipa S8R5.



Slika 9. Prikaz mreže konačnih elemenata s četverokutnim ljuskastim elementima

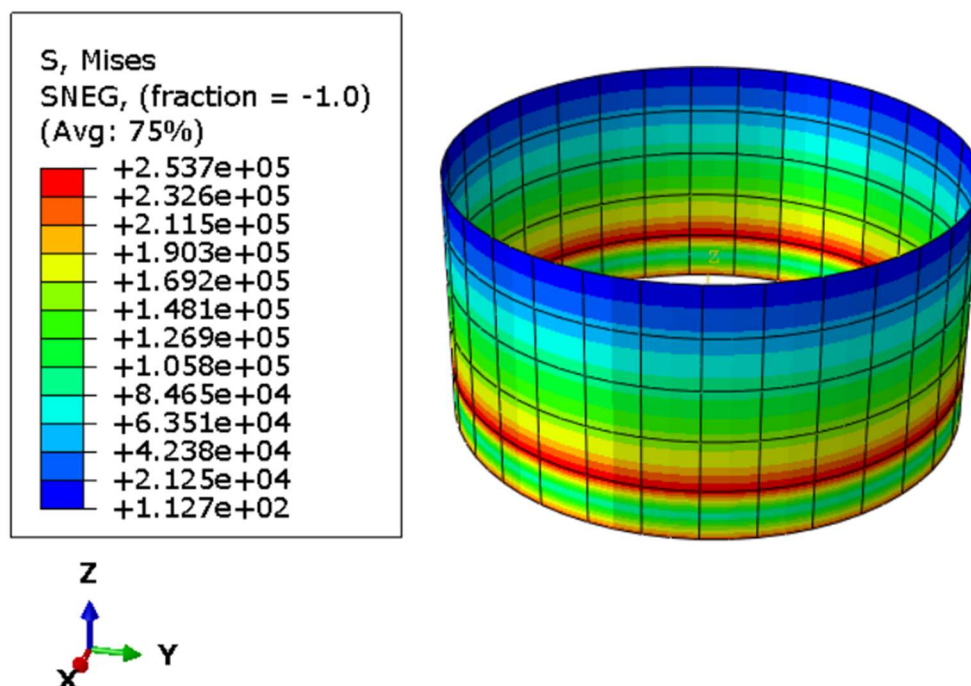
Nakon što su određeni i napravljeni svi koraci potrebni za provođenje analize u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup>, cilindar podvrgnemo analizi pomoću opcije „*Job module*“.

Na slici 10. je prikazan radijalni pomak cilindra koji je dobiven kao rezultat na kraju analize.



Slika 10. Prikaz radijalnog pomaka cilindra

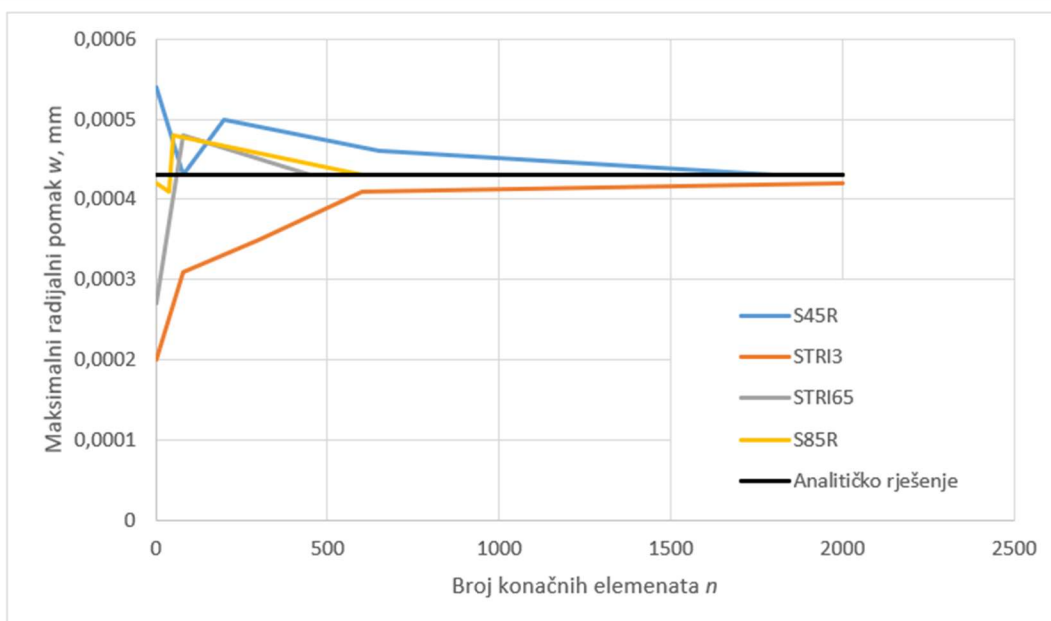
Na slici 11. su prikazana napreznja cilindra prema von Mises-u koja su također dobivena kao rezultat na kraju analize.



Slika 11. Prikaz napreznja cilindra prema von Mises-u

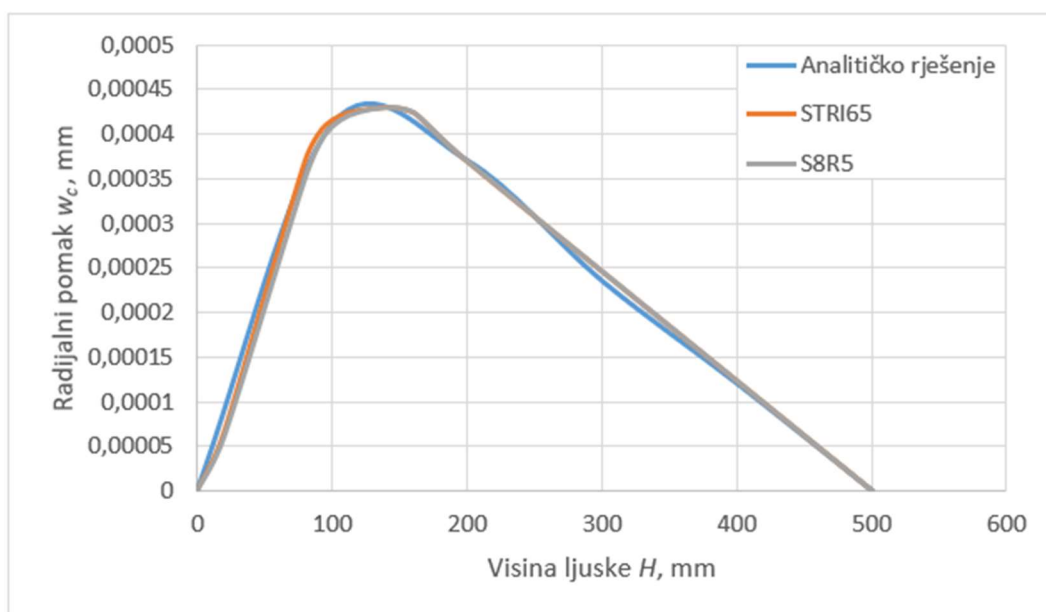
Nakon provedenih analiza, za različite konačne elemente i različiti broj elemenata dobivene su krivulje konvergencije. Rezultati analiza su uspoređeni s obzirom na maksimalni radijalni pomak cilindra koji je izračunat u analitičkom proračunu.

Slika 12. prikazuje konvergenciju ljuskastih konačnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku cilindra te se može uočiti da su najpogodnije konvergirali četverokutni ljuskasti elementi drugog reda s reduciranom integracijom (S8R5) te trokutni ljuskasti elementi drugoga reda. Kako se može uočiti, elementi S85R i STRI65 su nemonotono konvergirali, premda se elementima S85R i kod malog broja konačnih elemenata dobije rezultat sličan rezultatu analitičkog rješenja. Kod zadavanja većeg broja konačnih elemenata uočljivo je da i elementi S85R i STRI65 postižu zadovoljavajuće rezultate koji su gotovo identični analitičkom rješenju. Četverokutni ljuskasti elementi prvog reda (S45R) i trokutni ljuskasti elementi prvog reda (STRI3) se približavaju rezultatu analitičkog rješenja tek kod zadavanja 1500 konačnih elemenata te se stoga oni odbacuju kao mogući elementi za provedbu analiza u daljnjim proračunima jer je njihova konvergencija sporija te je potreban veći broj konačnih elemenata kako bismo dobili točne rezultate.



**Slika 12. Konvergencija ljuskastih konačnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku**

Na slici 13. su prikazana rješenja raspodjele radijalnog pomaka po visini ljuske. Prikazana su numerička rješenja u kojima su korišteni ljuskasti elementi S8R5 i STRI65 te analitičko rješenje. Prilikom numeričke analize korišteno je 2000 elemenata po modelu za obje vrste ljuskastih elemenata te se može uočiti da oba numerička rješenja jako malo odstupaju od analitičkog rješenja.



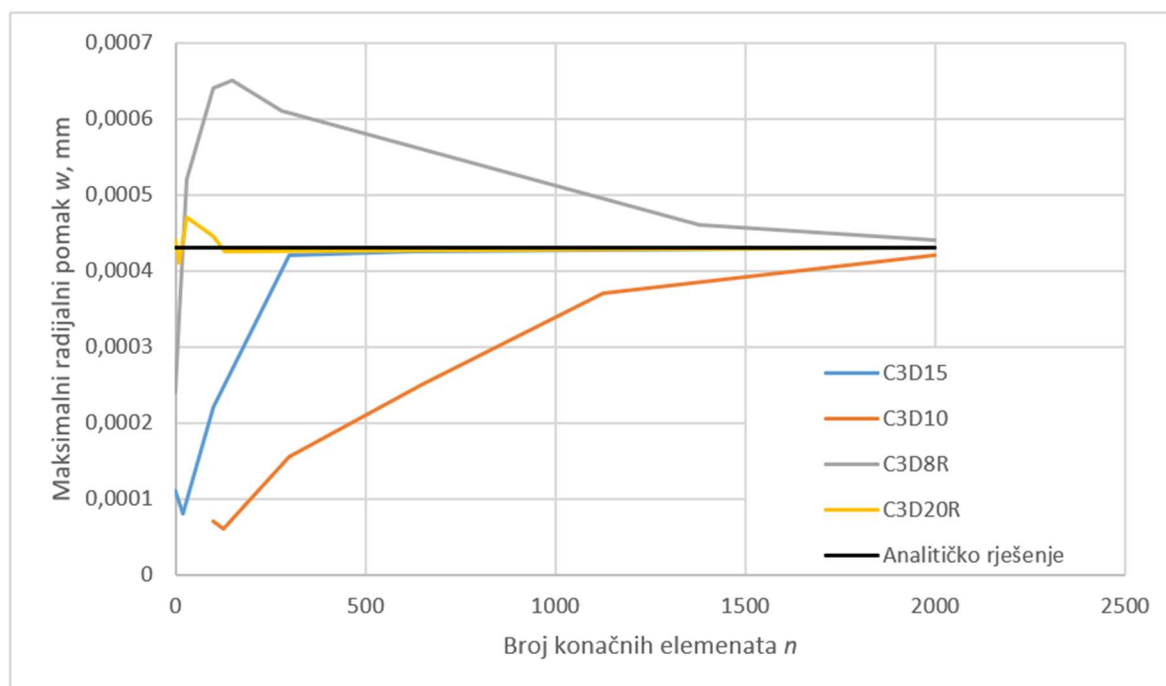
**Slika 13. Usporedba radijalnog pomaka po visini ljuske**

### 3D konačni elementi

Kod verifikacije 3D konačnih elemenata pri izradi modela korištena je „Solid“ vrsta modela, a ostali su parametri dodani modelu kao i kod ljuskastih konačnih elemenata. Pri kreiranju mreže konačnih elemenata korišteni su prizmatični heksagonalni elementi prvog reda s reduciranom integracijom (C3D8R), prizmatični heksagonalni elementi drugog reda s reduciranom integracijom (C3D20R), trostrani prizmatični elementi drugoga reda (C3D15) i tetraedarski elementi drugoga reda (C3D10). Tijekom svih analiza korišten je jedan element po debljini stjenke.

Na slici 14. je vidljivo da elementi C3D20R i C3D8R konvergiraju nemonotono prema analitičkom rješenju, dok elementi C3D10 i C3D15 konvergiraju monotono. Prizmatični heksagonalni elementi drugog reda s reduciranom integracijom (C3D20R) i za mali broj konačnih elemenata daju rješenje slično analitičkom te brzo konvergiraju prema analitičkom rješenju i nakon toga se dobivaju praktički jednaki rezultati koliko god povećavali mrežu konačnih elemenata.

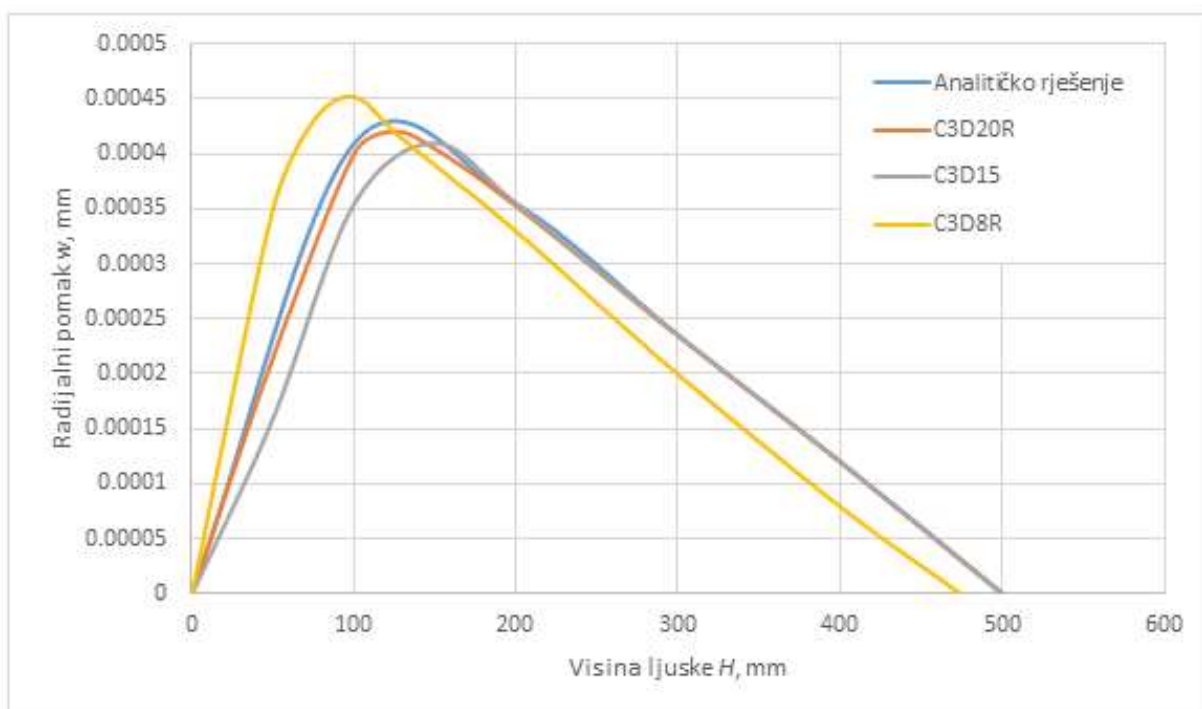
Od ostalih elemenata prihvatljivu konvergenciju pokazuje i trostrani prizmatični elementi drugog reda (C3D15) koji pri malom broju elemenata daju neprecizne rezultate, ali povećanjem elemenata brzo konvergiraju prema analitičkom rješenju te nakon toga daju rezultate koji su jako slični analitičkom rješenju.



Slika 14. Konvergencija 3D konačnih elementa prema maksimalnom radijalnom pomaku

Slika 15. prikazuje usporedbu elemenata C3D20R, C3D15 i C3D8R po visini ljuske cilindra u odnosu na analitičko rješenje. Prilikom usporedbe korišteno je 1500 elemenata za pojedine analize.

Vidljivo je da elementi C3D20R minimalno odstupaju od analitičkog rješenja, elementi C3D15 imaju nešto veća odstupanja, dok elementi C3D8R imaju najveća odstupanja po iznosu kao i po obliku krivulje. To nastaje zbog njihove sporije konvergencije te je potreban veći broj konačnih elemenata kako bi se približilo analitičkom rješenju.

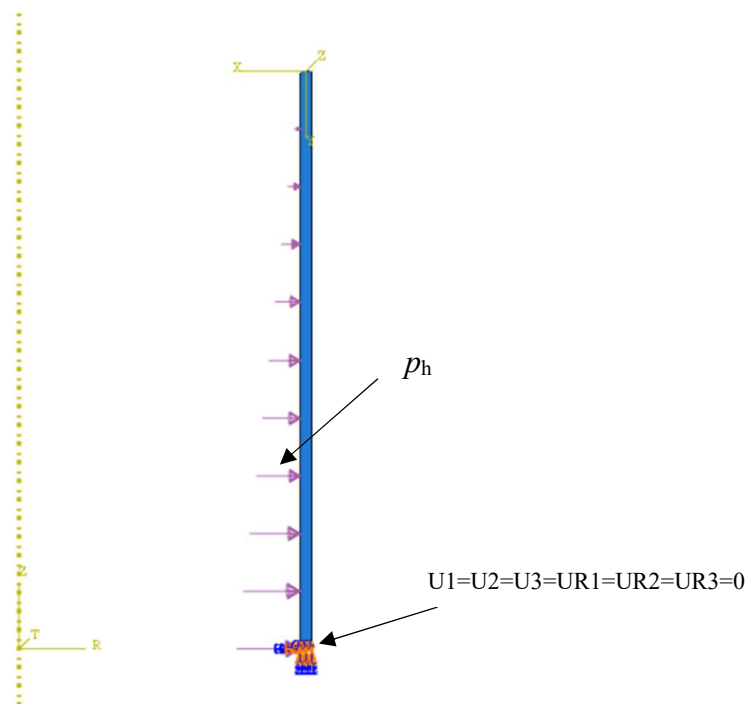


Slika 15. Prikaz radijalnog pomaka C3D20R, C3D15 i C3D8R elemenata po visini ljuske

### Osnosimetrični konačni elementi

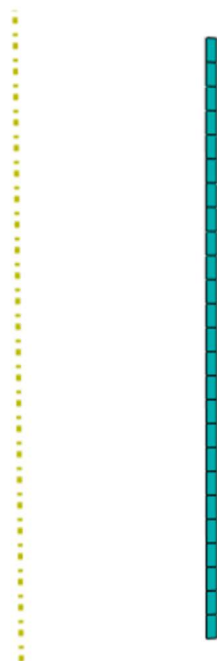
Sada ćemo kreirati osnosimetrični model cilindra pomoću opcije „*Axysymmetric*“. Navedeni problem možemo rješavati pomoću osnosimetrični konančnih elemenata jer je cilindar osnosimetričan, osnosimetrično opterećen i osnosimetrično oslonjen. Za analizu su korišteni četverokutni osnosimetrični elementi prvog reda s reduciranom integracijom (CAX4R) i četverokutni osnosimetrični elementi drugog reda s reduciranom integracijom (CAX8R).

Slika 16. prikazuje osnosimetrični model uklješten na dnu na koji djeluje tlak koji je na vrhu jednak nuli te se linearno povećava do maksimalne vrijednosti na dnu. Ovaj model, nakon rotacije za 360° oko uzdužne osi cilindričnog koordinatnog sustava, tvori naš cilindar.



**Slika 16. Prikaz osnosimetričnog modela s rubnim uvjetima i opterećenjem**

Na slici 17. je prikazan model sa kreiranom mrežom konačnih elemenata koju čine 25 osnosimetričnih elemenata tipa CAX8R.

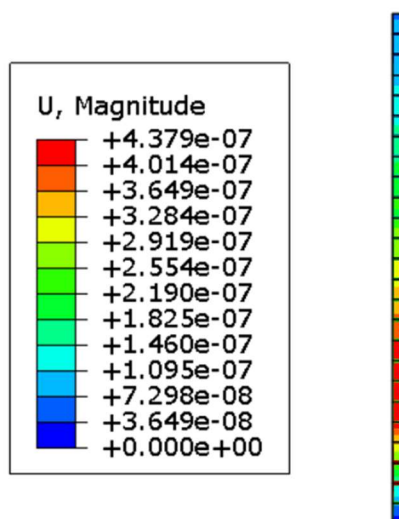


**Slika 17. Prikaz mreže konačnih elemenata s osnosimetričnim ljuskastim elementima**



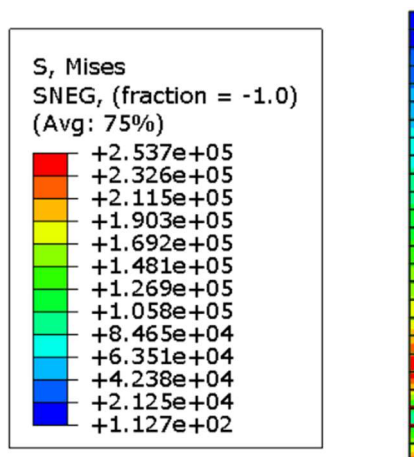
Nakon što su određeni i napravljeni svi koraci potrebni za provođenje analize u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup>, osnosimetrični model cilindra podvrgnemo analizi pomoću opcije „*Job module*“.

Na slici 18. je prikazan radijalni pomak cilindra koji je dobiven kao rezultat na kraju analize, a po iznosu je praktički identičan radijalnom pomaku cilindra dobivenom pomoću ljuskastih konačnih elemenata.



**Slika 18. Prikaz radijalnog pomaka cilindra kreiranog pomoću osnosimetričnih konačnih elemenata**

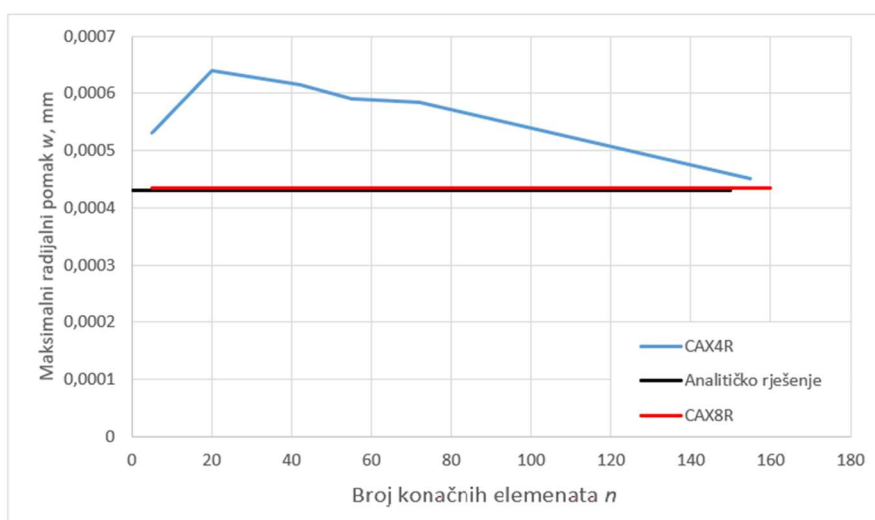
Na slici 19. su prikazana naprezanja cilindra prema von Mises-u koja su također dobivena kao rezultat na kraju analize. Po iznosu su, kao i radijalni pomak, praktički identična naprezanju cilindra dobivenom pomoću ljuskastih konačnih elemenata.



**Slika 19. Prikaz naprezanja cilindra prema von Mises-u kreiranog pomoću osnosimetričnih konačnih elemenata**

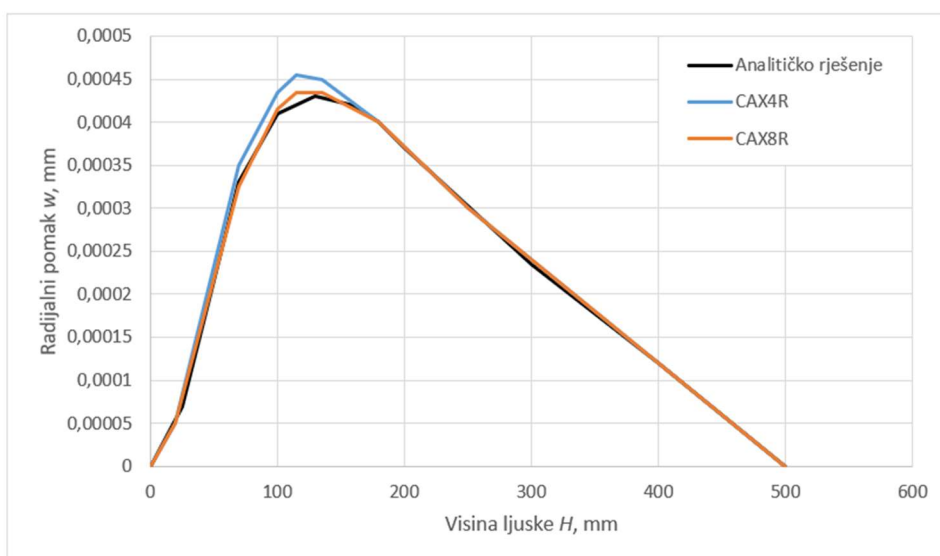


Na slici 20. prikazana je konvergencija elemenata CAX4R i CAX8R prema maksimalnom radijalnom pomaku cilindra. Kao što je vidljivo sa slike, kod elemenata CAX8R gotovo da i nema konvergencije jer već za zadani mali broj konačnih elemenata se dobiju rješenja koja su gotovo identična analitičkom rješenju. Za razliku od CAX8R, CAX4R konvergira prema analitičkom rješenju i tek se kod velikog broja konačnih elemenata dobije rješenje koje je iznosom blizu analitičkom.



**Slika 20. Konvergencija osnosimetričnih elemenata prema maksimalnom radijalnom pomaku**

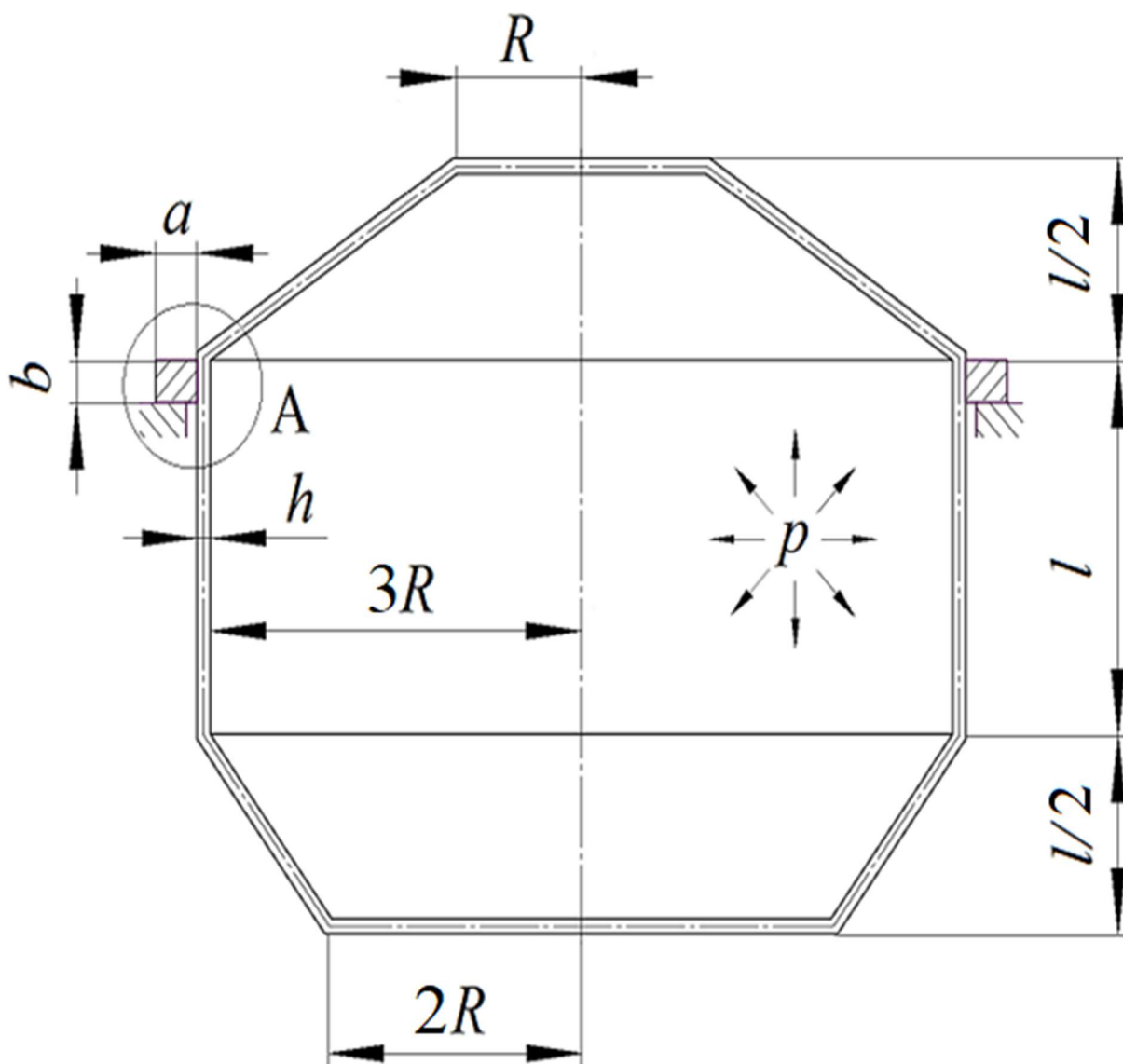
Na slici 21. je prikazana usporedba raspodjele radijalnog pomaka osnosimetričnih elemenata CAX4R i CAX8R po visini ljuske u odnosu na analitičko rješenje. U obje analize je korišteno po 154 elementa.



**Slika 21. Prikaz radijalnog pomaka CAX4R i CAX8R elemenata po visini ljuske**

### 3.2. Posuda

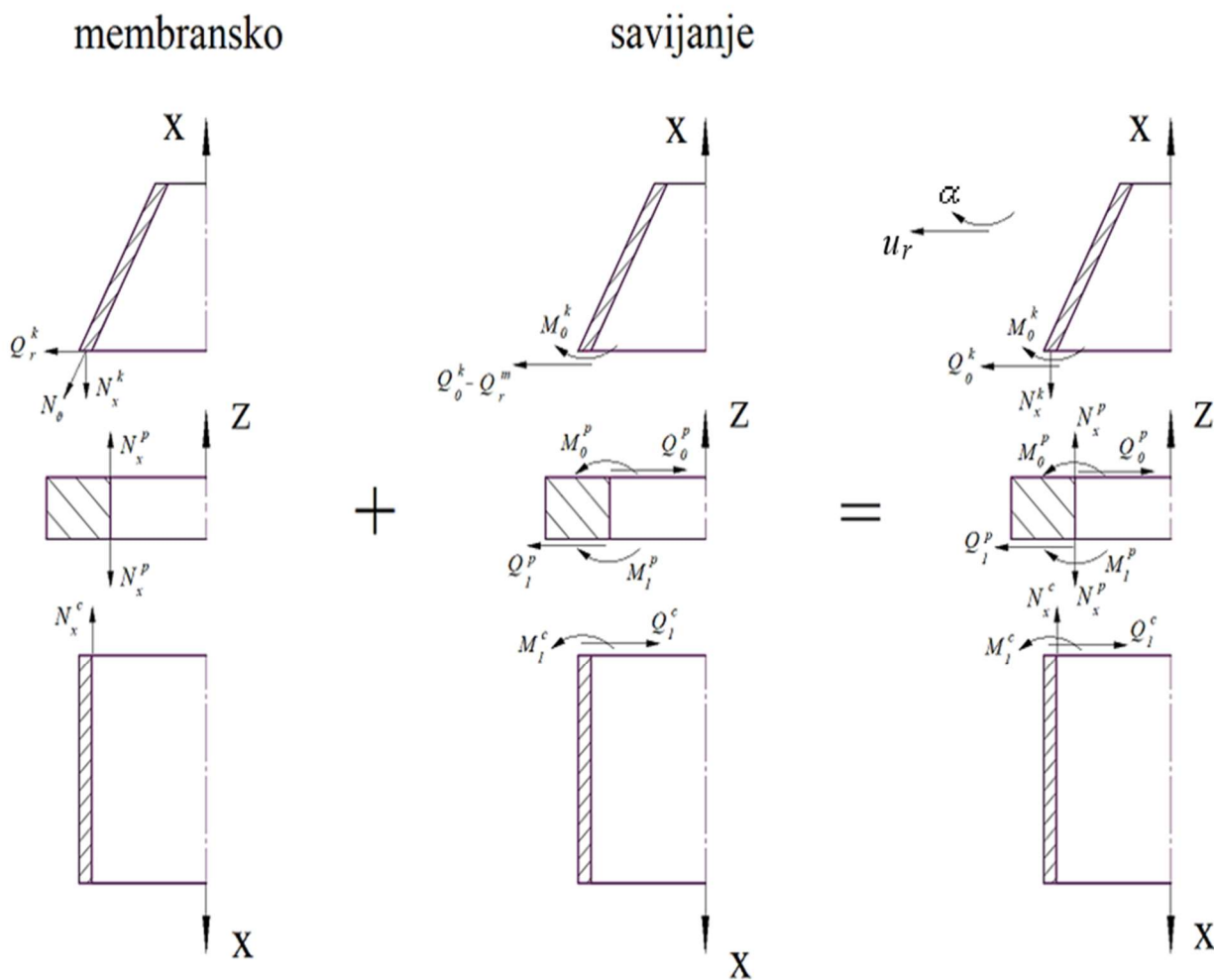
Za zadanu posudu prema slici 22. potrebno je izračunati unutarnje sile i momente na mjestu spoja definiranog detaljem *A* te napisati izraze za raspodjelu radijalnog pomaka i kuta zakreta cilindrične ljuske na mjestu spoja. Posuda se sastoji od gornjeg i donjeg konusnog dijela, prstena i cilindra koji ima polumjer ( $R$ ) 1,5 m i visinu ( $l$ ) 3 m. Na vanjskom obodu cilindra nalazi se prsten koji je oslonjen na podlogu. Prsten ima pravokutni poprečni presjek pri čemu mu visina ( $b$ ) iznosi 165 mm, a širina ( $a$ ) 200 mm. Svi dijelovi posude imaju jednaku debljinu stijenke ( $h$ ) od 50 mm. Materijal posude je čelik čiji modul elastičnosti ( $E$ ) iznosi 210 GPa te Poissonov faktor ( $\nu$ ) 0,3. Posuda je opterećena unutrašnjim tlakom ( $p$ ) koji iznosi 0,13 MPa.



Slika 22. Posuda opterećena unutrašnjim tlakom [9]

### 3.2.1. Analitičko rješenje

U svrhu analitičkog rješenja, posudu rastavljamo na gornji konus, prsten koji spaja konus i cilindar te na cilindar. Svaki od tih dijelova su opterećeni poprečnim silama i momentima savijanja na mjestima spoja kao i unutarnjim tlakom  $p$ . Slika 23. prikazuje taj rastavljeni spoj te na njegovom mjestu ucrtane smjerove sila i momenata.



Slika 23. Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sila i momenata dijelova posude

Uvjeti kompatibilnosti, prema slici 23., glase:

$$Q_0^k = Q_0^p = X_1, \quad (3.2.1)$$

$$M_0^k = M_0^p = X_2, \quad (3.2.2)$$

$$Q_1^c = Q_1^p = X_3 \text{ i} \quad (3.2.3)$$

$$M_1^c = M_1^p = X_4. \quad (3.2.4)$$

**Rubni uvjeti**

Na mjestu spoja konusne ljuske i prstena radijalni pomak konusne ljuske označujemo s  $w_k$ , a radijalni pomak prstena  $u_{rG}^p$  pri čemu u indeksu oznaka G predstavlja gornji rub prstena. Na analogan način označujemo kut zakreta konusne ljuske  $\alpha_k$  i kut zakreta prstena  $\alpha_G^p$ . Na mjestu spoja konusa i gornjeg ruba prstena rubni uvjeti glase:

$$w_k = u_{rG}^p \quad \text{i} \quad (3.2.5)$$

$$\alpha_k = \alpha_G^p. \quad (3.2.6)$$

Kako se prsten zakreće kao kruta figura, njegov kut zakreta je jednak i na spoju konusne i na spoju cilindrične ljuske dok to ne vrijedi i za radijalni pomak.

Na mjestu spoja prstena i cilindrične ljuske radijalni pomak prstena označujemo s  $u_{rD}^p$  pri čemu u indeksu oznaka D označuje donji rub prstena, a radijalni pomak cilindrične ljuske označujemo s  $w_c$ . Na analogan način označujemo i kuteve zakreta, kut zakreta prstena na donjem rubu  $\alpha_D^p$  te kut zakreta cilindrične ljuske  $\alpha_c$ . Na mjestu spoja donjeg ruba prstena i cilindrične ljuske rubni uvjeti glase:

$$w_c = u_{rD}^p \quad \text{i} \quad (3.2.7)$$

$$\alpha_c = \alpha_D^p. \quad (3.2.8)$$

**Cilindrična ljuska**

Uvjet ravnoteže u smjeru koordinatne osi  $x$  za cilindričnu ljusku glasi:

$$\sum F_x = 0, \quad (3.2.9)$$

iz čega slijedi izraz za meridijansku silu:

$$2 \cdot 3R \cdot \pi \cdot N_x = (3R)^2 \cdot \pi \cdot p. \quad (3.2.10)$$

$$N_x = 292,5 \text{ N/mm}. \quad (3.2.11)$$

Budući da meridijanski glavni radijus  $r_1$  kod cilindra teži u beskonačnost, izraz za cirkularnu silu glasi:

$$N_\varphi = r_2 \cdot p = 3R \cdot p = 585 \text{ N/mm}. \quad (3.2.12)$$

Membranski pomak cilindrične ljuske iznosi:

$$w_c^m = \frac{3R}{E \cdot h} (N_\varphi - \nu \cdot N_x) = 0,2242 \text{ mm} \quad (3.2.13)$$

Budući da je membranski pomak konstantan, njegova derivacija je jednaka nuli, a samim time je i kut zakreta jednak nuli:

$$\alpha_c^m = 0. \quad (3.2.14)$$

Kako se ukupni radijalni pomak cilindrične ljuske sastoji od pomaka uslijed savijanja i membranskog pomaka, jednadžba za ukupni radijalni pomak glasi:

$$w_c = -\alpha_{11}^c \cdot X_3 + \alpha_{12}^c \cdot X_4 + w_c^m, \quad (3.2.15)$$

a ukupni kut zakreta cilindrične ljuske iznosi:

$$\alpha_c = \alpha_{21}^c \cdot X_3 - \alpha_{22}^c \cdot X_4 + \alpha_c^m. \quad (3.2.16)$$

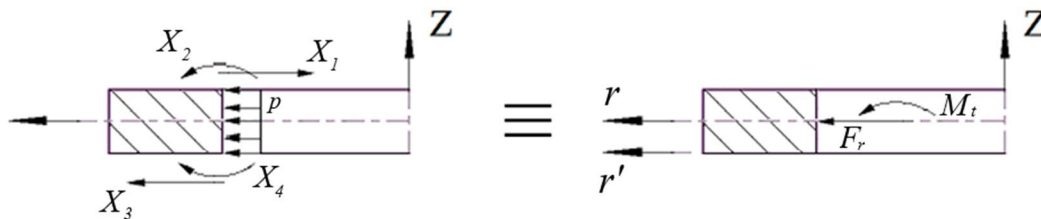
Veličine  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  i  $\alpha_{22}$  se računaju prema formulama (3.1.13), (3.1.14) i (3.1.15). Nakon što ih izračunamo, izrazi (3.2.15) i (3.2.16) prelaze u:

$$w_c = -0,0109 \cdot X_3 + 2,968 \cdot 10^{-5} \cdot X_4 + 0,2242, \quad (3.2.17)$$

$$\alpha_c = 2,968 \cdot 10^{-5} \cdot X_3 - 1,614 \cdot 10^{-7} \cdot X_4. \quad (3.2.18)$$

### Prsten

Za određivanje momenta savijanja  $M$  i normalne sile  $N$  prstena potrebno je prvo reducirati vanjsko opterećenje na radijalnu silu  $F_r$  i moment uvijanja  $M_t$  kako je prikazano na slici 24.



Slika 24. Redukcija vanjskog opterećenja na  $F_r$  i  $M_t$

Izrazi za radijalne pomake prstena glase:

$$u_{rG}^p = -\frac{M \cdot z}{E \cdot J_3} + \frac{N}{E \cdot J_1}, \quad (3.2.19)$$

$$u_{rD}^p = -\frac{M \cdot (-z)}{E \cdot J_3} + \frac{N}{E \cdot J_1}. \quad (3.2.20)$$

Izraz za kut zakreta prstena glasi:

$$\alpha^p = -\frac{M}{E \cdot J_3}. \quad (3.2.21)$$

Za izračun radijalnog pomaka prstena prvo je potrebno izračunati vrijednosti glavnih osi  $J_1$ ,  $J_2$  i  $J_3$  te pomoćnih osi  $J_1'$ ,  $J_2'$  i  $J_3'$ . Prva pomoćna os  $J_1'$  jednaka je prvoj glavnoj osi  $J_1$ , a računa se prema izrazu:

$$J_1' = h \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 165 \cdot \ln \frac{4725}{4525} = 7,136 \text{ mm} = J_1, \quad (3.2.22)$$

gdje  $h$  označava visinu prstena  $b$ , a  $r_2$  i  $r_1$  su vanjski i unutarnji radijus prstena.

Druga pomoćna os  $J_2'$  računa se prema izrazu:

$$J_2' = h \cdot z_{sr} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 165 \cdot 82,5 \cdot \ln \frac{4725}{4525} = 588,74 \text{ mm}^2, \quad (3.2.23)$$

dok je druga glavna os  $J_2$  jednaka nuli.

Treća pomoćna os  $J_3'$  računa se prema izrazu:

$$J_3' = \left( \frac{h^3}{12} + h \cdot z_{sr}^2 \right) \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{165^3}{12} + 165 \cdot 82,5^2 \right) \cdot \ln \frac{4725}{4525} = 64761,444 \text{ mm}^3. \quad (3.2.24)$$

Udaljenost  $a'$  između osi  $r$  i  $r'$  računa se na način:

$$a' = \frac{J_2'}{J_1'} = \frac{588,74}{7,136} = 82,5 \text{ mm}. \quad (3.2.25)$$

Sada je vrijednost treće glavne osi  $J_3$  jednaka:

$$J_3 = J_3' - (a')^2 \cdot J_1' = 64761,444 - 82,5^2 \cdot 7,136 = 16192,044 \text{ mm}^3. \quad (3.2.26)$$

Potrebno je napraviti redukciju sila kako bi izračunali redukcijsku silu  $F_r$  i moment torzije  $M_t$ .

$$F_r \cdot 4525 \cdot d\varphi = X_3 \cdot 4525 \cdot d\varphi - X_1 \cdot 4525 \cdot d\varphi + p \cdot 165 \cdot 4525 \cdot d\varphi, \quad (3.2.27)$$

Pri čemu radijus od 4525 mm predstavlja radijus redukcije koji se u ovom slučaju poklapa s unutarnjim radijusom prstena. Iz izraza (3.2.27) slijedi da je redukcijska sila  $F_r$  jednaka:

$$F_r = (X_3 - X_1 + 21,45) \text{ N/mm}. \quad (3.2.28)$$

Moment torzije  $M_t$  računa se:

$$M_t \cdot 4525 d\varphi = -X_3 \cdot 4525 \cdot \frac{165}{12} d\varphi - X_1 \cdot 4525 \cdot \frac{165}{12} d\varphi - X_4 \cdot 4525 d\varphi + X_2 \cdot 4525 d\varphi. \quad (3.2.29)$$

Iz izraza (3.2.29) slijedi da je moment torzije  $M_t$  jednak:

$$M_t = (-82,5 \cdot X_1 - 82,5 \cdot X_3 - X_4 + X_2) \text{ Nmm/mm}. \quad (3.2.30)$$

Sada normalna sila i moment savijanja iznose:

$$N = F_r \cdot 4525 = (4525 \cdot X_3 - 4525 \cdot X_1 + 97061,25) \text{ N}, \quad (3.2.31)$$

$$M = -M_t \cdot 4525 = 4525 \cdot (82,5 \cdot X_1 + 82,5 \cdot X_3 + X_4 - X_2) \text{ Nmm}. \quad (3.2.32)$$

Ako sada u izraze (3.2.19), (3.2.20) i (3.2.21) uvrstimo izraze (3.2.31) i (3.2.32), dobivamo radijalne pomake i kut zakreta prstena:

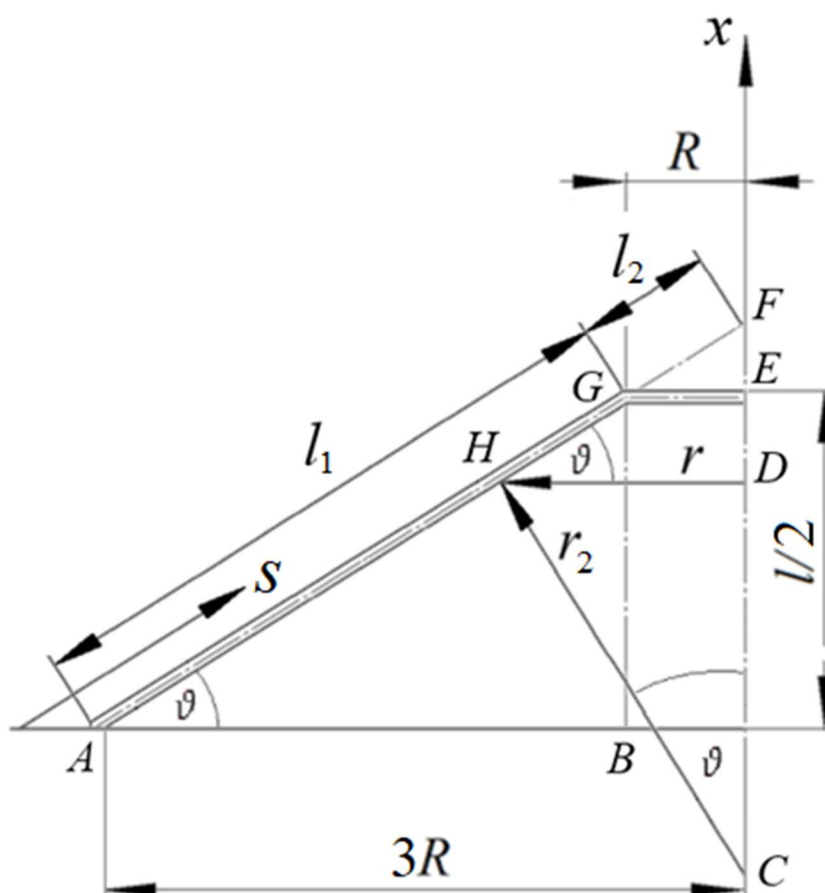
$$u_{rG}^p = -0,01208 \cdot X_1 + 1,0979 \cdot 10^{-4} X_2 - 6,0378 \cdot 10^{-3} X_3 - 1,0979 \cdot 10^{-4} X_4 + 0,0648, \quad (3.2.33)$$

$$\overline{u_{rD}^p} = 6,0378 \cdot 10^{-3} X_1 - 1,0979 \cdot 10^{-4} X_2 + 0,01208 \cdot X_3 + 1,0979 \cdot 10^{-4} X_4 + 0,0648, \quad (3.2.34)$$

$$\alpha^p = 1,0979 \cdot 10^{-4} \cdot X_1 - 1,3308 \cdot 10^{-6} \cdot X_2 + 1,0979 \cdot 10^{-4} \cdot X_3 + 1,3308 \cdot 10^{-6} \cdot X_4. \quad (3.2.35)$$

### Konusna ljuska

Slika 25. prikazuje skicu konusne ljuske s ucrtanim potrebnim veličinama i značajnim točkama.



Slika 25. Konusna ljuska

Prvo je potrebno ispitati je li ljuska strma ili plitka. Prema slici 25., iz trokuta  $ABG$  uvjet za strmu ljusku glasi:

$$\vartheta = \arctg\left(\frac{l/2}{2R}\right) = \arctg\left(\frac{l}{4R}\right) = \arctg\left(\frac{3000}{4 \cdot 1500}\right) = 26,57^\circ > \vartheta_{gr} = 25,5^\circ, \quad (3.2.36)$$

iz čega je vidljivo da ljuska jest strma. Iz trokuta  $ABG$  također je vidljivo:

$$l_1 = \sqrt{(2R)^2 + (l/2)^2} = \sqrt{(2 \cdot 1500)^2 + (3000/2)^2} = 3354,102 \text{ mm}. \quad (3.2.37)$$

Još je potrebno ispitati je li ljuska duga ili kratka. Uvjet za dugu ljusku glasi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta^k(s) ds > 3. \quad (3.2.38)$$

Izraz za geometrijsko-materijalnu značajku konusne ljuske glasi:

$$\beta^k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r_2^2 \cdot h^2}}. \quad (3.2.39)$$

Na slici 25., iz trokuta  $GEF$  vidljivo je:

$$l_2 = \frac{R}{\cos \vartheta} = \frac{1500}{\cos 26,57^\circ} = 1677,123 \text{ mm}. \quad (3.2.40)$$

Na slici 25., iz trokuta  $HDF$  vidljivo je:

$$r = (l_1 + l_2 - s) \cdot \cos \vartheta. \quad (3.2.41)$$

Ukoliko uvrstimo vrijednosti za  $l_1$  i  $l_2$  iz izraza (3.2.37) i (3.2.40) u izraz (3.2.41), dobivamo:

$$r = (5031,225 - s) \cdot \cos 26,57^\circ. \quad (3.2.42)$$

Na slici 25., iz trokuta  $HCD$  vidljivo je:

$$r_2 = \frac{r}{\sin \vartheta}. \quad (3.2.43)$$

Ako umjesto  $r$  uvrstimo izraz (3.2.42), izraz (3.2.43) postaje:

$$r_2(S) = \frac{(5031,225-s) \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}. \quad (3.2.44)$$

Uvrštavanjem (3.2.44) u (3.2.39) te zatim (3.2.39) u (3.2.38) dobivamo:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta^k(s) ds = \int_0^{l_1} \left[ \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{(5031,225-s) \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}}} \right] ds > 3, \quad (3.2.45)$$

$$\int_0^{3354,102} \left[ \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{50^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{(5031,225-s) \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}}} \right] dS > 3, \quad (3.2.46)$$

$$7,708 > 3. \quad (3.2.47)$$

Iz nejednakosti u izrazu (3.2.47) vidljivo je da je uvjet duge ljuske zadovoljen.

Na mjestu spoja ( $s = 0$ ) vrijedi:

$$\beta^k(s = 0) = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{50^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}}} = 1,812 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}. \quad (3.2.48)$$



Uvjet ravnoteže u smjeru koordinatne osi  $x$  za proizvoljnu vrijednost varijable  $s$  za konusnu ljusku glasi:

$$\sum F_x = 0, \quad (3.2.49)$$

iz čega proizlazi:

$$2r\pi \cdot N_x^k = r^2\pi \cdot p. \quad (3.2.50)$$

Ukupni radijalni pomak konusne ljuske sastoji se od membranskog pomaka te od pomaka uslijed savijanja. Općenite izraze, s pretpostavljenim smjerovima poprečne sile i momenta savijanja, za radijalni pomak i kut zakreta konusne ljuske možemo izraziti kao:

$$w_k = \alpha_{11}^k \cdot (X_1 - Q_r^k) + \alpha_{12}^k \cdot X_2 + w_k^m, \quad (3.2.51)$$

$$\alpha_k = \alpha_{21}^k \cdot (X_1 - Q_r^k) + \alpha_{22}^k \cdot X_2 + \alpha_k^m. \quad (3.2.52)$$

Uplivni koeficijenti konusne ljuske glase:

$$\alpha_{11}^k = \frac{\sin^2 \vartheta}{2 \cdot D^k \cdot (\beta^k)^3}, \quad (3.2.53)$$

$$\alpha_{12}^k = \alpha_{21}^k = \frac{\sin \vartheta}{2 \cdot D^k \cdot (\beta^k)^2} \text{ te} \quad (3.2.54)$$

$$\alpha_{22}^k = \frac{1}{D^k \cdot \beta^k}. \quad (3.2.55)$$

Fleksijska krutost konusne ljuske iznosi:

$$D^k = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{210000 \cdot 50^3}{12(1-0,3^2)} = 2403846154 \text{ N/mm}. \quad (3.2.56)$$

Uvrštavajući izraze (3.2.48) i (3.2.56) u izraze (3.2.53), (3.2.54) i (3.2.55) dobivamo:

$$\alpha_{11}^k = 6,9947 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{N}, \quad (3.2.57)$$

$$\alpha_{12}^k = \alpha_{21}^k = 2,8336 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^3/\text{N}, \quad (3.2.58)$$

$$\alpha_{22}^k = 2,2958 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^2/\text{N}. \quad (3.2.59)$$

Membranski dio radijalnog pomaka i kuta zakreta ljuske određuju se iz izraza:

$$w_k^m = \frac{r}{E \cdot h} (N_\varphi^k - \nu \cdot N_x^k), \quad (3.2.60)$$

$$\alpha_k^m = \frac{1}{E \cdot h \cdot \text{tg } \vartheta} \left[ (1 + \nu)(N_\varphi^k - N_\vartheta^k) + s \frac{d}{ds} (N_\varphi^k - \nu N_\vartheta^k) \right]. \quad (3.2.61)$$

Ukoliko umjesto sile  $N_x^k$  uvrstimo meridijalnu silu  $N_\vartheta^k$  u izrazu (3.2.50), dobivamo:

$$2r\pi \cdot N_\vartheta^k \cdot \cos(90^\circ - \vartheta) = r^2\pi \cdot p. \quad (3.2.62)$$

Prema slici 21. možemo odrediti zavisnost parametara  $x$  i  $s$ :

$$s = \frac{x}{\sin \vartheta}. \quad (3.2.63)$$

Ukoliko iz izraza (3.2.42) izrazimo  $s$  u ovisnosti o  $r$  dobivamo:

$$s = 5031,225 - \frac{r}{\cos 26,57^\circ}. \quad (3.2.64)$$

Ako sada uvrstimo izraz (3.2.64) u izraz (3.2.63) te izrazimo  $r$  u ovisnosti o  $x$  dobivamo:

$$r(x) = -\frac{x}{\operatorname{tg} \vartheta} + (l_1 + l_2) \cdot \cos \vartheta = -\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ. \quad (3.2.65)$$

Sada možemo uvrstiti izraz (3.2.65) u izraz (3.2.62) te nakon sređivanja dobivamo:

$$N_\vartheta^k = \frac{p}{2 \cos 63,43^\circ} \cdot \left(-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ\right). \quad (3.2.66)$$

Ako izraz (3.2.65) uvrstimo u izraz (3.2.43), dobivamo radijus  $r_2$  u ovisnosti o  $x$ :

$$r_2(x) = \frac{-\frac{x}{\operatorname{tg} \vartheta} + (l_1 + l_2) \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}. \quad (3.2.67)$$

S obzirom da radijus  $r_1$  kod konusnih ljusaka teži u beskonačnost, izraz za silu  $N_\varphi^k$  glasi:

$$N_\varphi^k = p \cdot r_2 = p \cdot \frac{-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ}{\sin 26,57^\circ}. \quad (3.2.68)$$

Ovisnost sile  $N_x^k$  o  $N_\vartheta^k$  glasi:

$$N_x^k = N_\vartheta^k \cdot \cos(90^\circ - \vartheta) = N_\vartheta^k \cdot \cos 63,43^\circ. \quad (3.2.69)$$

Uvrstimo li sada izraz (3.2.66) u izraz (3.2.69) dobivamo:

$$N_x^k = \frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ\right). \quad (3.2.70)$$

Uvrstimo li izraze (3.2.65), (3.2.68) i (3.2.70) u izraz (3.2.60), dobivamo:

$$w_k^m = \frac{p \cdot \left(-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ\right)^2}{E \cdot h} \cdot \left(\frac{1}{\sin \vartheta} - \frac{\nu}{2}\right). \quad (3.2.71)$$

Iz izraza (3.2.71), za mjesto spoja ( $x = 0$ ) membranski radijalni pomak iznosi:

$$w_k^m(x = 0) = \frac{0,13 \cdot \left(-\frac{0}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ\right)^2}{210000 \cdot 50} \cdot \left(\frac{1}{\sin 26,57^\circ} - \frac{0,3}{2}\right) = 0,523 \text{ mm}. \quad (3.2.72)$$

Iz izraza (3.2.61) dobivamo zakret ljuske:

$$\alpha_k^m = 2,613 \cdot 10^{-5} \text{ rad}. \quad (3.2.73)$$

Iz izraza (3.2.66) moguće je odrediti membranski dio poprečne radijalne sile koja se javlja u konusnoj ljuski:

$$Q_r^k = N_\vartheta^k \cdot \cos \vartheta = \frac{p \cdot \cos 26,57^\circ}{2 \cos 63,43^\circ} \cdot \left(-\frac{x}{\operatorname{tg} 26,57^\circ} + 5031,225 \cdot \cos 26,57^\circ\right). \quad (3.2.74)$$

Iz izraza (3.2.74), za mjesto spoja ( $x = 0$ ), poprečna sila iznosi:

$$Q_r^k = \frac{0,13 \cdot 10^6 \cdot \cos 26,57^\circ}{2 \cos 63,43^\circ} \cdot (0 + 5031,225 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 26,57^\circ) = 584856,816 \text{ N}. \quad (3.2.75)$$

Izrazi (3.2.56) i (3.2.57) prelaze u:

$$w_k = 6,9947 \cdot 10^{-3} \cdot (X_1 - 584856,816) + 2,8336 \cdot 10^{-5} \cdot X_2 + 0,523, \quad (3.2.76)$$

$$\alpha_k = 2,8336 \cdot 10^{-5} \cdot (X_1 - 584856,816) + 2,2958 \cdot 10^{-7} \cdot X_2 + 2,613 \cdot 10^{-5}. \quad (3.2.77)$$

Nakon što smo dobili sve izraze za radijalne pomake i kuteve zakreta (3.2.17), (3.2.18), (3.2.23), (3.2.34), (3.2.35), (3.2.76) i (3.2.77) možemo ih uvrstiti u izraze za rubne uvjete (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) i (3.2.8). Kada sredimo izraze za rubne uvjete dobijemo četiri jednačbe sa četiri nepoznanice čijim rješavanjem dobijemo poprečne sile i momente savijanja:

$$X_1 = 2477 \text{ N/mm}, \quad (3.2.73)$$

$$X_2 = -561900 \text{ Nmm/mm}, \quad (3.2.74)$$

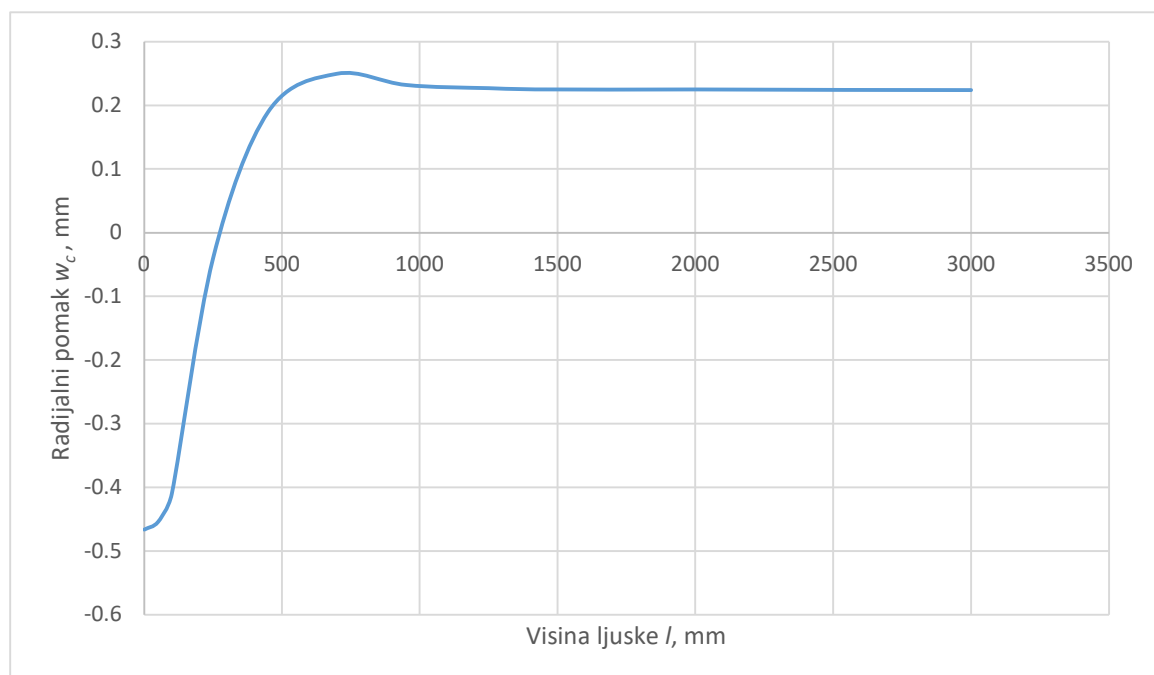
$$X_3 = 131,686 \text{ N/mm}, \quad (3.2.75)$$

$$X_4 = 24220 \text{ Nmm/mm}. \quad (3.2.76)$$

### Grafički prikaz – cilindrična ljuska

Izraz za raspodjelu radijalnog pomaka cilindrične ljuske glasi [4]:

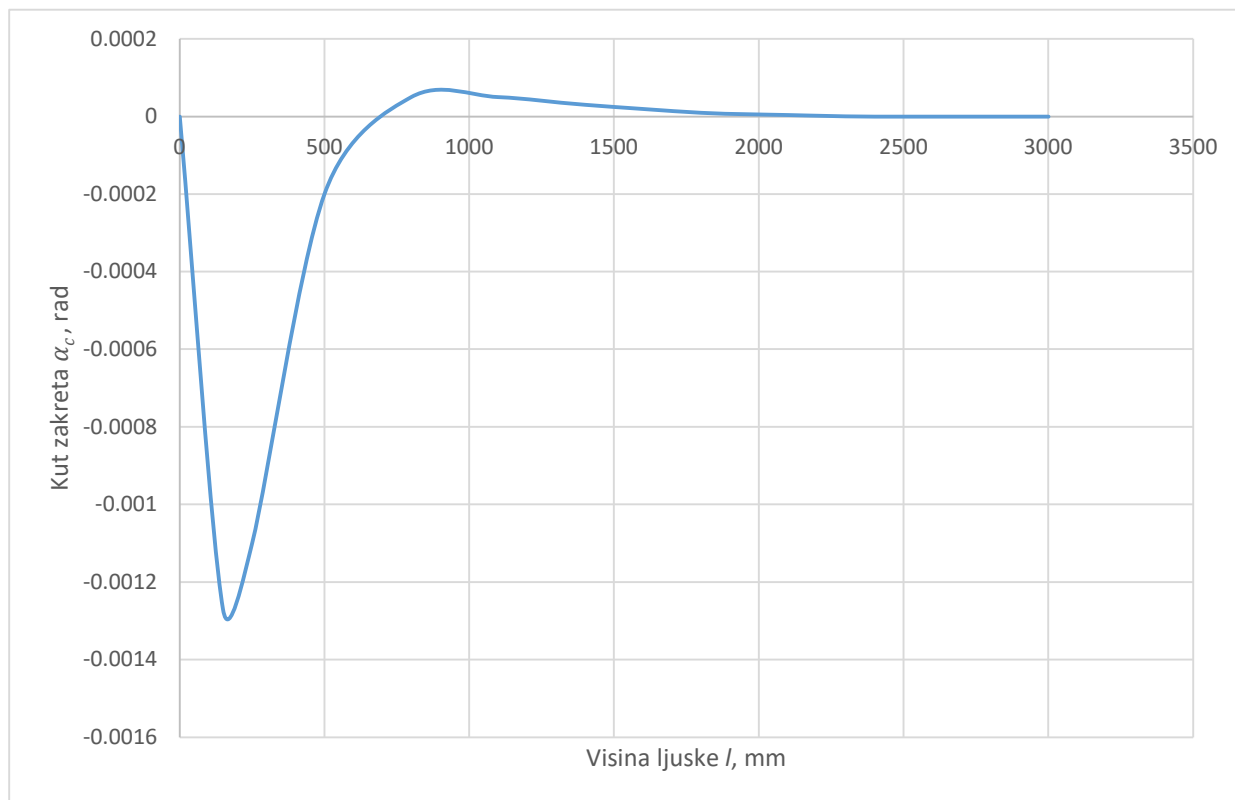
$$w_c = -\frac{X_3}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot \cos(x\beta_c) + \frac{X_4}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot [\cos(x\beta_c) - \sin(x\beta_c)] + w_c^m. \quad (3.2.77)$$



**Slika 26. Radijalni pomak duž meridijana cilindrične ljuske**

Izraz za raspodjelu kuta zakreta cilindrične ljuske glasi [4]:

$$\alpha_c = -\frac{X_3}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot [\cos(x\beta_c) + \sin(x\beta_c)] + \frac{X_4}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot \cos(x\beta_c) + \alpha_c^m. \quad (3.2.78)$$



Slika 27. Kut zakreta cilindrične ljuske

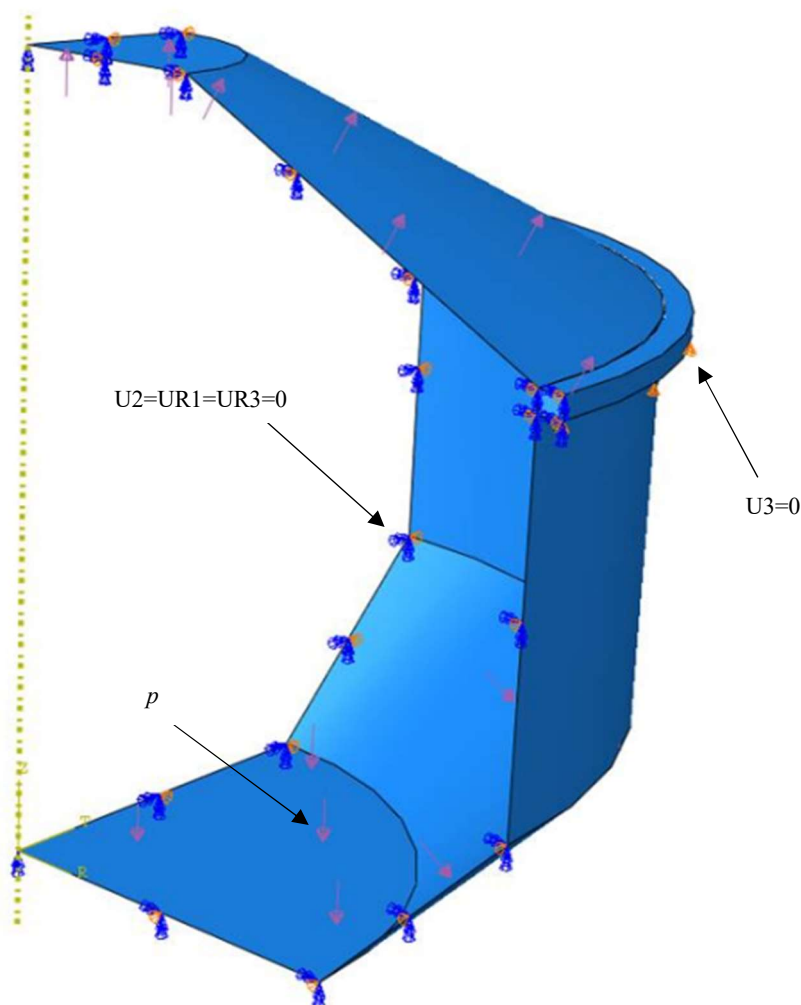
### 3.2.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata

Posudu sa slike 22. potrebno je analizirati pomoću metode konačnih elemenata kako bismo mogli usporediti rezultate analitičkog i numeričkog rješenja te utvrditi ispravnost korištenih elemenata na zadanom primjeru posude. Numerička analiza je provedena u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup>.

Unutar programskog paketa prvo je potrebno napraviti model zadane geometrije i dimenzija prema slici 18. Model osnosimetričnog spremnika (dio bez prstena) je napravljen opcijom „*Shell*“ unutar izbornika za 3D modele, dok je model prstena napravljen opcijom „*Solid*“ unutar izbornika za 3D modele. Tako napravljenim modelima potrebno je dodijeliti materijal te u slučaju osnosimetričnog spremnika i debljinu stjenke, kroz opciju „*Assign Section*“ unutar opcije „*Property module*“. Za spajanje spremnika i prstena korištena je kinematska veza „*Tie*“.

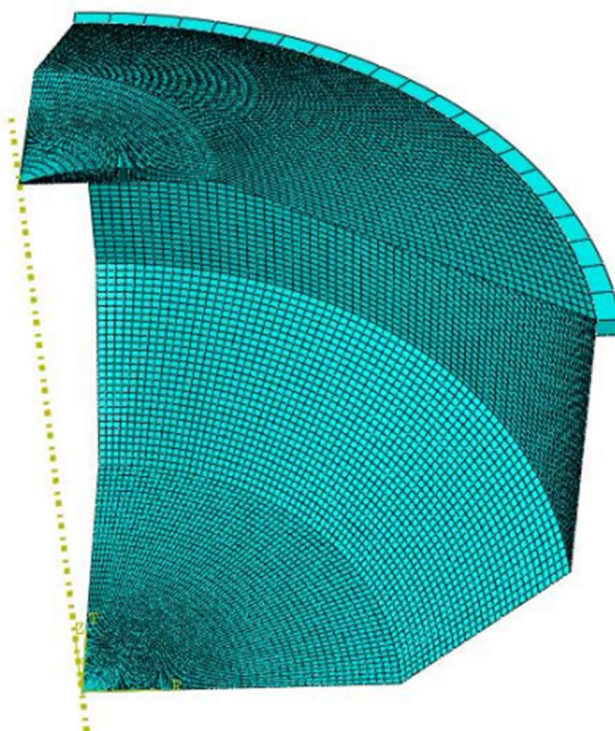
Zbog same geometrije i simetrije posude te njezinog opterećenja možemo analizirati samo četvrtinu spremnika koristeći rubne uvjete simetrije. Osim rubnog uvjeta simetrije postoji još i rubni uvjet oslonca samoga spremnika.

Na slici 28. prikazani su rubni uvjeti i opterećenje posude definirani unutar cilindričnog koordinatnog sustava kojeg je bilo potrebno dodijeliti modelu posude.



**Slika 28. Model posude s rubnim uvjetima i opterećenjem**

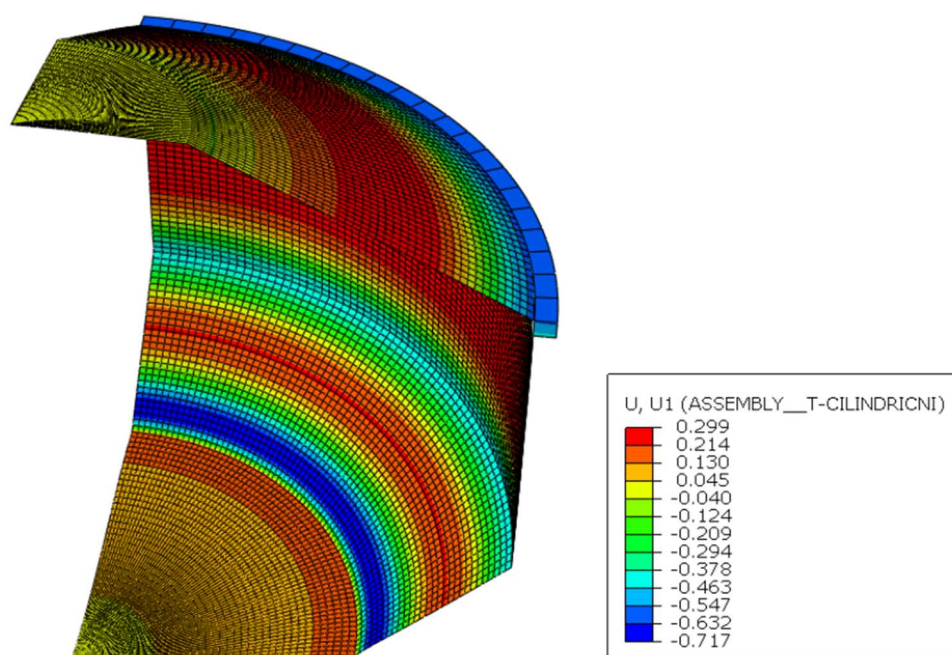
Na slici 29. je prikazana mreža konačnih elemenata pri čemu je za prsten korišten 21 element tipa C3D20R, dok je za spremnik generirana mreža konačnih elemenata sastavljena od dva tipa konačnih elemenata. U „Mesh Module-u“ pod opcijom „Assign Mesh Controls“ odabran je heksagonalni oblik elemenata kao dominantni te se stoga generirala mreža konačnih elemenata koja je sastavljena od 11799 elemenata tipa S8R5 i 138 elemenata tipa STRI65.



Slika 29. Prikaz mreže konačnih elemenata modela posude

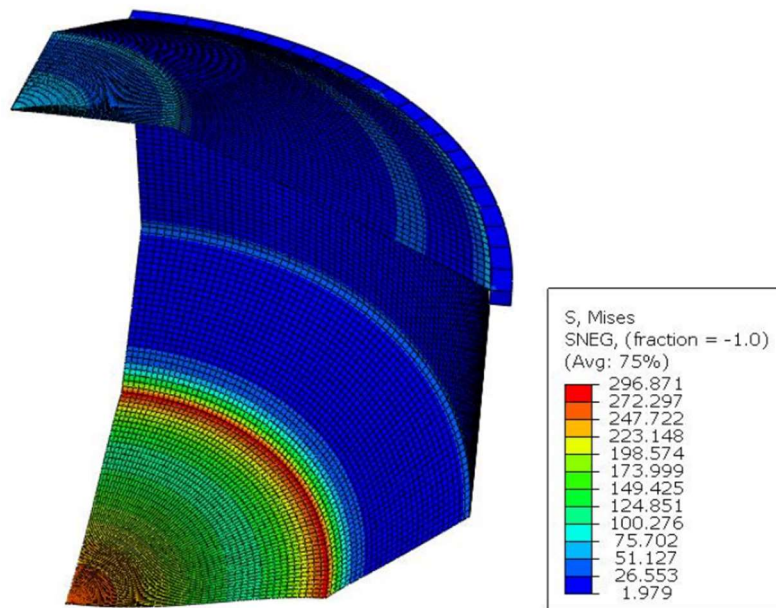
Nakon što su određeni i napravljeni svi koraci potrebni za provođenje analize u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup>, posudu podvrgnemo analizi pomoću opcije „*Job module*“.

Na slici 30. je prikazan radijalni pomak posude koji je dobiven kao rezultat na kraju analize.



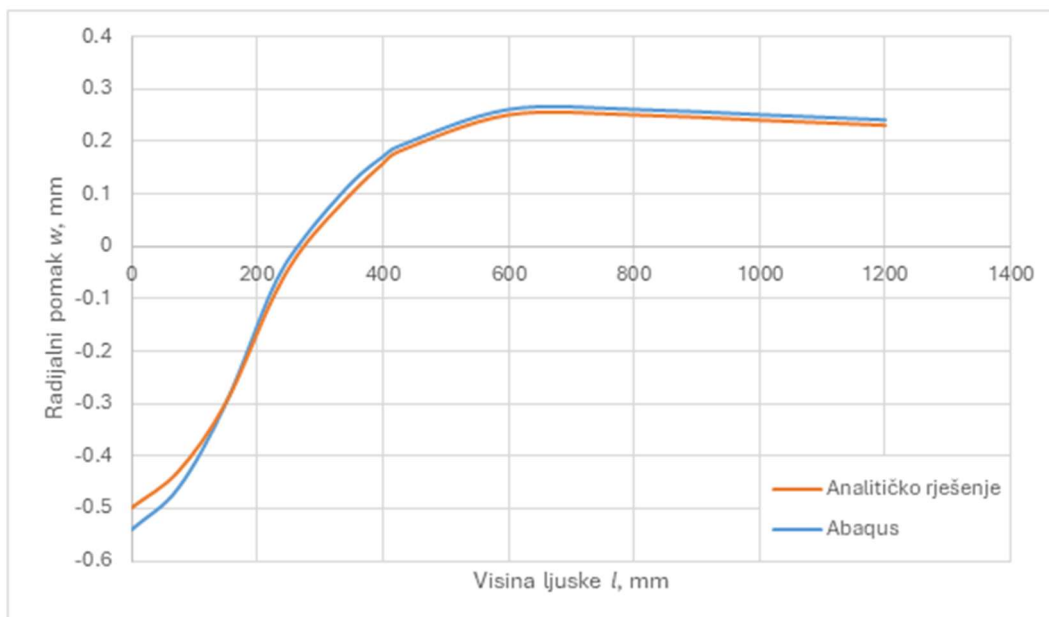
Slika 30. Prikaz radijalnog pomaka posude

Na slici 31. su prikazana napreznja posude prema von Mises-u koja su također dobivena kao rezultat na kraju analize.



Slika 31. Prikaz napreznja posude prema von Mises-u

Na slici 32. su prikazani rezultati raspodjele radijalnog pomaka po visini cilindrične ljuske koji su se dobili analitičkim i numeričkim putem. Dijagram započinje od spoja cilindrične ljuske s konusnom i prikazuje raspodjelu do visine cilindrične ljuske od 1200 mm.



Slika 32. Dijagramski prikaz radijalnog pomaka

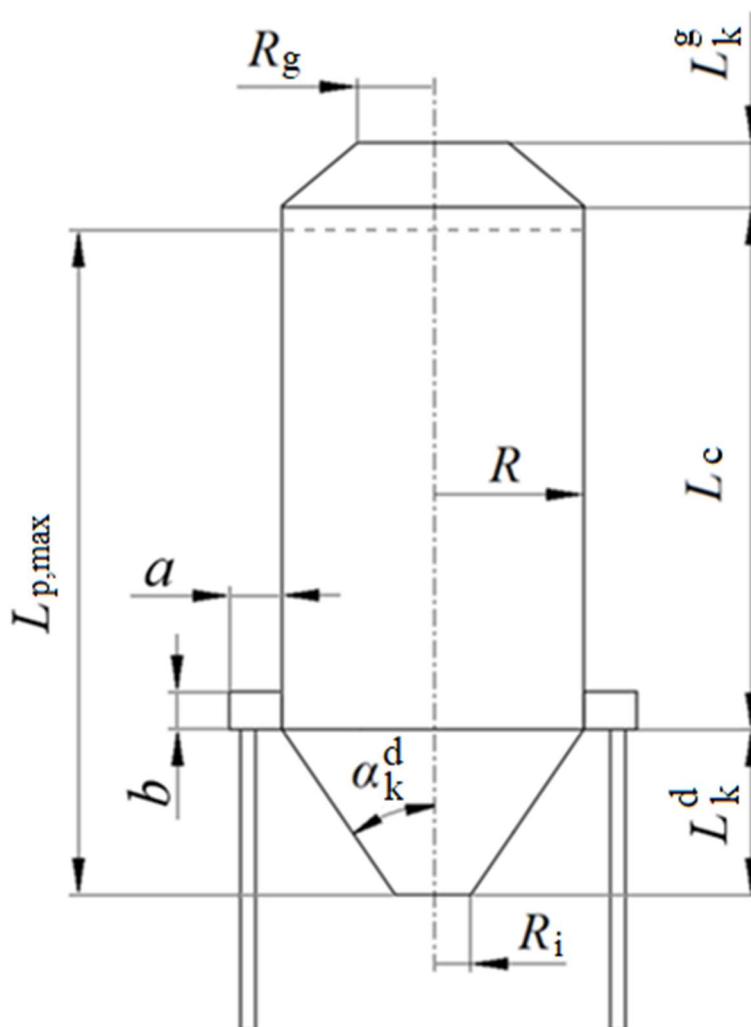
## 4. VERTIKALNI SILOS ZA CEMENT

Prvo je potrebno napraviti analitički proračun vertikalnog silosa za cement. Nakon toga je potrebno izvršiti numerički proračun silosa te usporediti rješenja kako bi se odredila ispravnost numeričkog proračuna. U tu svrhu se radi analitički izračun pojednostavljenog silosa, odnosno silos bez potpornih nogu na kojima je oslonjen, prema teoriji iz [4].

Radi pojednostavljenja i budući da radimo na strani sigurnosti, iako cilindar nije do kraja ispunjen cementom, možemo aproksimirati da jest tako da imamo samo jedan presjek cilindra u analitičkom proračunu umjesto dva presjeka.

### 4.1. Analitičko rješenje silosa

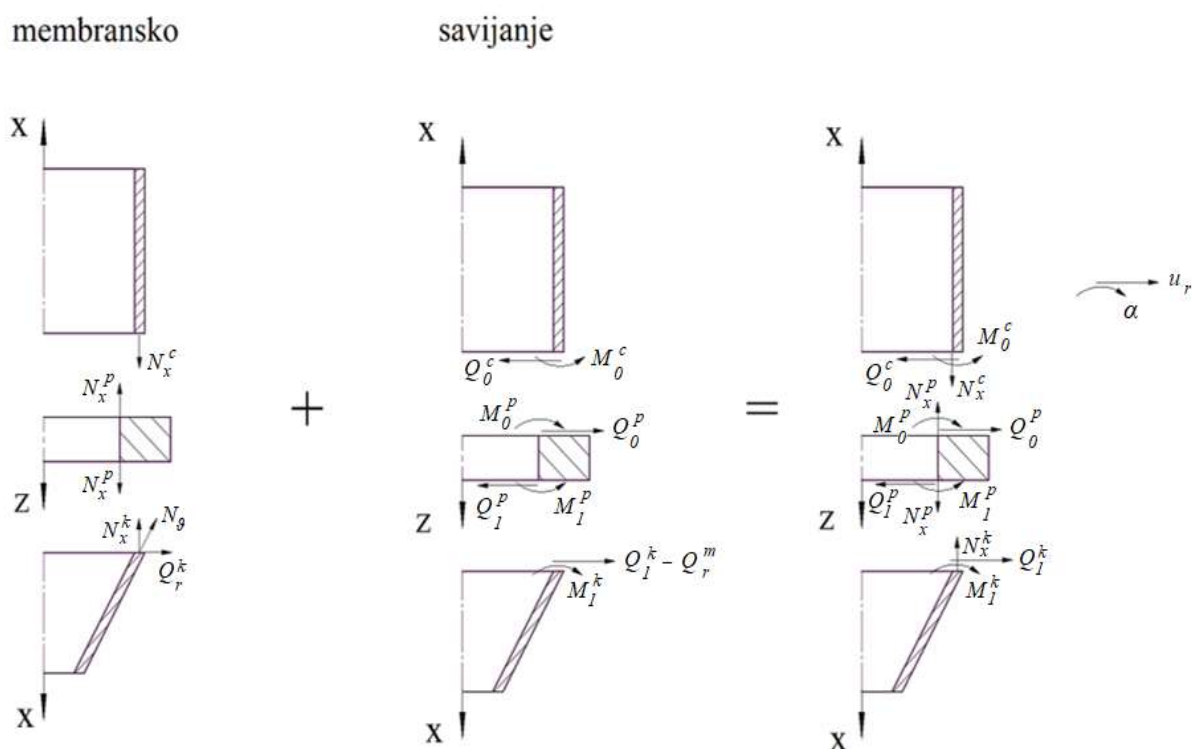
Slika 33. prikazuje skicu silosa s naznačenim veličinama potrebnim za proračun.



Slika 33. Skica silosa



Silos na slici 33. dimenzioniran je prema ulaznim parametrima sa slike 2. Cilindrični dio je polumjera ( $R$ ) 1,75 m te visine ( $L_c$ ) 5 m. Kut donjeg konusa ( $\alpha_k^d$ ) iznosi  $20^\circ$ , polumjer otvora za ispušt tvari ( $R_i$ ) iznosi 0,5 m, dok je gornji konus visok ( $L_k^g$ ) 0,5 m i ima radijus ( $R_g$ ) 1 m. Maksimalna visina punjenja silosa ( $L_{p,max}$ ) od otvora za ispušt iznosi 8 m. Debljina stjenke ( $h$ ) konusa i cilindričnog dijela iznosi 10 mm i sastavni dijelovi silosa su izrađeni od istog materijala, čelika, koji ima modul elastičnosti ( $E$ ) 210 GPa i Poissonov faktor ( $\nu$ ) 0,3. Širina prstena ( $a$ ) iznosi 200 mm, dok mu je visina ( $b$ ) 165 mm. Unutar silosa se skladišti cement koji ima gustoću ( $\rho$ )  $1440 \text{ kg/m}^3$ . Za zadani silos potrebno je izračunati unutarnje sile i momente kako bi se u daljnjem radu podaci mogli koristiti za usporedbu analitičkih i numeričkih rješenja. Tijek proračuna je identičan kao i u poglavlju 3.2.1 gdje se rješavao problem posude analitičkim putem. Prvo je potrebno rastaviti spoj cilindra, konusa i prstena te na mjestu spoja ucrtati smjerove sila i momenata. To je prikazano na slici 34.



Slika 34. Pretpostavljeni smjerovi djelovanja sila i momenata dijelova silosa

Zatim je potrebno, prema slici 34., odrediti prikazati uvjete kompatibilnosti:

$$Q_0^c = Q_0^p = X_1, \quad (4.1.1)$$

$$M_0^c = M_0^p = X_2, \quad (4.1.2)$$

$$Q_1^k = Q_1^p = X_3 \text{ i} \quad (4.1.3)$$

$$M_1^k = M_1^p = X_4. \quad (4.1.4)$$

### **Rubni uvjeti**

Na mjestu spoja cilindrične ljuske i prstena radijalni pomak cilindrične ljuske označujemo s  $w_c$ , a radijalni pomak prstena  $u_{rG}^p$  pri čemu u indeksu oznaka G predstavlja gornji rub prstena. Na analogan način označujemo kut zakreta cilindrične ljuske  $\alpha_c$  i kut zakreta prstena  $\alpha_G^p$ . Na spoju cilindra i gornjeg ruba prstena rubni uvjeti su:

$$w_c = u_{rG}^p \text{ i} \quad (4.1.5)$$

$$\alpha_c = \alpha_G^p. \quad (4.1.6)$$

Kako se prsten zakreće kao kruta figura, njegov kut zakreta je jednak i na spoju konusne i na spoju cilindrične ljuske dok to ne vrijedi i za radijalni pomak.

Na mjestu spoja prstena i konusne ljuske radijalni pomak prstena označujemo s  $u_{rD}^p$  pri čemu u indeksu D označuje donji rub prstena, a radijalni pomak konusne ljuske označujem s  $w_k$ . Na analogan način označujemo i kuteve zakreta. Kut zakreta prstena na donjem rubu  $\alpha_D^p$  te kut zakreta cilindrične ljuske  $\alpha_k$ . Na spoju donjeg ruba prstena i konusne ljuske rubni uvjeti su:

$$w_k = u_{rD}^p \text{ i} \quad (4.1.7)$$

$$\alpha_k = \alpha_D^p. \quad (4.1.8)$$

Slika 29. prikazuje rastavljeni spoj cilindra, konusa i prstena u presjeku silosa te na mjestu spoja ucrtane smjerove sila i momenata.

### **Cilindrična ljuska**

Uvjet ravnoteže za cilindričnu ljusku u smjeru koordinatne osi x glasi:

$$\sum F_x = 0; 2R\pi \cdot N_x^c - R^2\pi \cdot p - G = 0, \quad (4.1.9)$$

pri čemu G predstavlja težinu cementa unutar silosa, a p predstavlja tlak koji se linearno povećava prema dnu silosa i ima vrijednost nula na vrhu.

Izraz za tlak glasi:

$$p = \rho \cdot g \cdot (L_{p,\max} - L_k^d - x), \quad (4.1.10)$$

pri čemu za iznos  $L_k^d$  vidjeti izraz (4.1.45). Izraz za težinu cementa G unutar silosa glasi:

$$G = \rho \cdot g \cdot V, \quad (4.1.11)$$

pri čemu  $V$  predstavlja volumen tereta:

$$V = R^2 \pi \cdot x. \quad (4.1.12)$$

Ukoliko izrazimo meridijansku silu  $N_x^c$  iz izraza (4.1.9) te sredimo izraz, dobivamo:

$$N_x^c = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot R \cdot (L_{p,\max} - L_k^d) = 56434,21 \text{ N/m}. \quad (4.1.13)$$

Budući da meridijanski glavni radijus  $r_1$  kod cilindra teži u beskonačnost, izraz za cirkularnu silu glasi:

$$N_\varphi^c = p \cdot r_2 = p \cdot R = \rho \cdot g \cdot R \cdot (L_{p,\max} - L_k^d - x) = 112869,58 \text{ N/m}, \quad (4.1.14)$$

pri čemu je za koordinatu  $x$  uvrštena nula jer tražimo iznos cirkularne sile  $N_\varphi^c$  na mjestu spoja cilindrične ljuske i donjeg konusa.

Izraz za radijalni pomak uslijed membranskih sila sada glasi:

$$w_c^m = \frac{r}{E \cdot h} (N_\varphi - \nu \cdot N_x) = \frac{R}{E \cdot h} (N_\varphi^c - \nu \cdot N_x^c). \quad (4.1.15)$$

Uvrštavanjem potrebnih vrijednosti u izraz (4.1.15) dobivamo iznos radijalnog pomaka uslijed membranskih sila na mjestu spoja cilindrične ljuske i donjeg konusa:

$$w_c^m = 0,07995 \text{ mm}. \quad (4.1.16)$$

Kut zakreta cilindrične ljuske dobijemo kao prvu derivaciju radijalnog pomaka uslijed membranskih sila po koordinati  $x$ :

$$\alpha_c^m = \frac{dw_c^m}{dx}. \quad (4.1.17)$$

Nakon sređivanja izraza (4.1.17) i uvrštavanja vrijednosti u isti dobivamo iznos kuta zakreta cilindrične ljuske:

$$\alpha_c^m = -2,0601 \cdot 10^{-8} \text{ rad/mm}. \quad (4.1.18)$$

Budući da se ukupni radijalni pomak cilindrične ljuske sastoji od pomaka uslijed savijanja i membranskog pomaka, jednadžba za ukupni radijalni pomak glasi:

$$w_c = \alpha_{11}^c \cdot X_1 + \alpha_{12}^c \cdot X_2 + w_c^m. \quad (4.1.19)$$

Jednadžba za ukupni kut zakreta cilindrične ljuske glasi:

$$\alpha_c = \alpha_{21}^c \cdot X_1 - \alpha_{22}^c \cdot X_2 + \alpha_c^m. \quad (4.1.20)$$

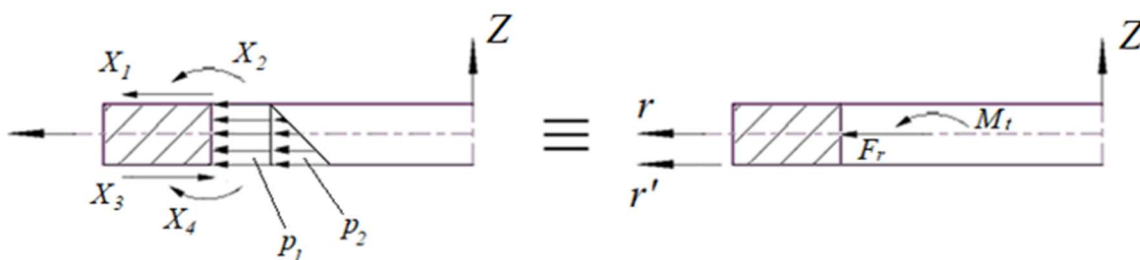
Uplivni koeficijenti  $\alpha_{11}^c$ ,  $\alpha_{12}^c$ ,  $\alpha_{21}^c$  i  $\alpha_{22}^c$  računaju se prema izrazima (3.1.13), (3.1.14) i (3.1.15). Nakon računanja uplivnih koeficijenata te njihovog uvrštavanja u izraze (4.1.19) i (4.1.20), dobivamo sređene izraze za ukupni radijalni pomak i ukupni kut zakreta cilindrične ljuske:

$$w_c = 0,02834 \cdot X_1 + 2,7538 \cdot 10^{-4} \cdot X_2 + 0,07995, \quad (4.1.21)$$

$$\alpha_c = 2,7538 \cdot 10^{-4} \cdot X_1 - 5,3516 \cdot 10^{-6} \cdot X_2 - 2,0601 \cdot 10^{-8}. \quad (4.1.22)$$

### Prsten

Za određivanje momenta savijanja  $M$  i normalne sile  $N$  prstena potrebno je prvo reducirati vanjsko opterećenje na radijalnu silu  $F_r$  i moment uvijanja  $M_t$  kako je to prikazano na slici 35.



Slika 35. Redukcija vanjskog opterećenja prstena

Izraz za radijalni pomak prstena glasi:

$$u_r^p = -\frac{M \cdot (\pm z)}{E \cdot J_3} + \frac{N}{E \cdot J_1}. \quad (4.1.23)$$

Izraz za kut zakreta prstena glasi:

$$\alpha^p = -\frac{M}{E \cdot J_3}. \quad (4.1.24)$$

Izračun radijalnog pomaka i kuta zakreta prstena identičan je proračunu objašnjenom u poglavlju 3.2.1.

$$J'_1 = b \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 165 \cdot \ln \frac{1955}{1755} = 17,807 \text{ mm} = J_1 \quad (4.1.25)$$

$$J'_2 = b \cdot z_{sr} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 165 \cdot 82,5 \cdot \ln \frac{1955}{1755} = 1469,079 \text{ mm}^2 \quad (4.1.26)$$

$$J'_3 = \left( \frac{b^3}{12} + b \cdot z_{sr}^2 \right) \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{165^3}{12} + 165 \cdot 82,5^2 \right) \cdot \ln \frac{1955}{1755} = 161598,711 \text{ mm}^3 \quad (4.1.27)$$

$$a' = \frac{J'_2}{J'_1} = \frac{1469,079}{17,807} = 82,5 \text{ mm} \quad (4.1.28)$$

$$J_3 = J'_3 - (a')^2 \cdot J'_1 = 161598,711 - 82,5^2 \cdot 17,807 = 40399,817 \text{ mm}^3 \quad (4.1.29)$$

Kao i u poglavlju 3.2.1., potrebno je napraviti redukciju sila kako bi izračunali redukcijsku silu  $F_r$  i moment torzije  $M_t$ .

$$F_r \cdot R \cdot d\varphi = X_1 \cdot R \cdot d\varphi - X_3 \cdot R \cdot d\varphi + \frac{1}{2} (p_2 + p_1) \cdot b \cdot R \cdot d\varphi, \quad (4.1.30)$$

$$M_t \cdot R \cdot d\varphi = (X_2 - X_4) \cdot R \cdot d\varphi + (X_1 + X_3) \cdot R \cdot \frac{b}{2} \cdot d\varphi - \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \cdot b \cdot R \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right) \cdot d\varphi, \quad (4.1.31)$$

pri čemu su tlakovi  $p_1$  i  $p_2$ :

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot (L_{p,\max} - L_k^d - b), \quad (4.1.32)$$

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot (L_{p,\max} - L_k^d). \quad (4.1.33)$$

Iz izraza (4.1.30) i (4.1.31) dobivaju se vrijednosti normalne sile  $N$  i momenta savijanja  $M$ :

$$N = F_r \cdot R = R \cdot [X_1 - X_3 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1) \cdot b], \quad (4.1.34)$$

$$M = -M_t \cdot R = R \cdot [(X_4 - X_2) - (X_1 + X_3) \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \cdot b \cdot (\frac{b}{2} - \frac{b}{3})]. \quad (4.1.35)$$

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti, izrazi (4.1.34) i (4.1.35) poprimaju sljedeći oblik:

$$N = 1,755 \cdot (X_1 - X_3 + 10449.694) \text{ N}, \quad (4.1.36)$$

$$M = 1,755 \cdot [X_4 - X_2 - (X_1 + X_3) \cdot 0,0825 + 5,2881] \text{ Nm}. \quad (4.1.37)$$

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti, jednadžbe za radijalne pomake i kut zakreta prstena prelaze u oblike:

$$u_{rG}^p = 1,877 \cdot 10^{-9}X_1 + 1,707 \cdot 10^{-8}X_2 - 1,877 \cdot 10^{-9}X_3 - 1,707 \cdot 10^{-8}X_4 + 4,81 \cdot 10^{-6}, \quad (4.1.38)$$

$$u_{rD}^p = -9,39 \cdot 10^{-10}X_1 - 1,71 \cdot 10^{-8}X_2 + 9,39 \cdot 10^{-10}X_3 + 1,71 \cdot 10^{-8}X_4 + 4,99 \cdot 10^{-6}, \quad (4.1.39)$$

$$\alpha^p = -2,07 \cdot 10^{-7}X_4 + 2,07 \cdot 10^{-7}X_2 + 1,707 \cdot 10^{-8}X_1 + 1,707 \cdot 10^{-8}X_3 - 1,094 \cdot 10^{-6}. \quad (4.1.40)$$

### **Konusna ljuska**

Slika 36. prikazuje skicu konusne ljuske silosa s ucrtanim potrebnim veličinama i značajnim točkama.

Prvo je potrebno ispitati je li konusna ljuska silosa strma ili plitka:

$$\vartheta = 90^\circ - \alpha_k^d = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ > \vartheta_{gr} = 25,5^\circ, \quad (4.1.41)$$

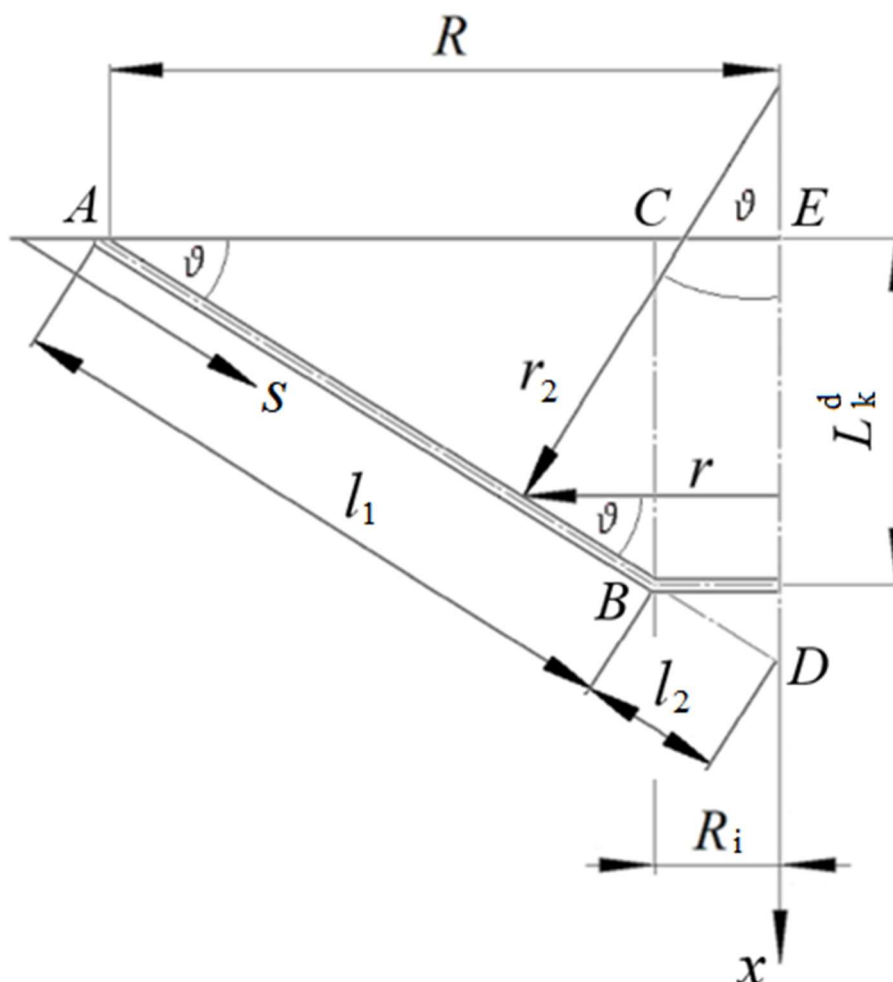
iz čega je vidljivo da ljuska jest strma. Još je potrebno ispitati je li ljuska duga ili kratka. Uvjet za dugu ljusku glasi:

$$\int_{s_1}^s \beta^k(s) ds > 3, \quad (4.1.42)$$

pri čemu u geometrijsko-materijalnoj značajki konusne ljuske koja glasi:

$$\beta^k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r_2^2 \cdot h^2}}, \quad (4.1.43)$$

moramo izraziti  $r_2$  u ovisnosti o  $s$ . Taj postupak se izvodi identično kao u poglavlju 3.2.1.



Slika 36. Konusna ljuska silosa

Prema slici 36., iz trokuta  $ABC$  dobivamo iznos duljine  $l_1$ :

$$l_1 = \frac{R - R_i}{\cos \vartheta} = \frac{1750 - 500}{\cos 70^\circ} = 3654,756 \text{ mm}. \quad (4.1.44)$$

Iz trokuta  $ABC$  također dobivamo iznos visine konusa  $L_k^d$ :

$$L_k^d = (R - R_i) \cdot \operatorname{tg} \vartheta = (1750 - 500) \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 3434,347 \text{ mm}. \quad (4.1.45)$$

Prema slici 36., iz trokuta  $ADE$  dobivamo iznos duljine  $l_2$ :

$$l_2 = \frac{R}{\cos \vartheta} - l_1 = \frac{1750}{\cos 70^\circ} - 3654,756 = 1461,902 \text{ mm}. \quad (4.1.46)$$

Sada dobivamo radijus  $r_2$  u ovisnosti o  $s$ :

$$r_2(s) = \frac{(l_1 + l_2 - s) \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{(5116,658 - ) \cdot \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}. \quad (4.1.47)$$

Izraz (4.1.42) sada prelazi u:

$$\int_{S_1}^{S_2} \beta^k(s) ds = \int_0^{L_1} \left[ \sqrt[4]{\frac{3(1-v^2)}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{(5116,658-s) \cdot \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}}} \right] ds > 3, \quad (4.1.48)$$

$$\int_0^{3654,756} \left[ \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{10^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{(5116,658-s) \cdot \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}}} \right] ds > 3, \quad (4.1.49)$$

$$44,867 > 3, \quad (4.1.50)$$

iz čega je vidljivo da je uvjet duge ljuske zadovoljen.

Na mjestu spoja ( $s=0$ ) vrijedi:

$$\beta^k(s=0) = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{10^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{5116,658 \cdot \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}}} = 9,419 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}. \quad (4.1.51)$$

Uvjet ravnoteže u smjeru koordinatne osi  $x$  za proizvoljnu vrijednost varijable  $s$  za konusnu ljusku glasi:

$$\sum F_x = 0; 2r\pi \cdot N_x^k = G + r^2\pi \cdot p, \quad (4.1.52)$$

pri čemu tlak  $p$  iznosi:

$$p = \rho \cdot g \cdot (L_{p,\max} - L_k^d + x). \quad (4.1.53)$$

Ukoliko sada u izraz (4.1.53) uvrstimo brojčane vrijednosti (duljine u metrima, gustoću  $\rho$  u  $\text{kg/m}^3$  te ubrzanje sile teže  $g$  u  $\text{m/s}^2$ ), dobivamo sređeni izraz za tlak  $p$  u ovisnosti o koordinati  $x$  koja se uvrštava u metrima:

$$p = (62705,3238 + 13734 \cdot x) \text{ Pa}. \quad (4.1.54)$$

U izrazu (4.1.52), težina tereta  $G$  iznosi:

$$G = \rho \cdot g \cdot V, \quad (4.1.55)$$

pri čemu je volumen tereta  $V$  jednak:

$$V = R^2\pi \cdot (L_{p,\max} - L_k^d) + r^2\pi \cdot x. \quad (4.1.56)$$

Ukoliko, prema izrazu (3.2.65), u izrazu (4.1.56) izrazimo radijus  $r$  u ovisnosti o koordinati  $x$  dobivamo:

$$V = R^2\pi(L_{p,\max} - L_k^d) + \frac{x^3}{\text{tg}^2 \vartheta} \pi - \frac{2x^2}{\text{tg} \vartheta} (l_1 + l_2)\pi \cos \vartheta + (l_1 + l_2)^2 x \pi \cos \vartheta. \quad (4.1.57)$$

Ukoliko sada u izraz (4.1.57) uvrstimo brojčane vrijednosti (duljine u metrima i kuteve u stupnjevima), dobivamo sređeni izraz za volumen tereta  $V$  u ovisnosti o koordinati  $x$  koja se uvrštava u metrima:

$$V = (43.927 + 0.4162 \cdot x^3 - 4.0021 \cdot x^2 + 28.1303 \cdot x) \text{ m}^3, \quad (4.1.58)$$

odnosno sređeni izraz za težinu tereta  $G$  glasi:

$$G = (5716,091 \cdot x^3 - 54964,841 \cdot x^2 + 386341,54 \cdot x + 603293,418) \text{ N}. \quad (4.1.59)$$

Ovisnost sile  $N_x^k$  o sili  $N_\vartheta^k$  glasi:

$$N_x^k = N_\vartheta^k \cdot \cos(90^\circ - \vartheta). \quad (4.1.60)$$

Ukoliko izraz (4.1.60) uvrstimo u (4.1.52), sredimo i izlučimo  $N_\vartheta^k$ , dobijemo:

$$N_\vartheta^k = \frac{11432.182 \cdot x^3 - 83831.726 \cdot x^2 + 521730.104 \cdot x + 2367212.988}{-2.149 \cdot x + 10.333}. \quad (4.1.61)$$

S obzirom da radijus  $r_1$  kod konusnih ljusaka teži u beskonačnost, izraz za silu  $N_\varphi^k$  glasi:

$$N_\varphi^k = p \cdot r_2. \quad (4.1.62)$$

Ako radijus  $r_2$  izrazimo u ovisnosti o koordinati  $x$  prema izrazu (3.2.67) te izraz (4.1.54) uvrstimo u (4.1.62) i sredimo, dobivamo sređeni oblik sile  $N_\varphi^k$  u ovisnosti o koordinati  $x$ :

$$N_\varphi^k = -5319,59 \cdot x^2 + 1289,45 \cdot x + 116777,379. \quad (4.1.63)$$

Membranski dio radijalnog pomaka ljuske određuje se iz izraza:

$$w_k^m = \frac{r}{E \cdot h} (N_\varphi^k - \nu \cdot N_x^k). \quad (4.1.64)$$

Ako u izraz (4.1.64) uvrstimo izraze (3.2.65), (4.1.63) i (4.1.60) u koji se još uvrsti (4.1.50) te uvrstimo vrijednosti (pri čemu za  $x$  uvrštavamo nulu) i sredimo, dobivamo iznos membranskog dijela radijalnog pomaka ljuske na mjestu spoja:

$$w_k^m(x = 0) = 0,0435 \text{ mm}. \quad (4.1.65)$$

Membranski dio kuta zakreta ljuske određuje se iz izraza:

$$\alpha_k^m = \frac{1}{E \cdot h \cdot \text{tg } \vartheta} \left[ (1 + \nu)(N_\varphi^k - N_\vartheta^k) + s \frac{d}{ds} (N_\varphi^k - \nu N_\vartheta^k) \right]. \quad (4.1.66)$$

Uvrstimo li numeričke vrijednosti u izraz (4.1.66), dobivamo iznos membranskog dijela kuta zakreta konusne ljuske:

$$\alpha_k^m = -2,531 \cdot 10^{-8} \text{ rad}. \quad (4.1.67)$$

Iz izraza (4.1.61) sada je moguće odrediti membranski dio poprečne radijalne sile koja se javlja u konusnoj ljuski:



$$Q_r^k = N_{\vartheta}^k \cdot \cos \vartheta = \frac{11432,182 \cdot x^3 - 83831,726 \cdot x^2 + 5217,104 \cdot x + 2367212,988}{-2,149 \cdot x + 10,333} \cdot \cos 70^\circ. \quad (4.1.68)$$

Iz izraza (4.1.68), za mjesto spoja ( $x = 0$ ), poprečna sila iznosi:

$$Q_r^k(x = 0) = 78354,256 \text{ N}. \quad (4.1.69)$$

Općenite izraze za radijalni pomak i kut zakreta konusne ljuske, s pretpostavljenim smjerovima poprečne sile i momenta savijanja, možemo izraziti kao:

$$w_k = -\alpha_{11}^k \cdot (X_3 - Q_r^k) + \alpha_{12}^k \cdot X_4 + w_k^m, \quad (4.1.70)$$

$$\alpha_k = \alpha_{21}^k \cdot (X_3 - Q_r^k) - \alpha_{22}^k \cdot X_4 + \alpha_k^m. \quad (4.1.71)$$

Uplivni koeficijenti  $\alpha_{11}^k$ ,  $\alpha_{12}^k$ ,  $\alpha_{21}^k$  i  $\alpha_{22}^k$  računaju se prema izrazima (3.2.53), (3.2.54) i (3.2.55). Nakon računanja uplivnih koeficijenata te njihovog uvrštavanja u izraze (4.1.70) i (4.1.71), dobivamo sredene izraze za ukupni radijalni pomak i ukupni kut zakreta konusne ljuske:

$$w_k = -0,02747 \cdot (X_3 - 78354,256) + 2,75391 \cdot 10^{-4} \cdot X_4 + 0,0435, \quad (4.1.72)$$

$$\alpha_k = 2,75391 \cdot 10^{-4} \cdot (X_3 - 78354,256) - 5,52076 \cdot 10^{-6} \cdot X_4 - 2,531 \cdot 10^{-8}. \quad (4.1.73)$$

Nakon što smo dobili sve izraze za radijalne pomake i kuteve zakreta, uvrštavamo ih u rubne uvjete, odnosno u izraze od (4.1.5) do (4.1.8). Nakon sređivanja i rješavanja sustava četiri jednačbe s četiri nepoznanice, dobivamo poprečne sile i momente savijanja:

$$X_1 = -17,45 \text{ N/mm} \quad (4.1.74)$$

$$X_2 = 1023 \text{ Nmm/mm} \quad (4.1.75)$$

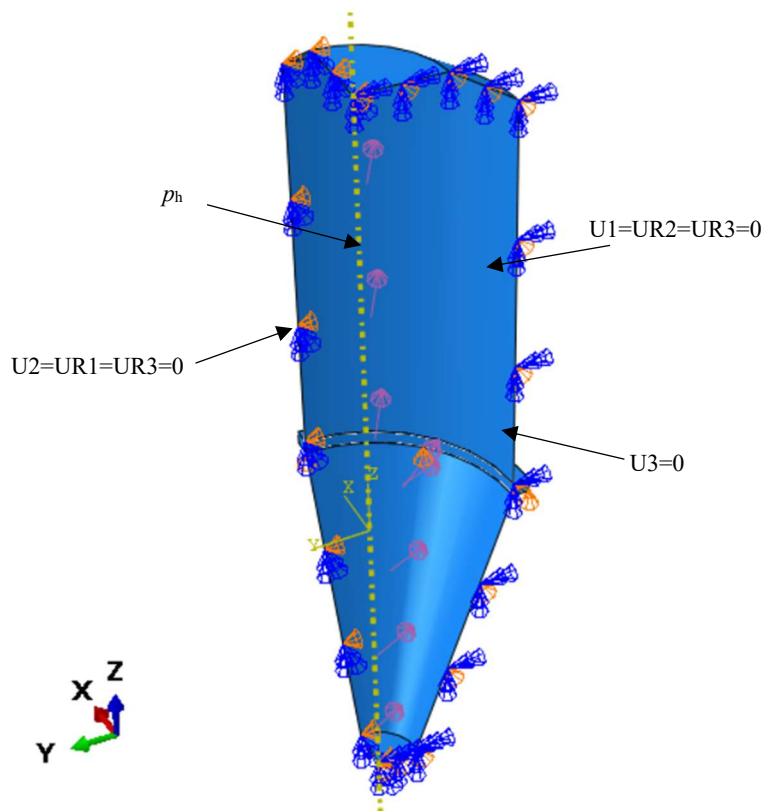
$$X_3 = -351,5 \text{ N/mm} \quad (4.1.76)$$

$$X_4 = -15860 \text{ Nmm/mm} \quad (4.1.77)$$

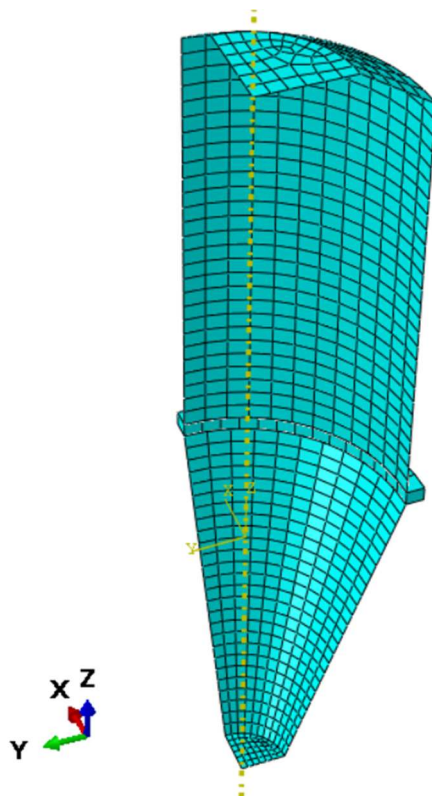
## 4.2. Rješenje pomoću metode konačnih elemenata

Problem je riješen na sličan način kao i u poglavlju 3.2.2. Na slici 37. je prikazan model pojednostavljenog silosa s opterećenjem i rubnim uvjetima. Kako je silos osnosimetričan, osnosimetrično opterećen i osnosimetrično oslonjen moguće je napraviti četvrtinu modela kako bismo smanjili opseg posla, ostatak modela mijenjamo sa rubnim uvjetima simetrije. Napravljeni su rubni uvjeti koji onemogućuju pomak modela u smjeru vertikalne osi.

Na slici 38. je prikazana mreža konačnih elemenata. Za kreiranje mreže su korišteni ljuskasti konačni elementi tipa S4R i C3D4.

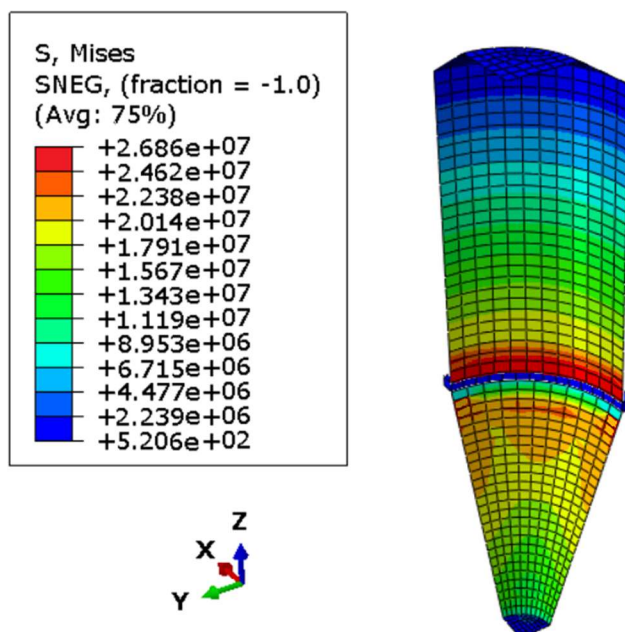


Slika 37. Prikaz pojednostavljenog silosa s rubnim uvjetima i opterećenjem



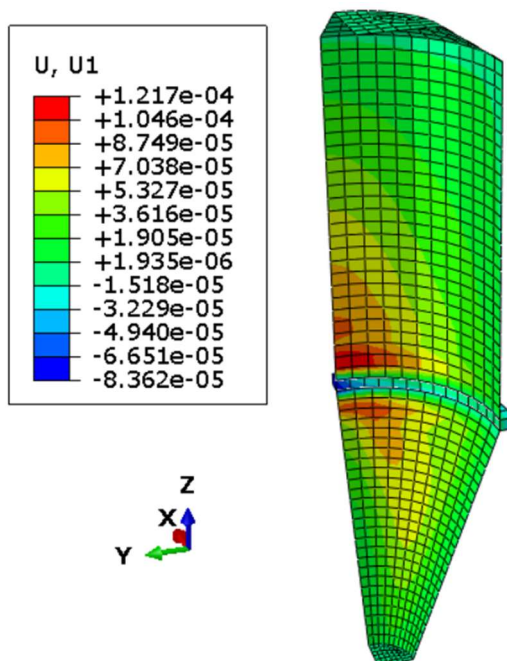
Slika 38. Prikaz mreže konačnih elemenata

Na slici 39. je prikazana raspodjela napreznja po von Mises-u. Najveće napreznje se javlja oko prstena, odnosno na osloncu i to napreznje iznosi oko 26.86 MPa.



Slika 39. Prikaz raspodjele napreznja po von Mises-u u Paskalima

Na slici 40. je prikazana raspodjela radijalnog pomaka u silosu. Budući da je za smjer pomaka odabran U1 (pomaci u smjeru osi  $x$ ), iznos pomaka se očitava na rubu okomitom na os  $x$  (lijevi rub). Najveći pomak se javlja malo iznad prstena i iznosi oko 0,12 mm.



Slika 40. Prikaz raspodjele radijalnog pomaka silosa u metrima

### 4.3. Usporedba analitičkih i grafičkih rješenja cilindra

Izraz za raspodjelu radijalnog pomaka cilindrične ljske glasi [4]:

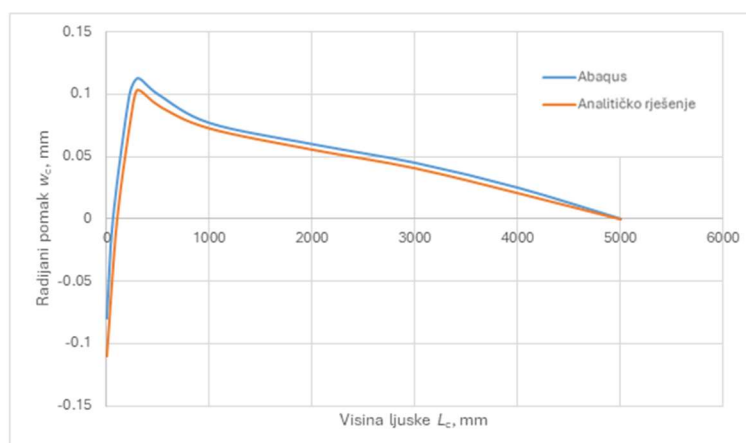
$$w_c = -\frac{X_3}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot \cos(x\beta_c) + \frac{X_4}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot [\cos(x\beta_c) - \sin(x\beta_c)] + w_c^m. \quad (4.1.78)$$

Izraz za raspodjelu kuta zakreta pomaka cilindrične ljske glasi [4]:

$$\alpha_c = -\frac{X_3}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^3} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot [\cos(x\beta_c) + \sin(x\beta_c)] + \frac{X_4}{2 \cdot D_c \cdot \beta_c^2} \cdot e^{-x\beta_c} \cdot \cos(x\beta_c) + \alpha_c^m. \quad (4.1.79)$$

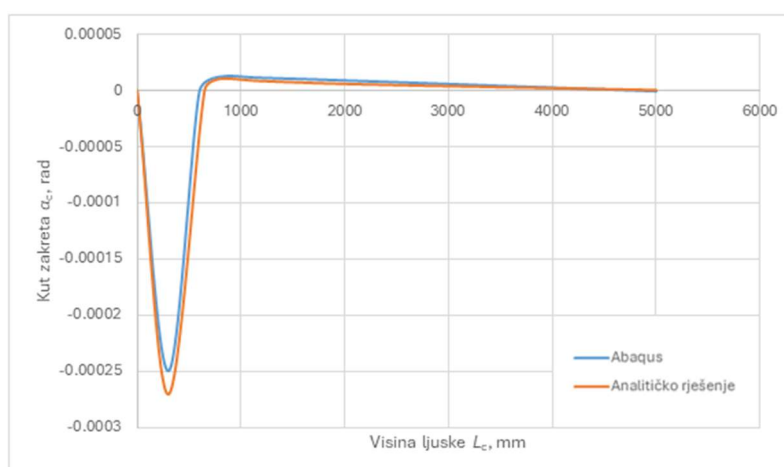
U oba se izraza pojavljuje član  $\beta_c$  koji se računa prema izrazu (3.1.17), dok se koordinata  $x$  kreće u rasponu od nule do visine cilindra  $L_c$  (5 m).

Na slici 41. prikazani su rezultati radijalnog pomaka cilindra po visini ljske koji su dobiveni analitičkim i numeričkim putem.



Slika 41. Dijagramski prikaz usporedbe rezultata radijalnog pomaka po visini cilindra

Na slici 42. prikazani su rezultati kuta zakreta cilindra po visini ljske koji su dobiveni analitičkim i numeričkim putem.



Slika 42. Dijagramski prikaz usporedbe rezultata kuta zakreta po visini cilindra

#### 4.4. Usporedba analitičkih i grafičkih rješenja konusa

U slučaju konusne ljuske, varijabla eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija glasi:

$$\xi = \int_0^S \beta^k(s) ds = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}} \cdot \int_0^S \sqrt{\frac{1}{\frac{(5116,658-s) \cdot \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}}} ds. \quad (4.1.80)$$

Izraz (4.1.80) je pojednostavljen pomoću aplikacije *Photomath*<sup>®</sup> [10] koja služi kao pomoćni alat pri računanju:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2}} \cdot \left( -\frac{2\sqrt{5} \cdot 658 \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 70^\circ - s \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sqrt{25583290 \cdot \sin 140^\circ}}{50 \cdot \cos 70^\circ} \right). \quad (4.1.81)$$

Raspodjele radijalnog pomaka i kuta zakreta duž konusne ljuske opisujemo preko sljedećih izraza:

$$w_k = -\alpha_{11}^k \cdot (X_3 - Q_r^k) \cdot f_4' + \alpha_{12}^k \cdot X_4 \cdot f_3' + w_k^m, \quad (4.1.82)$$

$$\alpha_k = \alpha_{21}^k \cdot (X_3 - Q_r^k) \cdot f_1' - \alpha_{22}^k \cdot X_4 \cdot f_4' + \alpha_k^m. \quad (4.1.83)$$

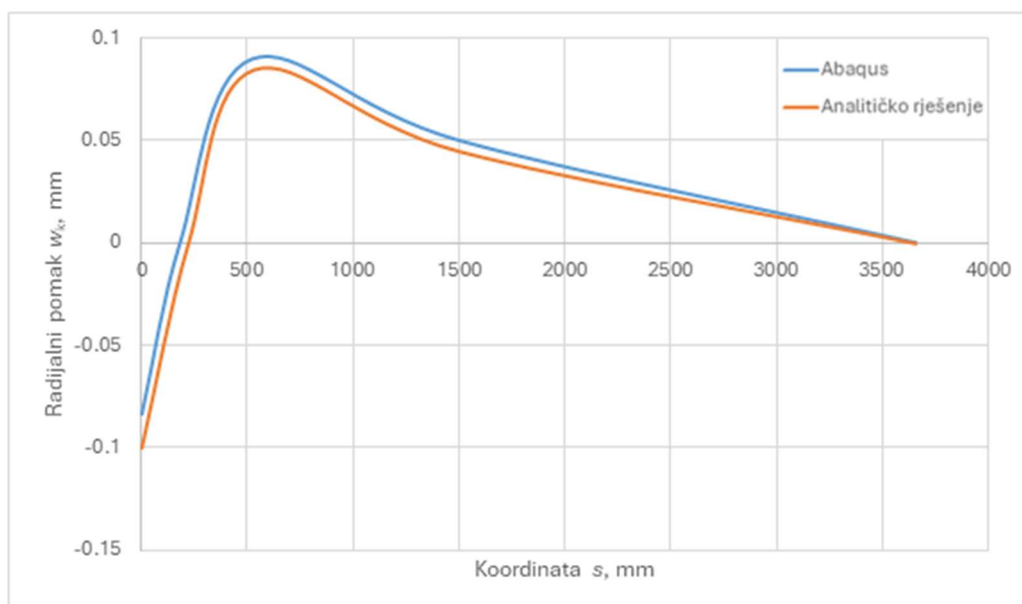
Funkcije  $f_1'$ ,  $f_3'$  i  $f_4'$  definirane su kao:

$$f_1' = e^{-\xi} \cdot (\sin \xi + \cos \xi), \quad (4.1.84)$$

$$f_3' = e^{-\xi} \cdot (\cos \xi - \sin \xi), \quad (4.1.85)$$

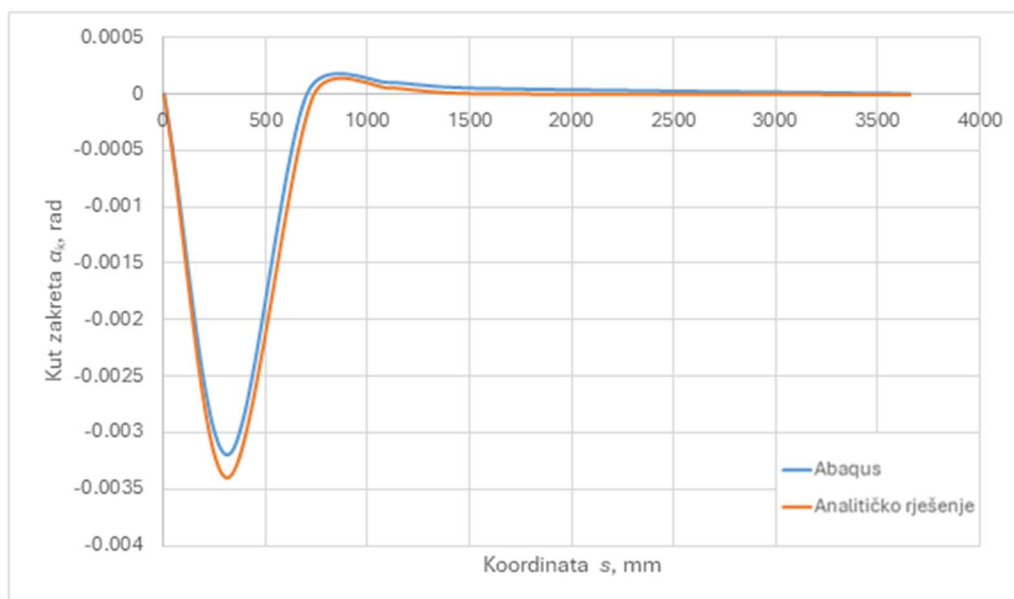
$$f_4' = e^{-\xi} \cdot \cos \xi. \quad (4.1.86)$$

Na slici 43. prikazani su rezultati radijalnog pomaka konusa po koordinati  $S$  (koja se kreće u rasponu od nule do 3654,76 mm) koji su dobiveni analitičkim i numeričkim putem.



Slika 43. Dijagramski prikaz usporedbe rezultata radijalnog pomaka po koordinati  $S$  konusa

Na slici 44. prikazani su rezultati kuta zakreta konusa po koordinati  $S$  koji su dobiveni analitičkim i numeričkim putem.



**Slika 44.** Dijagramski prikaz usporedbe rezultata kuta zakreta po koordinati  $s$  konusa

Kao što je vidljivo sa slika 41.-44., postoje omanje razlike u iznosima radijalnih pomaka i kuta zakreta za cilindar i konus, ali se analizama dobiju praktički isti oblici krivulja. Stoga možemo zaključiti da su rješenja koja su dobivena numeričkim putem ispravna, a kako bismo dobili rezultate i po iznosu iste analitičkim rješenjima trebali bismo povećavati broj konačnih elemenata.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu proračunat je vertikalni silos za cement koji služi za skladištenje veće količine građevinskog cementa. Optimalne dimenzije silosa određene su pomoću programa *Silostress tool*<sup>®</sup> u ovisnosti o gustoći i volumenu tereta, obliku poprečnog presjeka silosa te načinu opterećenja.

U verifikacijskim primjerima provedene su analize s različitim skupinama elemenata i utvrdilo se da unutar svake skupine elemenata postoji tip elementa koji zadovoljava brzinom konvergencije prema analitičkom rješenju maksimalnog radijalnog pomaka. U primjeru s cilindričnim spremnikom dobiveno je izvrsno poklapanje rezultata, dok je u primjeru s posudom dobiveno vrlo dobro poklapanje rezultata.

U analitičkom proračunu silosa najprije je rastavljen spoj cilindra, konusa i prstena te su dobiveni radijalni pomaci i kutevi zakreta za pojedine dijelove. Nakon njihovog uvrštavanja u rubne uvjete izračunate su nepoznate poprečne sile i momenti savijanja pomoću kojih su određene raspodjele radijalnog pomaka i kuta zakreta elemenata. U numeričkom proračunu provedenom u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup> kreirani su elementi silosa, određen im je materijal, međusobna interakcija, broj i tip konačnih elemenata, rubni uvjeti i opterećenje te su provedene analize. Usporedbom rješenja analitičkog i numeričkog proračuna uočene su razlike u iznosima veličina što može biti posljedica korištenja relativno malog broja konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*<sup>®</sup>. Razlog tome je korištenje studentske verzije programskog paketa koji ima ograničenje s obzirom na broj čvorova konačnih elemenata.

Budući da su krivulje veličina dobivene analitičkim i numeričkim proračunom praktički istih oblika te da su dobiveni rezultati istog reda veličine, može se zaključiti da je numerički proračun vertikalnog silosa dostatan. Za bolje poklapanje rezultata valjalo bi preciznije provesti analitički proračun kao i povećavati broj konačnih elemenata u *Abaqus*<sup>®</sup>-u do zadovoljavajuće malih razlika.

---

**LITERATURA**

- [1] Skejić, D., Bolanča, M.: Projektiranje silosa s aspekta načina protoka materijala pri pražnjenju, Građevinski fakultet, Zagreb 2013.
- [2] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, Zagreb 2004
- [3] ABAQUS, „Abaqus Software“, Version 6.14, Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2014.
- [4] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2011.
- [5] ABAQUS, „Abaqus Documentation“, Version 6.14, Dassault Systemes Corp., Providence, RI, USA, 2014.
- [6] European Committee for Standardization (CEN) 2006. EN 1991-4: Eurocode 1 - Actions on structures - Part 4: Silos and tanks.
- [7] <https://machineryline.hr/-/prodaja/silos-za-cement/Elkon/SILOS-na-cement-75-ton--21031911270737199900>, 17.2.2025.
- [8] Schulze, D. 2011. Software zum Herunterladen: Silo Stress Tool. Home Page <http://www.dietmar-schulze.de/>
- [9] Skozrit, I.: Uvod u čvrstoću konstrukcija – vježbe, Zagreb, 2015.
- [10] Aplikacija *Photomath*