

Određivanje geometrije 3D ispisane konusne replike krvne žile

Suton, Dina

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:049908>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-27**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentorica:

doc. dr. sc. Lana Virag, mag. ing

Studentica:

Dina Suton, bacc. ing

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentorici doc. dr. sc. Lani Virag na pruženoj pomoći u izradi ovog rada i prenesenom znanju.

Zahvaljujem se svim svojim prijateljima, bližnjima i obitelji na pruženoj podršci tokom cijelog mog studija.

Dina Suton



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 25 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 25 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Dina Suton**

JMBAG: 0035211731

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Određivanje geometrije 3D ispisane konusne replike krvne žile**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Determination of 3D printed conic blood vessel replica**

Opis zadatka:

Metode slikovnog snimanja u medicini daju nam informacije o geometriji krvnih žila pod fiziološkim krvnim tlakom. Pravilnim oblikovanjem materijala korištenih za 3D ispis može se napraviti replika neopterećene arterije koja se u fiziološkom rasponu tlakova ponaša slično stvarnoj žili, iako su materijali krvne žile i replike različiti. Mehaničko ponašanje 3D ispisanih polimernih materijala može se dobro opisati Neo-Hooke materijalnim modelom, dok je ponašanje žila vrlo složeno.

U skladu s navedenim potrebno:

1. Za ravnu cilindričnu žilu za koju je poznata promjena unutarnjeg promjera s krvnim tlakom potrebno je definirati neopterećenu geometriju replike koja se u fiziološkom području ponaša isto kao stvarna arterija. Prilikom definiranja replike potrebno je odrediti odgovarajući neopterećeni unutarnji radijus i debljinu stijenke replike za zadani materijal.
2. Razviti teorijski model deformiranja konusnog cilindra te ponoviti zadatak iz prvog koraka.
3. Razvijeni postupak potrebno je segmentalno primijeniti na aneurizmu abdominalne aorte tako da se može definirati replika neopterećene geometrije aneurizme traženog unutarnjeg radijusa:
 - o izrađena od jednog materijala i promjenjive debljine stijenke,
 - o približno konstantne debljine stijenke izrađena od više materijala različitih svojstava.
4. Za tako definirane geometrije aneurizme pomoću metode konačnih elemenata treba odrediti deformiranu geometriju u sistoli i dijastoli.
5. Potrebno je naći relativnu grešku izračunatog i ciljanog unutarnjeg radijusa aorte te usporediti točnost replika izrađenih od jednog i više materijala.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

28. studeni 2024.

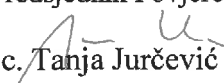
30. siječnja 2025.

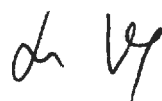
6., 7. i 10. veljače 2025.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc.dr.sc. Lana Virag

Prof. dr. sc.  Tanja Jurčević Lulić



Sadržaj

Sadržaj	1
Popis slika	3
Popis tablica	5
Popis oznaka	6
Sažetak	8
Abstract	9
1 Uvod	10
1.1 Krvožilni sustav u čovjeka	11
1.1.1 Aneurizma	11
1.2 Tehnologija 3D printanja	12
1.3 Hiperelastični materijali	12
2 Matematički model za dobivanje neopterećene geometrije ravne krvne žile	14
2.1 Opis gibanja materijalnog volumena	14
2.2 Gradijent deformiranja	15
2.3 Cauchyjev tenzor naprezanja	16
2.4 Gradijent deformiranja za pojednostavljeni osnosimetrični model ravne krvne žile	17
2.5 Neo-Hookeov materijalni model	19
2.6 Jednadžba tlaka	19
2.7 Uvjet nestlačivosti	20
3 Matematički model za dobivanje neopterećene geometrije konusne krvne žile	21
4 Numerički postupak računanja neopterećene geometrije ravne krvne žile	23
4.1 Newton-Raphsonov iterativni postupak	24

4.2	Numerička integracija - Simpsonova formula	25
4.3	Algoritam za izračun neopterećene geometrije modela ravne krvne žile uz zadanu konstantu materijala C_1	25
4.4	Implementacija algoritma u programskom paketu Python	27
4.4.1	Algoritam za računanje neopterećene geometrije ravne žile uz konstantnu debljinu stijenke h	28
4.5	Rezultati numeričke metode za ravnu krvnu žilu	29
5	Primjena numeričke metode na model konusne žile	32
6	Formiranje modela aneurizme aorte	35
6.1	Model aneurizme aorte od jednog materijala	37
6.1.1	Primjena metode konačnih elemenata na model aorte s ane- urizmom od jednog materijala	39
6.1.2	Primjena metode konačnih elemenata na model aorte s ane- urizmom približno konstantne debljine od 2mm	43
7	Zaključak	47
	Literatura	49
	Prilozi	50

Popis slika

1	Odnos naprezanja i deformacija za idealno-elastičan i hiperelastičan materijal [5]	13
2	Grafički prikaz gibanja materijalnog tijela [6]	15
3	Grafički prikaz deformacije elementa dX [7]	15
4	Geometrija konusne krvne žile	21
5	Grafički prikaz postupka izračuna neopterećene geometrije	23
6	Grafički prikaz Newton-Raphsonovog postupka [8]	24
7	Pojednostavljena shema algoritma	26
8	Usporedba unutarnjih radijusa ravne krvne žile pri dijastoli	30
9	Usporedba unutarnjih radijusa ravne krvne žile pri sistoli	31
10	Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1=0.3435$ pri dijastoli	33
11	Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1=0.3435$ pri sistoli	33
12	Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1 = 0.2$ pri dijastoli	34
13	Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1 = 0.2$ pri sistoli .	34
14	Grafički prikaz zadane geometrije aneurizme	37
15	Koordinate neopterećene geometrije modela aneurizme od jednog materijala	38
16	Model aneurizme od materijala FLX9840 DM, $C_1 = 0.2$ MPa	38
17	Pojednostavljeni model podvrgnut MKE analizi, rubni uvjeti i opterećenje	39
18	Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku	40
19	Polje cirkularnog naprezanja modela aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku	40
20	Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku	41
21	Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od jednog materijala pri dijastoličkom tlaku	41
22	Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od jednog materijala pri dijastoličkom tlaku	42
23	Oblik aneurizme od 42 različita materijala	43

24	Pojednostavljeni model aneurizme od 42 različita materijala	44
25	Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od 42 različita materijala pri sistoličkom tlaku	44
26	Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od 42 različita materijala pri sistoličkom tlaku	45
27	Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od 42 različita materijala pri dijastoličkom tlaku	45
28	Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od 42 različita materijala pri dijastoličkom tlaku	46

Popis tablica

1	Poznate dimenzije krvne žile	23
2	Ulazni i izlazni podaci algoritma	25
3	Rezultati numeričke analize za ravnu žilu	29
4	Rezultati MKE analize i usporedba s numeričkim postupkom	30
5	Geometrijske karakteristike konusne žile	32
6	Ulazni podaci - opterećena geometrija aorte s aneurizmom	36
7	Greška - Model aneurizme od jednog materijala	42
8	Greška - Model aneurizme konstantne debljine	46

Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
A	mm^2	trenutna površina
A_0	mm^2	početna površina
\mathbf{b}	-	lijevi Cauchy-Green tenzor deformiranja
\mathbf{C}	-	desni Cauchy-Green tenzor deformiranja
C_1	MPa	materijalna konstanta Neo-Hooke materijalnog modela
F	N	sila
F_{ij}	-	gradijent deformiranja
\mathbf{I}	-	jedinična matrica
I_1	-	prva invarijanta lijevog Cauchy-Green tenzora deformiranja
I_2	-	druga invarijanta lijevog Cauchy-Green tenzora deformiranja
J	-	Jakobijan
L	mm	aksijalna duljina geometrije u neopterećenom stanju
l	mm	aksijalna duljina geometrije u opterećenom stanju
n_z	-	broj diskretizacijskih točaka konusa
\mathbf{P}	MPa	prvi <i>Piola-Kirchhoff</i> tenzor naprezanja
P	MPa	tlak
p	MPa	tlak
p_d	MPa	dijastolički tlak
p_s	MPa	sistolički tlak
R	mm	radijus neopterećene geometrije
r	mm	radijus opterećene geometrije
R_d	mm	vanjski radijus pri dijastoli
r_d	mm	unutarnji radijus pri dijastoli
R_v	mm	vanjski radijus velike baze konusa
r_v	mm	unutarnji radijus velike baze konusa
R_s	mm	vanjski radijus pri sistoli
r_s	mm	unutarnji radijus pri sistoli
R_m	mm	vanjski radijus male baze konusa
r_m	mm	unutarnji radijus male baze konusa
R_0	mm	vanjski neopterećeni radijus
r_0	mm	unutarnji neopterećeni radijus

\mathbf{S}	mm	drugi <i>Piola-Kirchhoff</i> tenzor naprezanja
t	s	vrijeme u referentnom trenutku
t_0	s	vrijeme u početnom trenutku
u_i	mm	pomak
v	mm ³	volumen geometrije u opterećenom stanju
V	mm ³	volumen geometrije u neoštećenom stanju
W	-	energija deformiranja
ε	mm	deformacija
λ_i	mm/mm	istezanje
x_i	mm	prostorne koordinate
X_j	mm	prostorne koordinate
$\boldsymbol{\sigma}$	-	<i>Cauchyjev</i> tenzor naprezanja
σ_i	MPa	naprezanje u smjeru osi i

Sažetak

3D ispisom moguće je napraviti umjetnu repliku neopterećene arterije koja se u fiziološkom rasponu tlakova ponaša slično stvarnoj žili. Korišteni polimerni materijali opisani su Neo-Hooke materijalnim modelom. Cilj ovog rada je određivanje geometrije 3D ispisane konusne replike krvne žile te priprema modela aneurizme aorte za proizvodnju 3D ispisom. Modeli su dobiveni numeričkom metodom temeljenom na mehanici kontinuuma. Iz poznatih podataka dimenzija pravih ljudskih krvnih žila pri dijastoličkom i sistoličkom tlaku iterativnim postupkom izračunava se neopterećena geometrija replike krvne žile prigodna za 3D ispis. U radu je izveden numerički postupak, primijenjen je na konusnu žilu i aneurizmu te su modeli verificirani metodom konačnih elemenata.

Ključni pojmovi: replika krvne žile, konusna krvna žila, aneurizma, 3D ispis, neopterećena geometrija, mehanika kontinuuma, Neo-Hooke materijalni model

Abstract

Artificial unloaded artery replicas, 3D-printed using Neo-Hookean material models, simulate the mechanical behavior of real vessels under physiological pressure ranges. This research focuses on defining the geometry of 3D-printed conic blood vessel replicas and preparing aortic aneurysm models for 3D manufacturing. Employing continuum mechanics, an iterative numerical approach determines the unloaded vessel geometry based on diastolic and systolic human vessel dimensions. Finite element analysis was employed to validate the resulting conic blood vessel and aneurysm models.

Key words: blood vessel replica, conic blood vessel, aneurysm, 3D printing, unloaded geometry, continuum mechanics, Neo-Hookean material model

1 Uvod

Primjena tehnologija 3D printanja u medicini neprestano raste. Ova tehnologija transformira način na koji liječnici pristupaju liječenju i otvara vrata inovacijama koje znatno utječu na ishode liječenja. 3D printanje omogućuje proizvodnju prilagođenih implantanata poput proteza, umjetnih kukova, kralježaka te umjetnih zubi. Koristi se za izradu personaliziranih proteza i ortoza prilagođenih dimenzija što poboljšava udobnost i funkcionalnost. Liječnici koriste 3D printane modele organa ili kostiju kako bi simulirali složene operacije prije nego što ih izvedu na pacijentu. Istražuju se nove tehnologije kao što je 3D bioprintanje koje bi omogućile ispis živog tkiva i organa čime bi se smanjila potreba za donorima. U ovom radu fokus je na primjeni tehnologije 3D printanja u modeliranju ljudskih krvnih žila, krvnih žila konusne geometrije te žila s nepravilnošću u obliku aneurizme. Takvi modeli izrađeni od umjetnih materijala služili bi za istraživanja krvožilnog sustava. Krvne žile u ljudskom tijelu neprestano su opterećene tlakom. Krvni tlak je pritisak krvi na stijenke krvnih žila odnosno arterija u svakom dijelu tijela. Krv teče kroz krvne žile upravo zato što se nalazi pod određenim tlakom. Tlak se stvara radom srca kao pumpe te se mijenja u ciklusima. Pri svakom izbacivanju krvi iz srca, tlak se povisuje i dostiže maksimalnu vrijednost. Ta pojava se naziva sistola te je sistolički tlak najviši tlak u ciklusu. Kod ulijevanja krvi u srce, tlak opada. Tlak je u tom trenutku najmanji i naziva se dijastolički tlak. Dimenzije krvne žile poznate su u opterećenom stanju. Izrađeni model krvne žile je u neopterećenom stanju pri kojem dimenzije prave krvne žile nisu poznate budući da su one uvijek pod tlakom. Pri modeliranju potrebno je odrediti dimenzije kao što su radijus i debljina žile pri neopterećenom stanju. Cilj je da ponašanje umjetne žile bude jednako ponašanju prave žile pri istim opterećenjima. Potrebno je razviti numerički postupak koji će kao ulaz uzimati izmjerenu opterećenu geometriju prave žile i kao izlaz davati neopterećenu geometriju modela žile od hiperelastičnog materijala koja će se pri rasponu opterećenja između dijastoličkog i sistoličkog tlaka deformirati kao prava žila. Rezultati numeričke metode mogu se provjeriti primjenom metode konačnih elemenata na model izračunatih dimenzija. Neopterećeni model opterećuje se odgovarajućim unutarnjim tlakom te se dimenzije deformirane geometrije uspoređuju s poznatim dimenzijama prave krvne žile. Glavni cilj je razviti modele umjetnih krvnih žila, provjerene simulacijama, koje će se moći

izrađivati 3D printanjem od hiperelastičnih materijala i koristiti u medicinskim istraživanjima.

1.1 Krvožilni sustav u čovjeka

Krvožilni sustav je sustav organa koji prenosi tvari iz i u stanice cijelog tijela. Uravnotežuje tjelesnu temperaturu i pH vrijednosti. Čovjek ima zatvoreni krvotok čiji su glavni dijelovi srce, krv i krvne žile. Krv prolazi žilama kroz cijelo ljudsko tijelo. Venska krv (siromašna kisikom) vraća se iz tijela u desnu pretklijetku srca, prolazi kroz zalistak u desnu klijetku, a zatim kroz plućnu arteriju odlazi u pluća. U plućima se kisik i ugljikov dioksid izmjenjuju difuzijom, pa se krv obogaćena kisikom vraća kroz plućne vene u lijevu stranu srca. Opisani tok naziva se malim optokom krvi. Lijeva klijetka pumpa krv u aortu i dalje u tijelo kroz arterije koje kisik i hranjive tvari dostavljaju stanicama. Kisikom osiromašena krv vraća se kroz gornju i donju šuplju venu u desnu pretklijetku srca, čime se ciklus ponavlja. Ovaj proces se naziva veliki optok krvi. Srce osigurava stalnu opskrbu kisikom i hranjivim tvarima te uklanja otpadne tvari poput ugljikovog dioksida, omogućujući pravilno funkcioniranje organizma. [1]

1.1.1 Aneurizma

Aneurizma predstavlja abnormalno proširenje krvne žile koje nastaje uslijed slabljenja njenog zida. Ovo izbočenje nalik balonu može pući, uzrokovati unutrašnje krvarenje te, vrlo često, smrt. [2]

Postoje različite vrste aneurizmi koje se nazivaju prema dijelu tijela u kojem se pojavljuju:

- Aneurizmu aorte – koja zahvaća glavnu tjelesnu arteriju.
- Aneurizmu abdominalne aorte – koja zahvaća dio aorte u trbušnom području.
- Aneurizmu torakalne aorte – koja zahvaća dio aorte u prsnoj koži.
- Aneurizmu mozga – koja zahvaća krvne žile koje opskrbljuju mozak.
- Perifernu aneurizmu – koja zahvaća krvne žile u drugim dijelovima tijela, poput nogu, prepona ili vrata. [2]

Kada aneurizma pukne, nastaje unutarnje krvarenja koje može biti opasno po život. manje aneurizme moguće je liječiti lijekovima. Rizik od njihovog razvoja može se smanjiti održavanjem zdravog načina života. Ako je aneurizma veća ili ako brzo raste potrebna je kirurška intervencija. [2]

1.2 Tehnologija 3D printanja

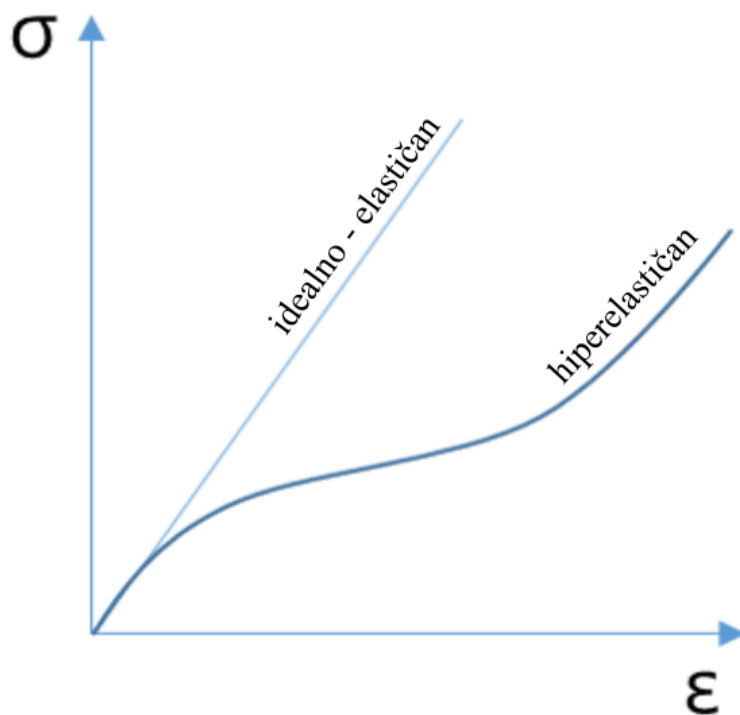
3D printanje način je brze izrade modela u kojem se posebnim uređajima izrađuju (ispisuju) fizički predmeti prethodno modelirani CAD programima. Trodimenzionalni ispis, posebno ispis u boji, omogućava razvojnim inženjerima i dizajnerima bolji uvid u proces dizajniranja. Omogućava isticanje različitih parametara, rano prepoznavanje mogućih grešaka te njihovo brzo i učinkovito ispravljanje. Korištenjem 3D-ispisa znatno se skraćuje vrijeme izrade i povećava kvaliteta modela i prototipa. Područja primjene 3D pisača obuhvaćaju arhitekturu, dizajn, nakit, informatiku, obrazovanje, strojarstvo, aeronautiku, metalurgiju, modelarstvo, medicinu, biomedicinu, geoinformatiku, molekularnu kemiju i mnoga druga područja. [3]

3D pisari su uređaji s numeričkim upravljanjem (NC) koji rade u tri osi (x, y i z). Softver najprije pretvara 3D CAD nacrt u poprečne presjeke, odnosno tanke slojeve debljine od 0,09 do 0,20 mm, ovisno o željenoj preciznosti. Na temelju toga generiraju se instrukcije za pisar, prilagođene odabranom materijalu i načinu rada. Pisari mogu stvarati modele iz tekućine, praha ili taljenjem različitih polimera. [3]

1.3 Hiperelastični materijali

Hiperelastični materijal je vrsta modela za materijale koji su idealno elastični. Odnos naprezanja i deformacije kod ovih materijala temelji se na funkciji gustoće energije deformacije. Hiperelastični materijali su posebna vrsta Cauchyjevih elastičnih materijala. Za mnoge materijale linearni elastični modeli ne opisuju precizno njihovo stvarno ponašanje. Najbolji primjer hiperelastičnih materijala je guma, čiji se odnos naprezanja i deformacije može opisati kao nelinearno elastičan, izotropan i nekompresibilan. Hiperelastičnost omogućuje modeliranje ponašanja ovakvih materijala. Na primjer, neispunjeni vulkanizirani elastomeri često se ponašaju u skladu s hipere-

lastičnim modelima. Također, punjeni elastomeri i biološka tkiva često se modeliraju koristeći ovu idealizaciju. [4]



Slika 1: Odnos naprezanja i deformacija za idealno-elastičan i hiperelastičan materijal [5]

2 Matematički model za dobivanje neopterećene geometrije ravne krvne žile

Mehanika kontinuuma je grana mehanike koja na makroskopskoj razini proučava prijenos sila kroz čvrsta tijela i fluide i njihovo gibanje te deformiranje pomoću kontinuuma. Model materijalnog kontinuuma temelji se na pretpostavci da materija koja čini tijelo neprekidno i potpuno ispunjava prostor koji zauzima to tijelo. Materijalno tijelo je dio prostora volumena V koji ispunjava tvar mase m omeđen vanjskom površinom S .

2.1 Opis gibanja materijalnog volumena

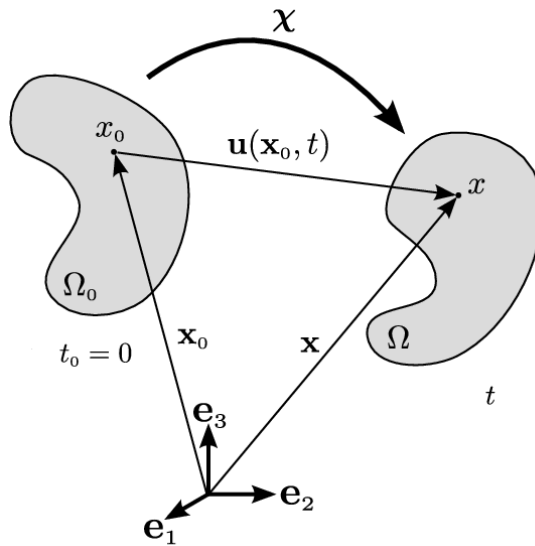
Položaj svake točke materijalnog tijela moguće je odrediti vektorom položaja koji iskazuje položaj točke u nekom trenutku t u odnosu na položaj te iste točke u početnom trenutku t_0 :

$$x_i = x_i(X_j, t) \quad (1)$$

gdje su indeksi i i j jednaki 1, 2 i 3. X_j je vektor položaja u trenutku t_0 , a x_i vektor položaja u trenutku t . Slika (2) prikazuje početnu konfiguraciju Ω_0 u početnom trenutku t_0 , trenutnu konfiguraciju Ω i vektor pomaka u . Vektor pomaka u povezuje položaj čestice u početnoj konfiguraciji s trenutnom konfiguracijom:

$$u_i = u_i(X_j, t) \quad (2)$$

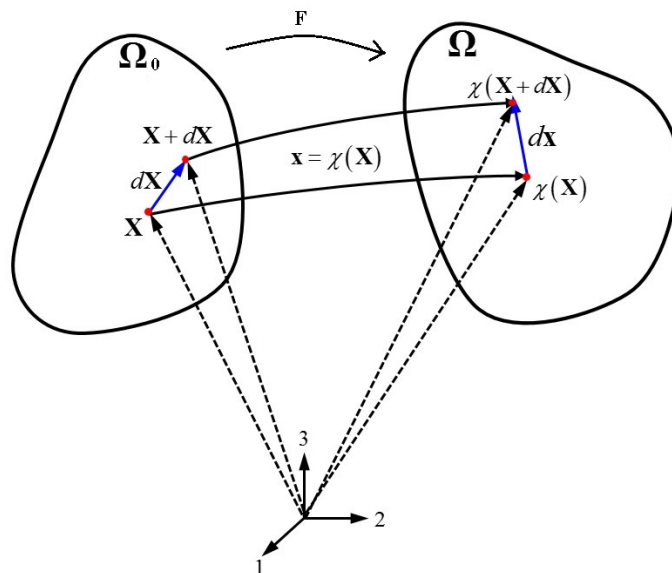
gdje su indeksi i i j jednaki 1, 2 i 3. X_j je vektor položaja u trenutku t_0 , a u_i vektor pomaka.



Slika 2: Grafički prikaz gibanja materijalnog tijela [6]

2.2 Gradijent deformiranja

Tenzor gradijenta deformiranja \mathbf{F} linearni je operator koji povezuje diferencijalni element dX u trenutnoj konfiguraciji s diferencijalnim elementom dx u početnoj konfiguraciji.



Slika 3: Grafički prikaz deformacije elementa dX [7]

Tenzor gradijenta deformiranja u indeksnom zapisu izgleda ovako:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (3)$$

Budući da je geometrija ravne krvne žile osnosimetrična prikladnije je koristiti cilindrični koordinatni sustav. Gradijent deformiranja u cilindričnom koordinatnom sustavu je:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R\partial\Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r\partial\varphi}{\partial R} & \frac{r\partial\varphi}{R\partial\Theta} & \frac{r\partial\varphi}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R\partial\Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2.3 Cauchyjev tenzor naprezanja

Prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja za jednoosno naprezanje definiran je kao:

$$\mathbf{P} = \frac{F}{A_0} \quad (5)$$

gdje je F sila, a A_0 površina u neopterećenom stanju. Ovaj tenzor primjenjiv je u slučaju malih deformacija. Cauchyjev tenzor naprezanja definiran je kao omjer sile i trenutne površine:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{F}{A}. \quad (6)$$

Veza između jednadžbi (5) i (6) je:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

gdje je J Jakobijeva matrica. Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor jednoosnog naprezanja definiran je kao:

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{F^2}{A_0}}. \quad (8)$$

Veza između izraza (5) i (8) je:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}. \quad (9)$$

Uvrštavanjem izraza (7) u (9) dobiva se veza između drugog Piola-Kirchhoffovog i Cauchyjevog tenzora naprežanja:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (10)$$

S je moguće izraziti preko energije deformiranja W :

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (11)$$

gdje je \mathbf{C} desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti. Izjednačavanjem izraza (10) i (11) dobiva se Cauchyjev tenzor naprežanja iz kojeg se preko energije deformiranja može izračunati naprežanje hiperelastičnog materijala:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (12)$$

2.4 Gradijent deformiranja za pojednostavljeni osnosimetrični model ravne krvne žile

Deformiranje krutog tijela u cilindričnim koordinatama definirano je izrazima:

$$r = \lambda_r \cdot R \quad (13)$$

$$\varphi = \lambda_\theta \cdot \Theta \quad (14)$$

$$l = \lambda_z \cdot L \quad (15)$$

gdje su λ_r , λ_θ i λ_z istezanja u pripadajućim smjerovima. Nakon uvrštavanja izraza (13), (14) i (15) u izraz za gradijent deformiranja (4), \mathbf{F} postaje:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Iz izraza (15) proizlazi:

$$\lambda_z = \frac{l}{L}. \quad (17)$$

Budući da nema kutne deformacije, $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ iznosi 1, pa je:

$$\lambda_\theta = \frac{r}{R}. \quad (18)$$

Veza između volumena u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji je:

$$v = J \cdot V. \quad (19)$$

Zbog nestlačivosti krutog tijela volumeni prije i poslije deformiranja su jednaki pa je Jakobijeva matrica J jednaka 1 iz čega slijedi:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_r \cdot \lambda_\theta \cdot \lambda_z = 1, \quad (20)$$

pa je:

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_z \cdot \lambda_\theta}. \quad (21)$$

Postoje dva tenzora deformiranosti, desni i lijevi Cauchy-Greenov tenzor. Desni \mathbf{C} se odnosi na referentni koordinatni sustav, a lijevi \mathbf{b} na trenutni dok se tenzor deformiranja \mathbf{F} odnosi na obje konfiguracije. Budući da je \mathbf{F} simetričan tenzor \mathbf{C} i \mathbf{b} su jednaki:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Prva invarijanta tenzora C i b je:

$$I_1 = \lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 \quad (23)$$

Materijal modela krvne žile je izotropan, hiperelastičan i nestlačiv pa izraz (12) postaje:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \mathbf{b} - 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \mathbf{b}^{-1}, \quad (24)$$

gdje je p Lagrangeov multiplikator, a I_1 i I_2 su prva i druga invarijanta lijevog Cauchy-Greenovog tenzora \mathbf{b} .

2.5 Neo-Hookeov materijalni model

Neo-Hookeov materijalni model jedan je od najkorištenijih i najjednostavnijih modela za opisivanje mehaničkog ponašanja hiperelastičnih materijala, npr. guma i polimeri. U slučaju nestlačivog materijala izraz za energiju deformiranja po Neo-Hookeu je:

$$W = \frac{C_1}{2} \cdot (I_1 - 3), \quad (25)$$

gdje je C_1 materijalna konstanta, a I_1 prva invarijanta lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranja \mathbf{b} .

2.6 Jednadžba tlaka

Jednadžba tlaka na unutarnjoj stijenci šupljeg cilindra dobiva se iz jednadžbi ravnoteže:

$$P = \int_{r_u}^{r_v} \frac{(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r} dr, \quad (26)$$

gdje je r_u unutarnji radijus šupljeg cilindra, a r_v vanjski. Varijable σ_θ i σ_r određuju se iz Neo-Hookeovog materijalnog modela. Potrebno je derivirati jednadžbu (25) po invarijantama i uvrstiti u izraz (24):

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1, \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad (27)$$

pa slijedi:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \mathbf{b}. \quad (28)$$

Uvrštavanjem izraza (22) za lijevi Cauchy-Greenov tenzor \mathbf{b} dobiva se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Uzimajući u obzir izraz (21) σ_θ i σ_r su:

$$\sigma_r = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} \quad (30)$$

$$\sigma_\theta = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \lambda_\theta^2. \quad (31)$$

Uvrštavanjem (30) i (31) u (26) dobiva se konačan izraz za tlak koji je korišten u daljnjem numeričkom postupku:

$$P = \int_{r_u}^{r_v} 2 \cdot C_1 \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \frac{dr}{r}. \quad (32)$$

2.7 Uvjet nestlačivosti

Uvjet nestlačivosti materijala uveden je već u izrazu (24) te se može primijeniti na geometriju krvne žile. Volumen šupljeg cilindra prije i poslije deformacije ostaje isti pa se može zapisati:

$$(R^2 - r^2)\pi l = (R_0^2 - r_0^2)\pi L, \quad (33)$$

gdje se veliko slovo R odnosi na vanjski radijus, malo slovo r na unutarnji radijus, a subskript 0 na početnu konfiguraciju odnosno neopterećenu geometriju. Uz jednadžbu (17) mogu se zapisati izrazi za vanjske radijuse:

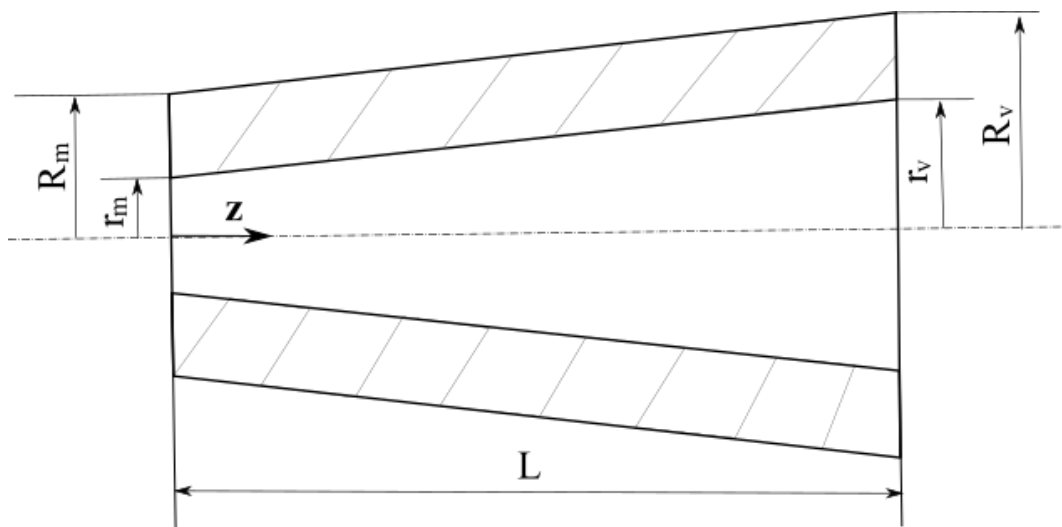
$$R_0 = \sqrt{r_0^2 + (R^2 - r^2) \cdot \lambda_z} \quad (34)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (R_0^2 - r_0^2) \cdot \frac{1}{\lambda_z}}. \quad (35)$$

Izrazi (34) i (35) korišteni su u numeričkom postupku.

3 Matematički model za dobivanje neopterećene geometrije konusne krvne žile

U matematičkom modelu konusne žile opterećene konstantnim unutarnjim tlakom glavne razlike u odnosu na model ravne krvne žile leže u geometrijskim karakteristikama. Geometrija konusne žile definirana je preko malog unutarnjeg radijusa r_m , malog vanjskog radijusa R_m , velikog unutarnjeg radijusa r_v , velikog vanjskog radijusa R_v i duljine konusa L .



Slika 4: Geometrija konusne krvne žile

Unutarnji i vanjski radijus funkcije su uzdužne varijable z :

$$r = r_m + \frac{r_v - r_m}{L} \cdot z \quad (36)$$

$$R = R_m + \frac{R_v - R_m}{L} \cdot z \quad (37)$$

Gradijent deformiranja iz izraza (16) i dalje vrijedi samo su istezljivosti λ_r i λ_θ za konus drugačije:

$$\lambda_r = \frac{r_0(z)}{r(z)\lambda_z} \quad (38)$$

$$\lambda_\theta = \frac{r(z)}{r_0(z)} \quad (39)$$

U numeričkoj metodi za izračunavanje neopterećene geometrije konusne žile duljina L bit će podijeljena na konačan broj segmenata te je tlak za svaki od tih segmenata aproksimiran izrazom (32) kao na primjer:

$$P = \int_{r_m}^{R_m} 2 \cdot C_1 \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \frac{dr}{r} = \int_{r_v}^{R_v} 2 \cdot C_1 \left(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \frac{dr}{r} \quad (40)$$

Uz pretpostavku da je $\lambda_z = 1$ i uvjet nestlačivosti dolazi se do zaključka da će površina presjeka u određenoj točki z biti konstantna pa vrijede izrazi:

$$R_{0m} = \sqrt{r_{0m}^2 + R_m^2 - r_m^2} \quad (41)$$

$$R_v = \sqrt{r_v^2 + R_{0v}^2 - r_{0v}^2} \quad (42)$$

Izrazi (41) i (42) su samo primjeri te se analogni izrazi mogu napisati za svaki segment od z

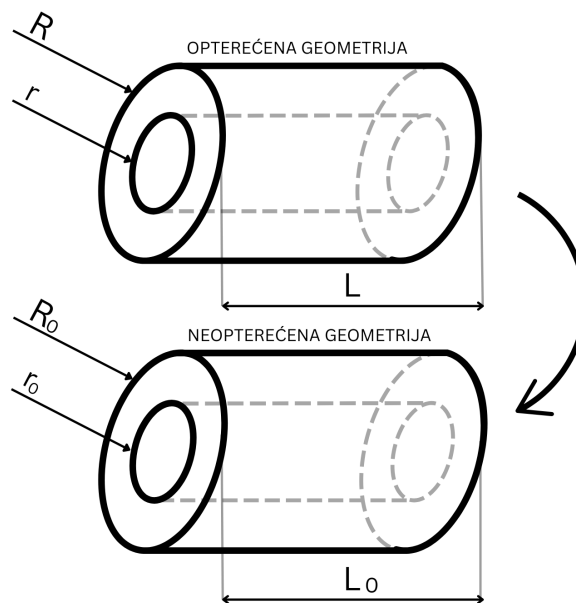
4 Numerički postupak računanja neopterećene geometrije ravne krvne žile

Neopterećena geometrija ravne žile izračunava se numeričkim iterativnim postupkom. U postupku se koristi Newton-Raphsonova iterativna metoda i numerička integracija. Izračunava se unutarnji i vanjski radijusi neopterećenog modela ravne krvne žile iz poznatih podataka unutarnjih promjera žila (r) pri dijastoličkom i sistoličkom unutarnjem tlaku (p_d i p_s) za prosječnu mušku osobu od pedeset i osam godina starosti. Poznate vrijednosti dane su u tablici.

Tablica 1: Poznate dimenzije krvne žile

	P [mmHg]	r [mm]
p_d	64.982	23.362
p_s	140.11	25.523

Model ravne krvne žile izrađen je od hiperelastičnog nestlačivog materijala materijalne konstante C_1 . U numeričkom postupku određuju se i vanjski radijusi modela pri dijastoličkom i sistoličkom tlaku (R_d i R_s).

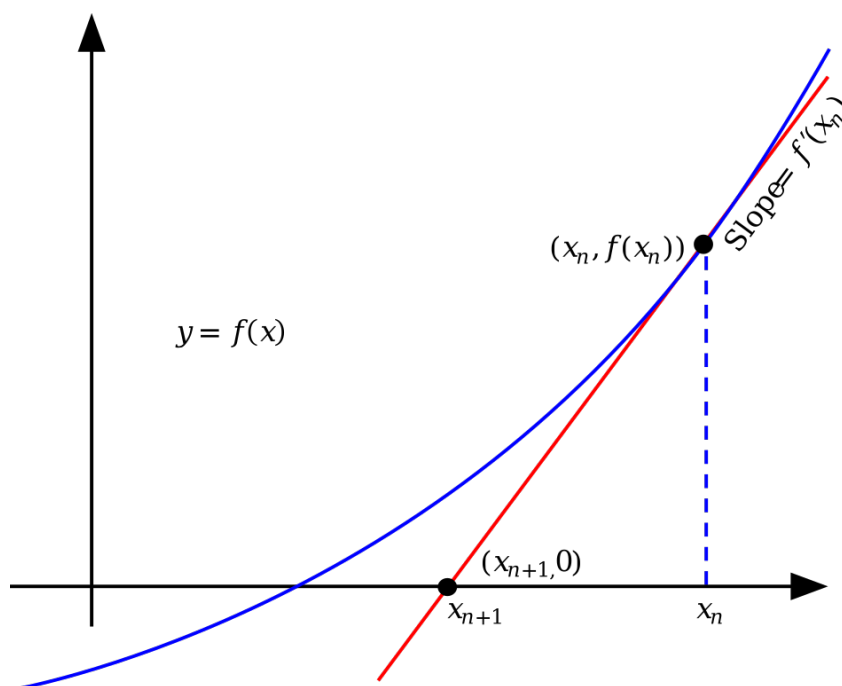


Slika 5: Grafički prikaz postupka izračuna neopterećene geometrije

4.1 Newton-Raphsonov iterativni postupak

Newton-Raphsonova metoda također poznata i kao metoda tangente je numerička metoda koja se koristi za aproksimaciju nultočki realnih funkcija. Korištena je u numeričkom proračunu neopterećene geometrije modela krvne žile. Za prvi korak iteracije potrebno je izabrati jednu točku x_0 , vrijednost funkcije u toj točki $f(x_0)$ te vrijednost prve derivacije $f'(x_0)$. Točka koju algoritam uzima u sljedećoj iteraciji je sjecište tangente na funkciju $f(x_0)$ u točki x_0 i apscise. Što je izabrana točka x_0 bliža nultočki to je algoritam brži. Algoritam završava kada izračunata točka zadovoljava zadanu toleranciju (grešku). Prvi korak iterativnog postupka te grafički primjer jednog takvog postupka prikazani su u nastavku.

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \quad (43)$$



Slika 6: Grafički prikaz Newton-Raphsonovog postupka [8]

4.2 Numerička integracija - Simpsonova formula

Simpsonova formula je numerička metoda za približno izračunavanje određenih integrala funkcija. Temelji se na aproksimaciji podintegralne funkcije kvadratnim polinomom. Interval integracije $[a, b]$ dijeli se na jednak broj podintervala n (koji mora biti paran). Integral se izračunava prema formuli:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\text{neparni } i} f(x_i) + 2 \sum_{\text{parni } i} f(x_i) + f(x_n) \right], \quad (44)$$

gdje je širina intervala h jednaka:

$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (45)$$

Simpsonova formula korištena je za izračun tlaka prema izrazu (32).

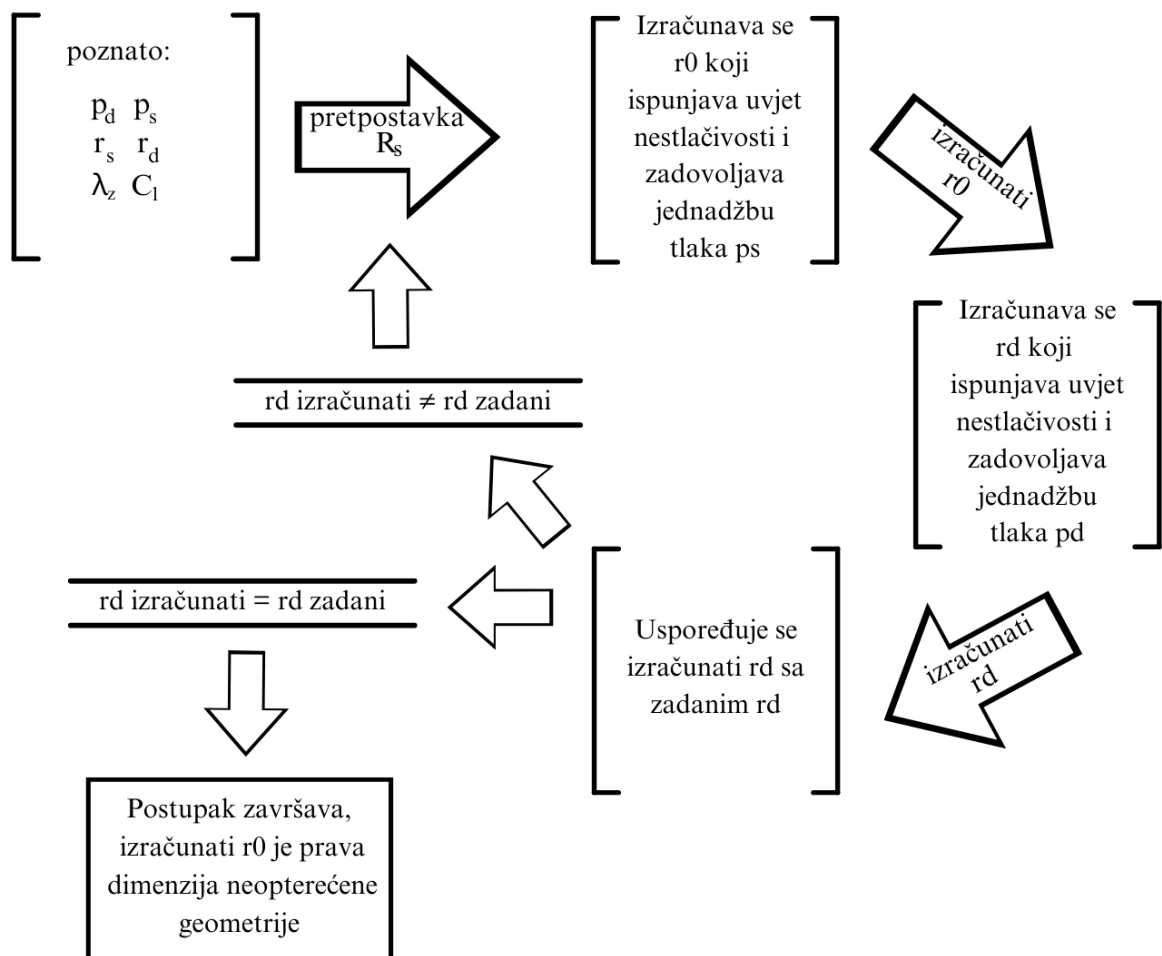
4.3 Algoritam za izračun neopterećene geometrije modela ravne krvne žile uz zadanu konstantu materijala C_1

Tablica 2: Ulazni i izlazni podaci algoritma

Ulazni podaci	Oznake	Izlazni podaci	Oznake
dijastolički tlak	p_d	unutarnji neopterećeni radijus	r_0
sistolički tlak	p_s	vanjski neopterećeni radijus	R_0
unutarnji radijus pri p_d	r_d	vanjski radijus pri tlaku p_d	R_d
unutarnji radijus pri p_s	r_s	vanjski radijus pri tlaku p_s	R_s
materijalna konstanta	C_1		
istezanje u smjeru osi z	λ_z		

Algoritam počinje pretpostavkom vanjskog radijusa pri sistoličkom tlaku R_s . Iz jednadžbe tlaka i uvjeta nestlačivosti izračunava se neopterećena geometrija modela za odgovarajući sistolički tlak pomoću numeričke integracije i Newton-Raphsonove

metode. Za tako dobivenu neopterećenu geometriju može se odrediti opterećena geometrija pri dijastoličkom tlaku uz numeričku integraciju i Newton-Raphsonovu metodu. Budući da je unutarnji radijus pri dijastoličkom tlaku r_d poznat, postupak završava kada je vrijednost izračunatog unutarnjeg radijusa pri dijastoličkom tlaku jednak (uz određenu toleranciju) zadanom radijusu r_d . Dobiven je model neopterećene geometrije ravne žile izrađene od nestlačivog materijala poznate konstante C_1 čiji se unutarnji radijus deformira kao prava krvna žila pri poznatim tlakovima.



Slika 7: Pojednostavljena shema algoritma

4.4 Implementacija algoritma u programskom paketu Python

Jednadžba tlaka (32) uz izraze (18) i (21) postaje:

$$p = \int_r^R 2 \cdot C_1 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (46)$$

gdje se ρ odnosi na varijablu radijusa u trenutnoj konfiguraciji a ρ_0 na varijablu u početnoj tj. neopterećenoj geometriji. Za numeričku integraciju prikladno je ρ zapisati kao vektor dimenzija $1 \times n$ čiji su članovi linearna interpolacija između unutarnje i vanjske vrijednosti radijusa r i R :

$$\rho = [r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_n], i = 1, \dots, n \quad (47)$$

gdje su:

$$r_i = r, r_n = R. \quad (48)$$

Takav vektor lako se može zapisati u Pythonu uz poznate radijuse r i R te željenog broja točaka n pomoću komande `np.linspace` uz Pythonov paket `numpy`. Iz uvjeta nestlačivosti (34) lako se dolazi do vektora ρ_0 jednakih dimenzija kao i ρ :

$$\rho_0 = \sqrt{r_0^2 + (\rho^2 - r^2) \cdot \lambda_z} \quad (49)$$

Uvrštavanjem vektora (47) i (49) u podintegralnu funkciju integrala (46) lako se uz Pythonovu ugrađenu funkciju za numeričku integraciju iz paketa `scipy.integrate` može izračunati (približno) vrijednost tog integrala. Funkcija `simpson` za ulaze u ovom slučaju uzima podintegralnu funkciju i vektor ρ (područje integracije). Nadalje u Pythonu se definira funkcija čiji je izlaz razlika zadanog tlaka i izračunatog:

$$f_s = |p_s - |p_{s,izračunati}|| \quad (50)$$

U prvom koraku se pretpostavlja vanjski radijus modela ravne žile R_s pri zadanom tlaku p_s . U Pythonu postoji ugrađena funkcija `newton` iz paketa `scipy.optimize` koja traži rješenja funkcija Newton-Raphsonovom metodom. Funkcija `newton` kao ulaze uzima funkciju koju treba minimizirati, početnu točku s kojom počinje iterativni postupak te ostale zadane argumente funkcije. U ovom slučaju funkcija je razlika za-

danog tlaka p_s i izračunatog tlaka numeričkom integracijom za pretpostavljeni R_s (50), varijabla koja se izračunava je neopterećeni radijus r_0 , a ostali argumenti su: r_s , pretpostavljeni R_s , p_s , C_1 i λ_z . Za tako izračunati radijus r_0 iz uvjeta nestlačivosti (34) i (35) dobivaju se R_0 i R_d :

$$R_0 = \sqrt{r_0^2 + (R_s^2 - r_s^2) \cdot \lambda_z} \quad (51)$$

$$R_d = \sqrt{r_d^2 + (R_0^2 - r_0^2) \cdot \frac{1}{\lambda_z}} \quad (52)$$

U Pythonu je potrebno definirati još jednu funkciju:

$$f_d = |p_d - |p_{d,izračunati}|, \quad (53)$$

gdje se tlak izračunava ranije opisanim numeričkim postupkom za geometriju pri dijestoličkom tlaku. Ugrađenom funkcijom `newton` u Pythonu traži se vrijednost unutarnjeg radijusa pri dijestoličkom tlaku $r_{d,izračunati}$ koja odgovara korijenu funkcije (53). Ostali argumenti funkcije su: R_0 , r_0 , p_d , C_1 i λ_z . Posljednji korak u algoritmu je minimiziranje definirane funkcije u Pythonu koja kao izlaz daje:

$$f_{rd} = |r_d - |r_{d,izračunati}|, \quad (54)$$

Algoritam završava kada je pronađen R_s za koji je funkcija (54) jednaka nuli. Zatim se dolazi do konačnog iznosa r_0 , R_0 i R_d gore opisanim postupkom uz poznate ulazne podatke i pronađeni R_s .

4.4.1 Algoritam za računanje neopterećene geometrije ravne žile uz konstantnu debljinu stijenke h

Algoritam za izračunavanje neopterećene geometrije ravne krvne žile vrlo je sličan ranije opisanom algoritmu. Umjesto zadanog ulaznog podatka C_1 uzima se željena debljina stijenke h , pa je $R_s = r_s + h$. Algoritam započinje pretpostavljanjem materijalne konstante C_1 . Daljnji postupak je analogan. Izračunava se odgovarajući r_0 , pa $r_{d,izračunati}$. Uz prilagođavanje materijalne konstante Newton-Raphsonovom metodom dobiva se odgovarajuća neopterećena geometrija i prikladna materijalna konstanta C_1 za koje je funkcija iz izraza (54) približno jednaka nuli.

4.5 Rezultati numeričke metode za ravnu krvnu žilu

Uz pomoć Python programskog paketa izračunata je neopterećena geometrija neopterećene ravne krvne žile iz zadanih podataka danih u tablici (1) za nekoliko različitih materijala te različitih slučajeva istežljivosti λ_z . Rezultati su dani u tablici (3.)

Tablica 3: Rezultati numeričke analize za ravnu žilu

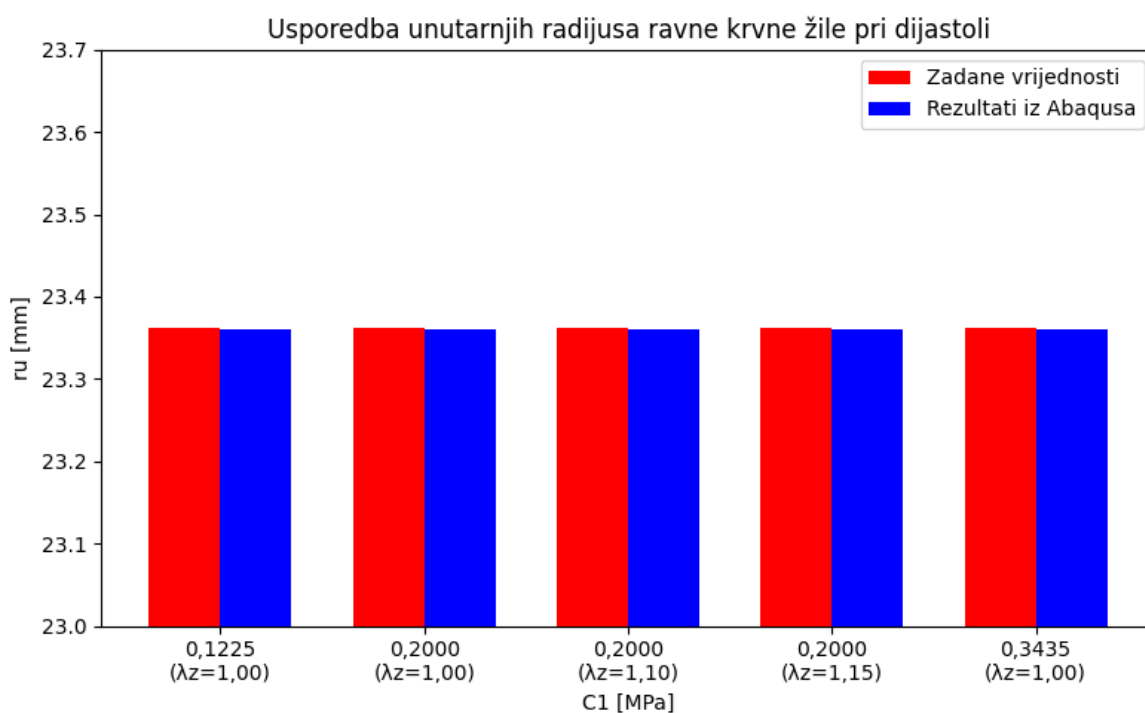
C_1 [MPa]	λ_z	P [mmHg]	r_u [mm]	R_v [mm]	h [mm]
0.1225	1.00	0.0000	21.985	26.644	4.6587
		64.982*	23.362*	27.791	4.4289
		140.11*	25.523*	29.630	4.1076
0.2000	1.00	0.0000	22.014	24.635	2.6204
		64.982*	23.362*	25.846	2.4842
		140.11*	25.523*	27.815	2.2919
0.2000	1.10	0.0000	23.084	26.146	3.0621
		64.982*	23.362*	26.131	2.7690
		140.11*	25.523*	28.079	2.5567
0.2000	1.15	0.0000	23.601	26.895	3.2946
		64.982*	23.362*	26.276	2.9144
		140.11*	25.523*	28.215	2.6920
0.3435	1.00	0.0000	22.034	23.483	1.4496
		64.982*	23.362*	24.734	1.3719
		140.11*	25.523*	26.784	1.2614

*ulazni podaci iz tablice (1)

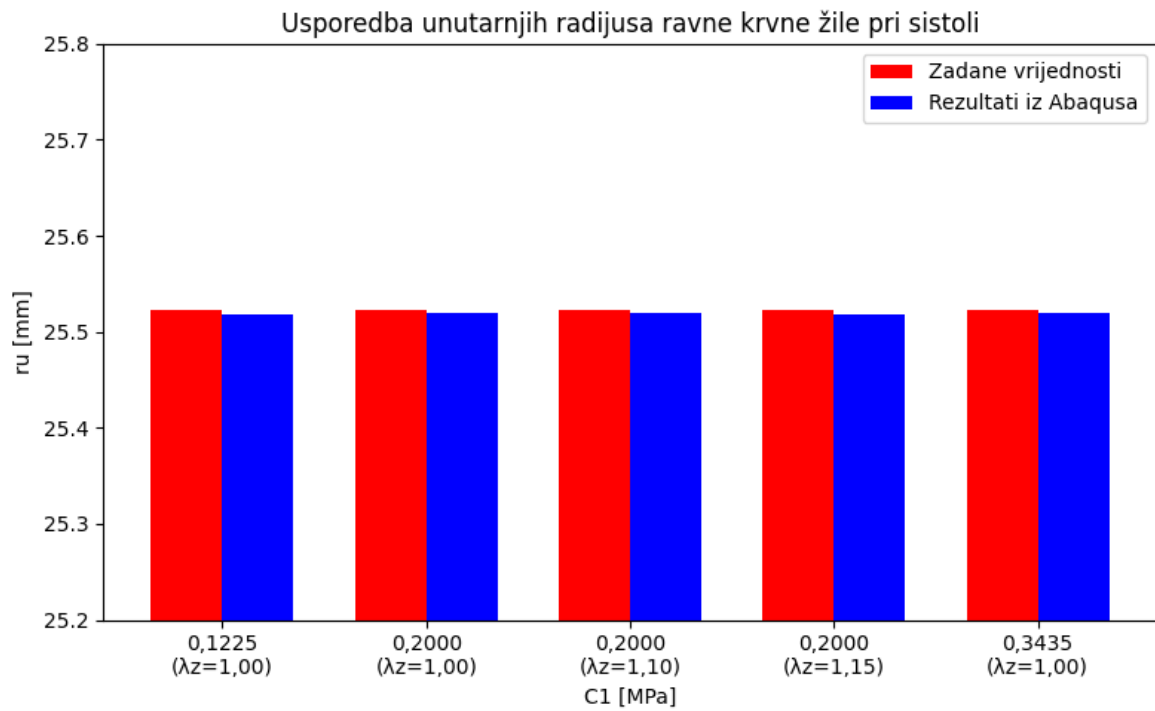
Ravna neopterećena žila izračunate geometrije za svih pet slučajeva modelirana je u Abaqus programskom paketu. Opterećena je zadanim konstantnim tlakovima po unutarnoj stijenci te su dobiveni podaci za deformiranu geometriju uspoređeni sa zadanim podacima u svrhu verifikacije numeričkog modela. Rezultati su dani u tablici (4) te su grafički prikazani na slikama

Tablica 4: Rezultati MKE analize i usporedba s numeričkim postupkom

C_1 [MPa]	λ_z	P [mmHg]	r_u [mm]	R_v [mm]	h [mm]	razlika r_u [%]	razlika R_v [%]	razlika h [%]
0.1225	1.00	0.0000	21.985	26.644	4.6587			
		64.982	23.360	27.789	4.4291	-0.006	-0.004	0.005
		140.11	25.518	29.627	4.1082	-0.017	-0.012	0.014
0.2000	1.00	0.0000	22.014	24.635	2.6204			
		64.982	23.360	25.845	2.4844	-0.005	-0.004	0.008
		140.11	25.519	27.811	2.2922	-0.016	-0.014	0.015
0.2000	1.10	0.0000	23.084	26.146	3.0621			
		64.982	23.360	26.130	2.7692	-0.006	-0.004	0.006
		140.11	25.519	28.076	2.5571	-0.016	-0.013	0.014
0.2000	1.15	0.0000	23.601	26.895	3.2946			
		64.982	23.360	26.275	2.9145	-0.006	-0.004	0.004
		140.11	25.518	28.211	2.6925	-0.017	-0.013	0.017
0.3435	1.00	0.0000	22.034	23.483	1.4496			
		64.982	23.361	24.732	1.3719	-0.005	-0.005	0.002
		140.11	25.519	26.780	1.2616	-0.016	-0.014	0.014



Slika 8: Usporedba unutarnjih radijusa ravne krvne žile pri dijastoli



Slika 9: Usporedba unutarnjih radijusa ravne krvne žile pri sistoli

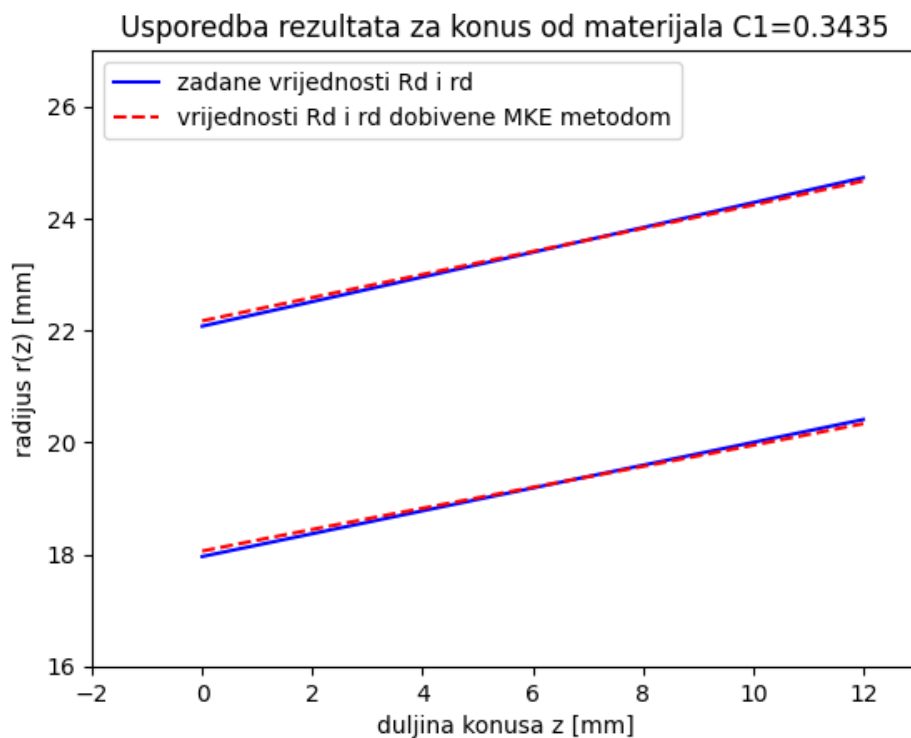
5 Primjena numeričke metode na model konusne žile

Unutarnji i vanjski radijusi konusne krvne žile funkcije su uzdužne varijable z . Te funkcije su dane izrazima (36) i (37). Diskretizacijom duljine konusa L dobiva se konačan broj segmenata na koje se može primijeniti numerički postupak izveden za ravnu žilu. Geometrijske karakteristike na kojima se primjenjuje numerička metoda uzete su iz poznatih izmjerenih dimenzija aneurizme čovjeka. Numerička metoda primijenjena je na dva različita dijela aneurizme uz dva različita materijala te različitom diskretizacijom, gdje je n_z broj diskretizacijskih točaka. Istezljivost u smjeru z λ_z je jednaka jedan, a ostali podaci su dani u tablici (5).

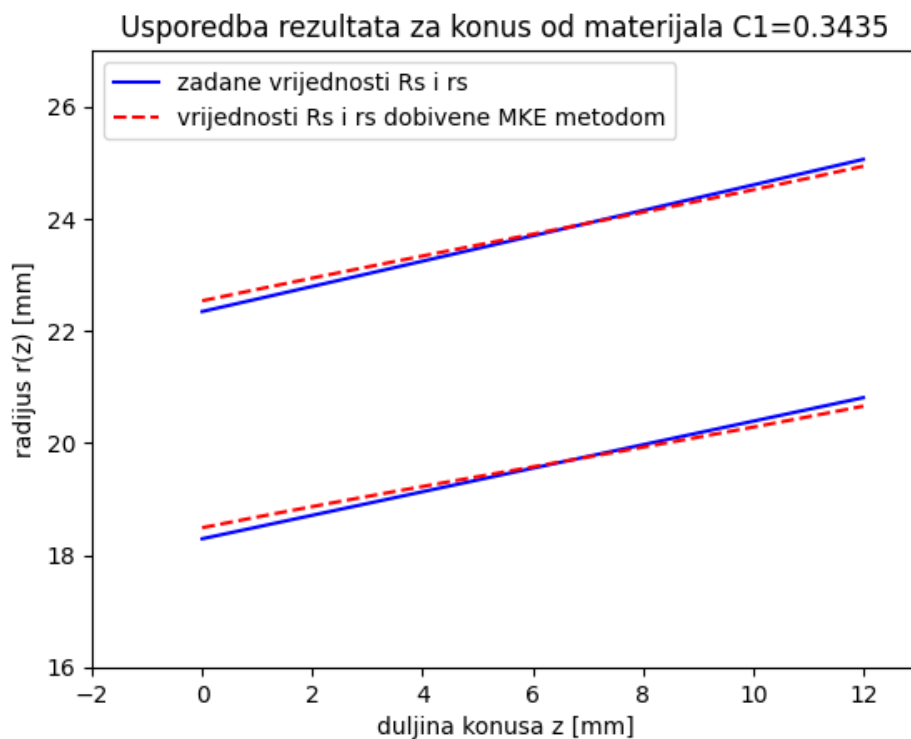
Tablica 5: Geometrijske karakteristike konusne žile

C_1 [MPa]	L [mm]	n_z [-]	P [mmHg]	r_m [mm]	r_v [mm]
0.3435	12	12	60	17.96	20.408
			120	18.29	20.8075
0.2000	1.06	10	60	10.5351	10.8549
			120	11.088	11.4182

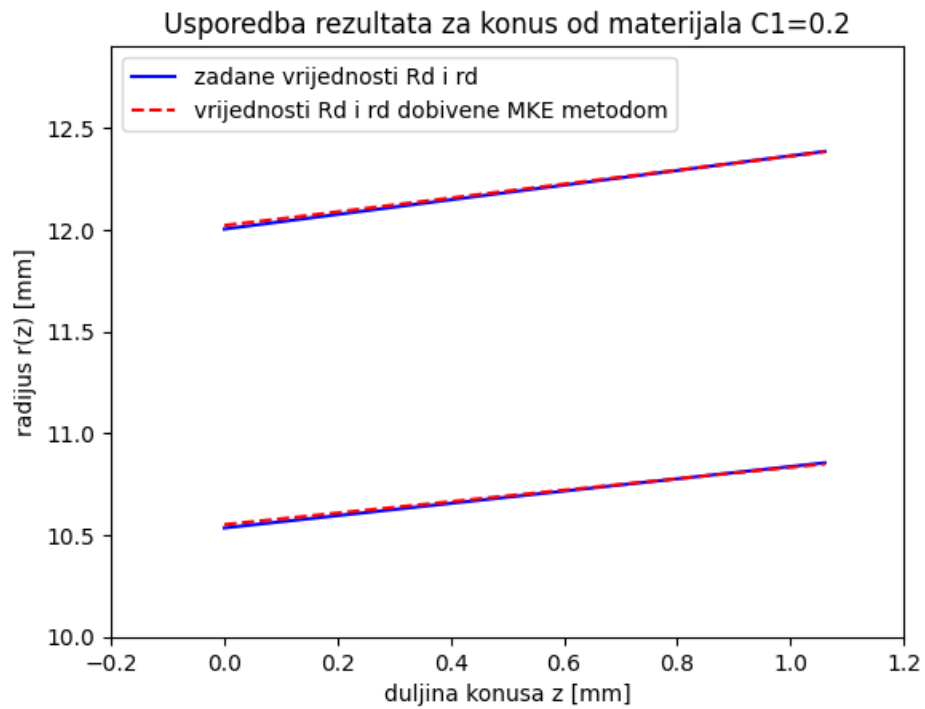
U programskom paketu Python varijabla z zapisuje se kao vektor dimenzija $1 \times n_z$ čiji su članovi linearna interpolacija između vrijednosti 0 i L . Uvrštavanjem tako diskretizirane varijable z u jednadžbe (36) i (37) dobivaju se vektori $r_s(z)$ i $r_d(z)$ koji su istih dimenzija kao i vektor z . Na svaki član tih vektora primjenjuje se numerički postupak te se izračunava neopterećeni unutarnji radijus $r_0(z)$ i neopterećeni vanjski radijus $R_0(z)$. Također se određuju i vanjski opterećeni radijusi pri dijastoličkom i sistoličkom tlaku $R_d(z)$ i $R_s(z)$. Šuplji konus dimenzija neopterećene geometrije modeliran je u Abaqusu i opterećen odgovarajućim unutarnjim konstantnim tlakovima p_d i p_s . Rezultati dobiveni metodom konačnih elemenata pomoću programskog paketa Abaqus uspoređeni su sa zadanim vrijednostima.



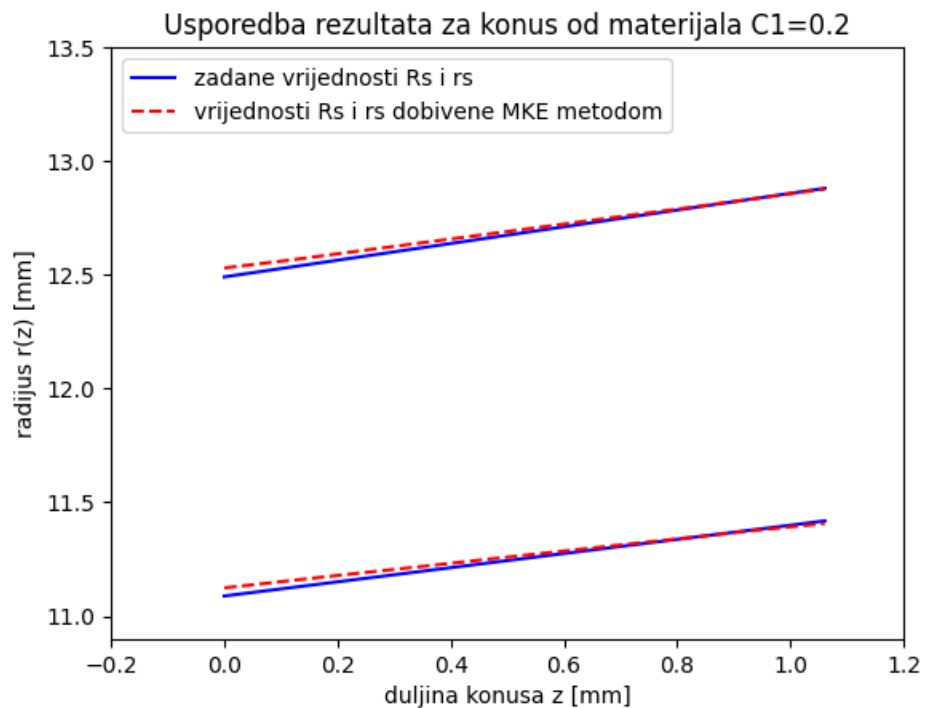
Slika 10: Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1=0.3435$ pri dijastoli



Slika 11: Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1=0.3435$ pri sistoli



Slika 12: Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1 = 0.2$ pri dijastoli



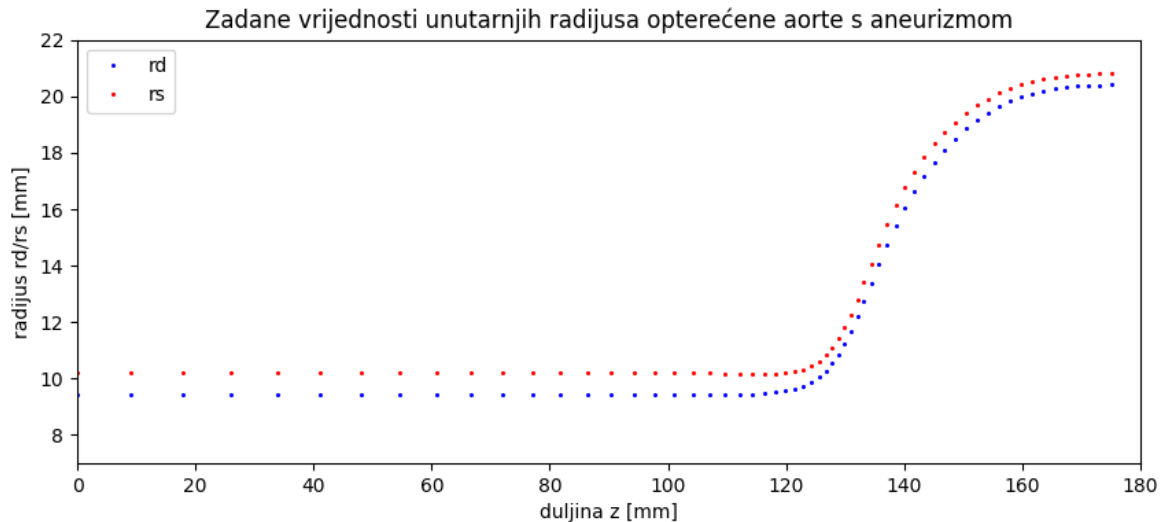
Slika 13: Usporedba geometrije konusne žile od materijala $C_1 = 0.2$ pri sistoli

6 Formiranje modela aneurizme aorte

Za konstruiranje neopterećenog modela aneurizme od hiperelastičnog materijala potrebni su podaci o dimenzijama prave ljudske aneurizme aorte pri sistoličkom i dijastoličkom tlaku. Ulazni podaci obuhvaćaju vrijednosti unutarnjeg radijusa ljudske aorte s aneurizmom (r_s i r_d) za tlakove sistole (120 mmHg) i dijastole (60 mmHg), te vrijednosti z koje predstavljaju aksijalnu komponentu aneurizme. Podaci su dani u tablici (6), a grafički prikazani na slici (14). Numerički postupak iz poglavlja 4 primijenjen je na sve zadane podatke. U svrhu određivanja preciznije neopterećene geometrije numerički postupak primijenjen je kao na konusnu žilu u poglavlju 5 na svim dijelovima aneurizme što rezultira većim brojem točaka koje opisuju neopterećenu geometriju u usporedbi sa zadanim brojem točaka. Takav pristup primijenjen je na model aneurizme izrađen od jednog materijala. Uz takav model izrađen je i model aneurizme od 42 različita materijala približno konstante debljine od 2 mm. Neopterećena geometrija takvog modela dobivena je primjenom numeričkog postupka opisanog u potpoglavlju 4.4.1. Koordinate neopterećene geometrije za oba slučaja ubačene su u alat *SolidWorks* u obliku tekstualne datoteke (*txt file*) i učitane kao *Point Cloud*. Pomoću funkcija *Spline*, *Revolve* i *Mirror* konstruirani su modeli koji su zatim provjereni metodom konačnih elemenata te pripremljeni za ispis tehnologijom 3D printanja.

Tablica 6: Ulazni podaci - opterećena geometrija aorte s aneurizmom

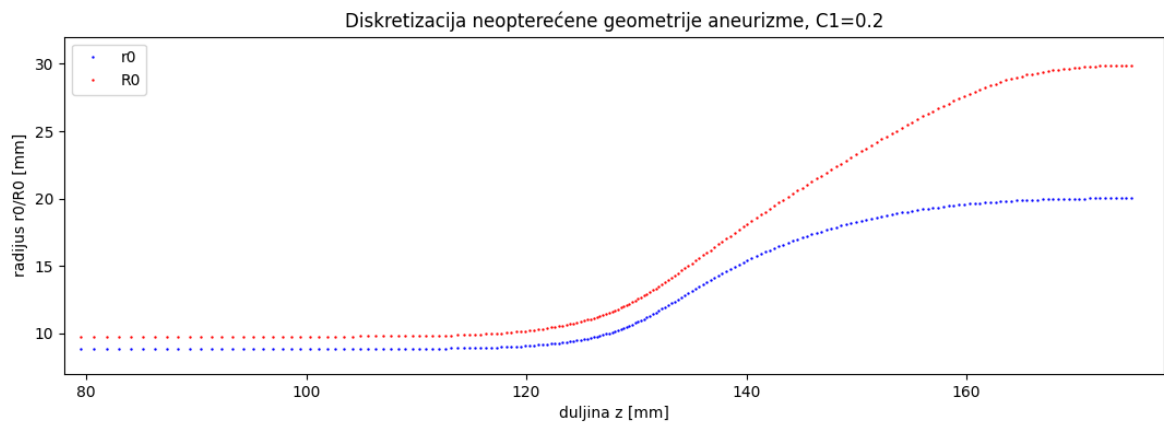
z [mm]	r_s [mm]	r_d [mm]	z [mm]	r_s [mm]	r_d [mm]
0.0000	10.1834	9.4110	127.7914	11.0880	10.5351
9.1587	10.1834	9.4110	128.8522	11.4182	10.8549
17.8449	10.1834	9.4110	129.8965	11.7704	11.2323
26.0728	10.1834	9.4110	130.9480	12.1116	11.5898
33.8566	10.1834	9.4110	132.0340	12.8000	12.1792
41.2108	10.1834	9.4110	133.1273	13.3951	12.7494
48.1494	10.1834	9.4110	134.8349	14.0863	13.3738
54.6869	10.1834	9.4110	135.6821	14.7875	13.9602
60.8375	10.1834	9.4110	137.0706	15.4480	14.5580
66.6153	10.1834	9.4110	138.5427	16.0129	15.3972
72.0348	10.1834	9.4110	140.0870	16.7567	16.0382
77.1103	10.1834	9.4110	141.6917	17.3344	16.6321
81.8559	10.1834	9.4110	143.3494	17.8485	17.1735
86.2860	10.1834	9.4110	145.0584	18.3099	17.6646
90.4148	10.1834	9.4110	146.8147	18.7222	18.1079
94.2562	10.1833	9.4110	148.6066	19.0851	18.5027
97.8255	10.1831	9.4110	150.4274	19.4023	18.8510
101.1367	10.1825	9.4113	152.2713	19.6779	19.1551
104.2032	10.1813	9.4122	154.1332	19.9150	19.4177
107.0395	10.1791	9.4143	156.0092	20.1294	19.6409
109.6593	10.1758	9.4188	157.8963	20.2826	19.8268
112.0743	10.1717	9.4273	159.7916	20.4182	19.9785
114.2994	10.1678	9.4419	161.6922	20.5257	20.0990
116.3455	10.1668	9.4656	163.5952	20.6099	20.1933
118.2232	10.1730	9.5019	165.4978	20.6754	20.2656
119.9446	10.1935	9.5552	167.3993	20.7269	20.3212
121.5209	10.2376	9.6306	169.3002	20.7639	20.3610
122.9665	10.3149	9.7341	171.2005	20.7887	20.3877
124.2975	10.4335	9.8714	173.1004	20.8029	20.4030
125.5329	10.5990	10.0476	175.0000	20.8075	20.4080
126.6908	10.8159	10.2672			



Slika 14: Grafički prikaz zadane geometrije aneurizme

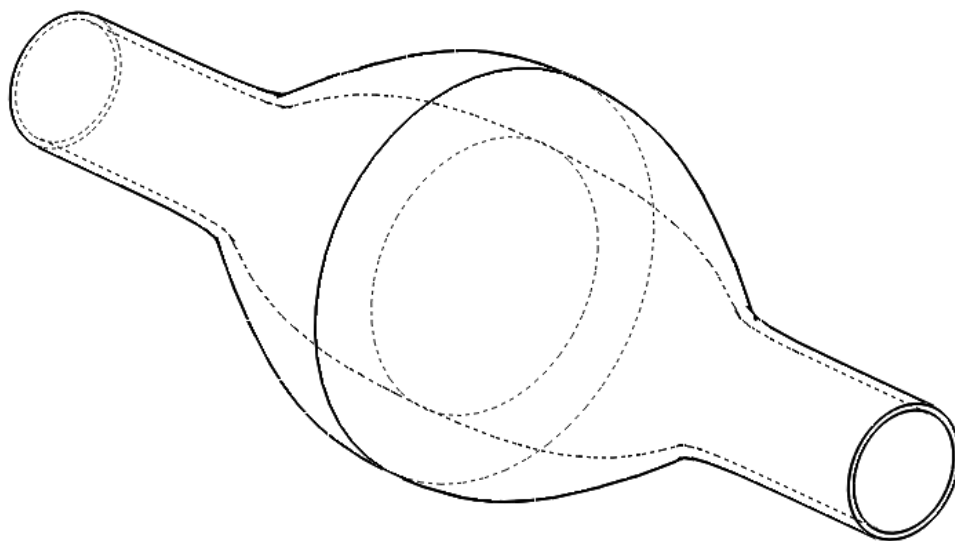
6.1 Model aneurizme aorte od jednog materijala

Budući da prvih 15 zadanih točaka iz tablice 14 opisuje geometriju ravne žile za koju već imamo verificirane podatke iz poglavlja 4, zanemareno je prvih 10 točaka. Dio modela koji predstavlja ravnu žilu kraći je od zadanog što ne utječe na rezultate MKE metode primijenjene na dio modela koji predstavlja aneurizmu. Radijus pri oba tlaka raste sa varijablom z , pa tako i debljina modela žile od jednog materijala. Unutrašnjost aneurizme opterećena je konstantnim tlakom te su segmenti površine pri većem radijusu veći. Proporcionalno raste i sila, pa tako i debljina modela izrađenog od jednog materijala krutosti C_1 jer se povećanjem debljine smanjuje radijalna deformacija unutarnje površine žile. Materijal modela je FLX9840 DM. To je polimer koji se koristi u aditivnoj tehnologiji 3D printanja krutosti C_1 od 0.2 MPa. Izračunate točke neopterećene geometrije dane su na slici (15).



Slika 15: Koordinate neopterećene geometrije modela aneurizme od jednog materijala

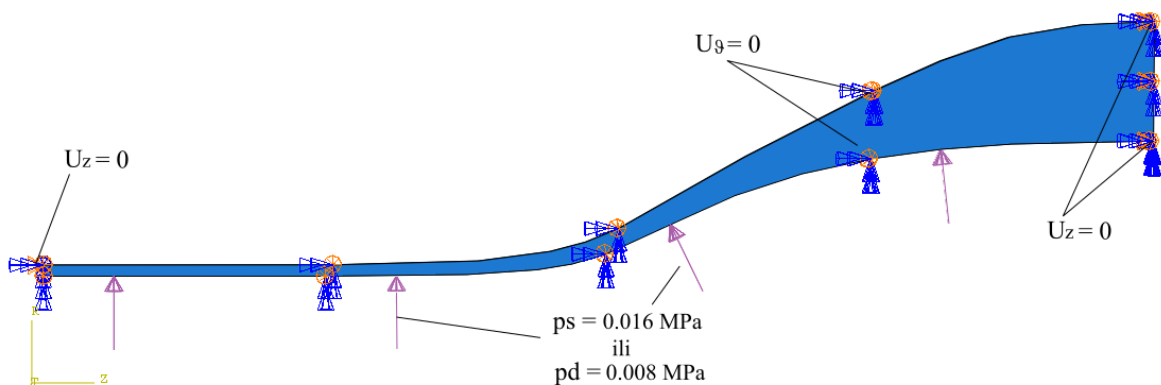
Iz točaka danih na slici (15) konstruirana je aneurizma od materijala FLX9840 DM u alatu *SolidWorks* prikazana na slici (16)



Slika 16: Model aneurizme od materijala FLX9840 DM, $C_1 = 0.2$ MPa

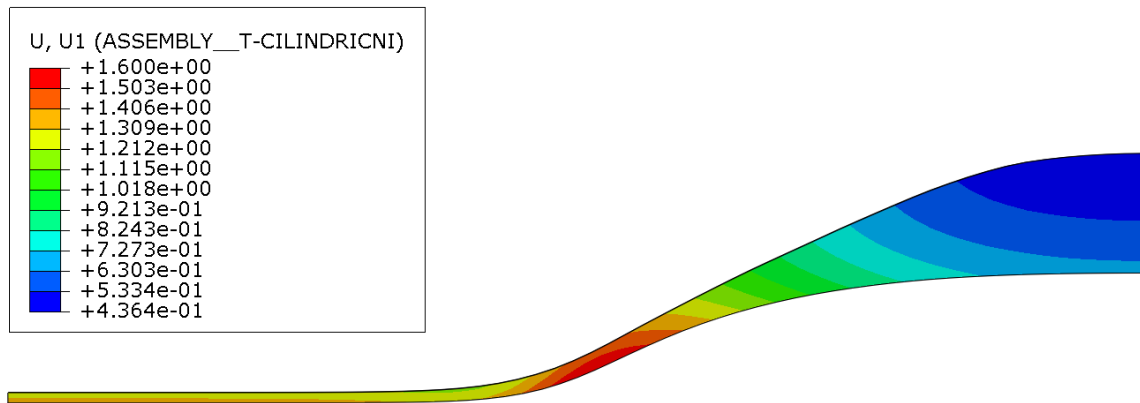
6.1.1 Primjena metode konačnih elemenata na model aorte s aneurizmom od jednog materijala

Numerički dobiven model podvrgnut je analizi metodom konačnih elemenata. Time se omogućuje usporedba unutarnjeg radijusa opterećene geometrije pri sistoličkom i dijastoličkom tlaku s ulaznim podacima te procjena točnosti i verifikacija dobivenih rezultata. Analiza konačnih elemenata provedena je korištenjem programskog paketa *Abaqus*. Kako bi se pojednostavila analiza, iskorišteni su uvjeti simetrije i osne simetrije, čime je dobiven model prikazan na slici (17). Također, odabrani segment krvne žile s aneurizmom pokriva kut od 2° čime je omogućena analiza u cilindričnom koordinatnom sustavu. Rubni uvjeti i opterećenja definirani su prema prikazu na slici (17)



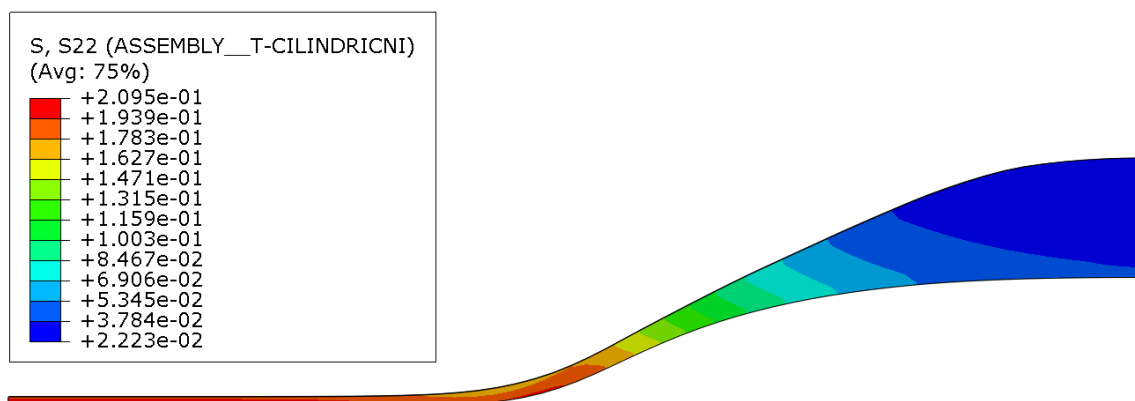
Slika 17: Pojednostavljeni model podvrgnut MKE analizi, rubni uvjeti i opterećenje

Na slici (18) prikazani su radijalni pomaci modela pri sistoličkom tlaku. Pomaci su najveći na prijelazu iz ravne žile u aneurizmu (crveno područje). Na ovom području najizraženija je promjena koeficijenta smjera geometrije. Pomaci su veći na unutarnjem radijusu u odnosu na vanjski te su minimalni na vanjskom radijusu tamo gdje je stijenka modela najdeblja. Maksimalan iznos pomaka je 1.6 mm, a minimalan oko 0.44 mm.



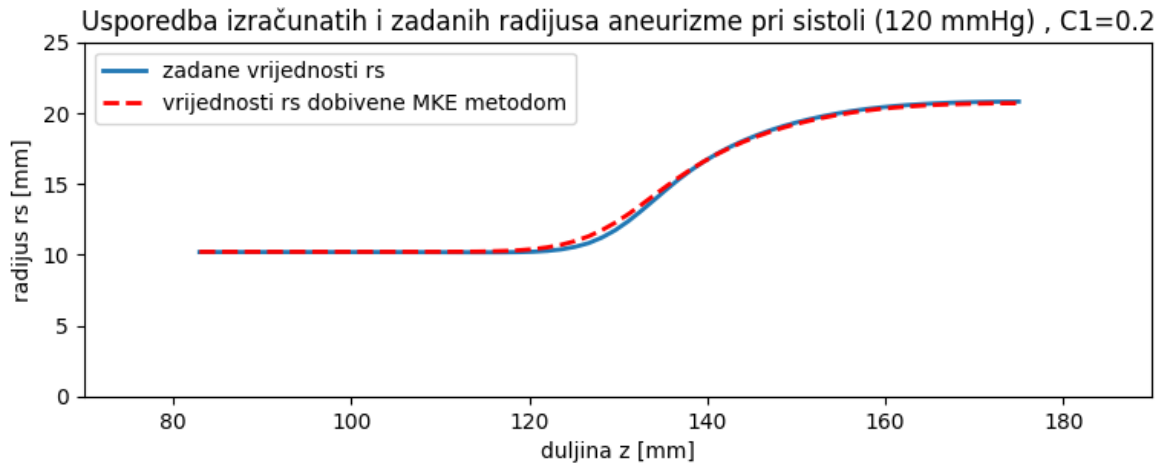
Slika 18: Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku

Maksimalna naprezanja javljaju se pri većem odnosno sistoličkom tlaku. Polje cirkularnih naprezanja prikazano je na slici (19). Cirkularno naprezanje najizraženije je pa je ujedno i maksimalno naprezanje kojem je model podvrgnut. Maksimalno naprezanje od približno 0.2 MPa javlja se na najužem dijelu modela. Naprezanje opada s rastom debljine modela i udaljenosti od unutarnjeg radijusa. Naprezanje od 0.2 MPa dovoljno je malo da se s visokom sigurnošću može zaključiti da neće doći do pucanja modela pri zadanim opterećenjima.



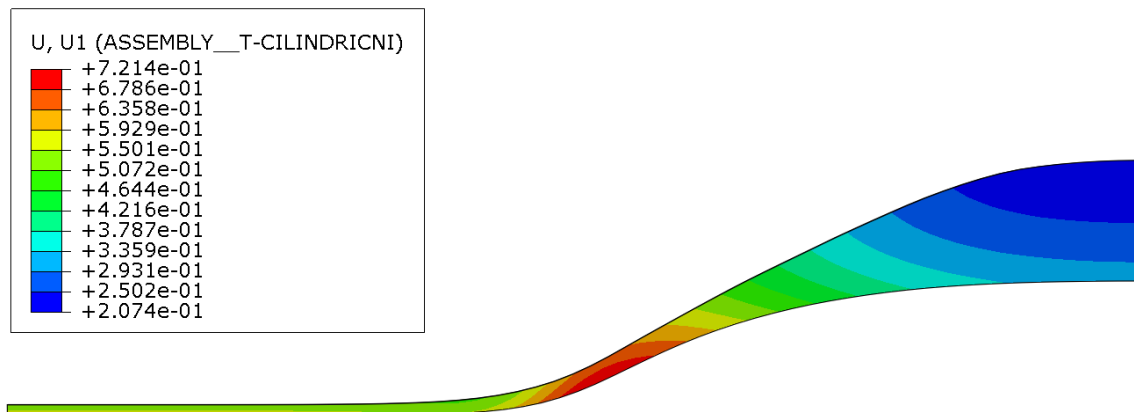
Slika 19: Polje cirkularnog naprezanja modela aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku

Graf na slici (20) prikazuje dobivene vrijednosti r_s metodom konačnih elemenata iz programskog paketa *Abaqus* i zadane vrijednosti r_s iz tablice (6).



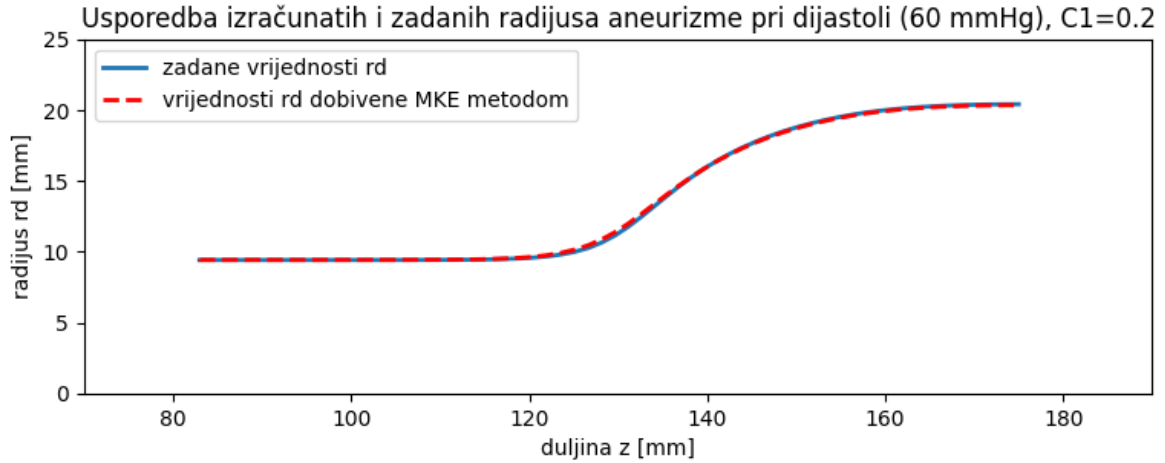
Slika 20: Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od jednog materijala pri sistoličkom tlaku

Radijalni pomaci pri dijastoličkom tlaku prikazani su na slici (21). Maksimalni pomaci pojavljuju se na prijelazu ravne žile u područje aneurizme kao i pri sistoličkom tlaku. Najveći pomak nešto je veći od 0.7 mm, a najmanji iznosi oko 0.2 mm na vanjskom dijelu žile pri najdebljoj geometriji.



Slika 21: Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od jednog materijala pri dijastoličkom tlaku

Usporedba dobivenih vrijednosti u programskom paketu *Abaqus* i zadanih vrijednosti unutarnjih radijusa aneurizme pri dijastoličkom tlaku dana je na slici (22).



Slika 22: Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od jednog materijala pri dijastoličkom tlaku

Globalna greška određuje se uspoređivanjem svih izračunatih i zadanih podataka. Izračunava se iz izraza (55). Izraz predstavlja normaliziranu srednju kvadratnu pogrešku.

$$\text{greška} = \frac{\sum (r_{\text{Abaqus}} - r_{\text{zadano}})^2}{\sum r_{\text{zadano}}^2}. \quad (55)$$

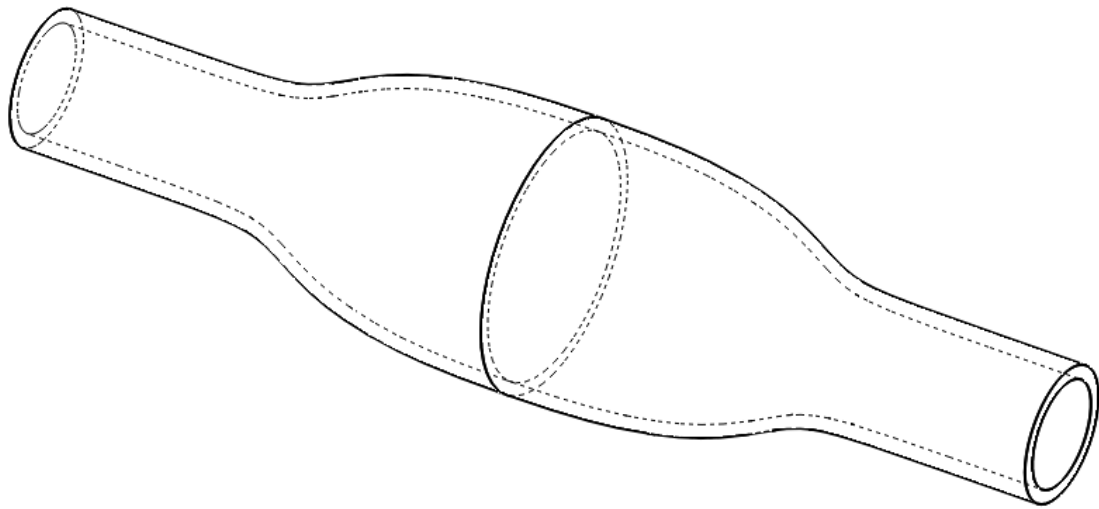
Iznosi grešaka za model aneurizme od jednog materijala dane su u tablici (7)

Tablica 7: Greška - Model aneurizme od jednog materijala

	Sistola (120 mmHg)	Dijastola (60 mmHg)
greška	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$2.93 \cdot 10^{-5}$

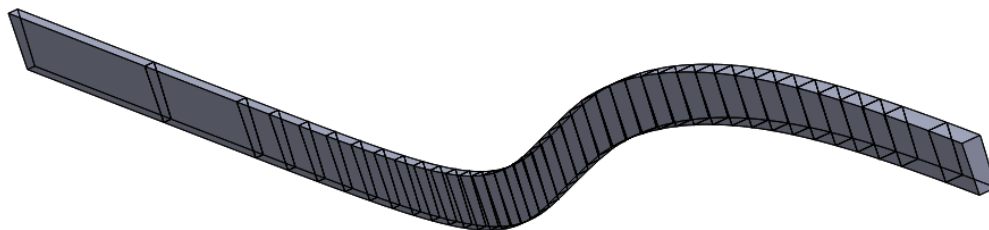
6.1.2 Primjena metode konačnih elemenata na model aorte s aneurizmom približno konstantne debljine od 2mm

Model aneurizme debljine 2 mm formiran je od 42 različita hiperelastična nestlačiva materijala različitih krutosti C_1 . Pripadajuće konstante C_1 u rasponu su od oko 0.1 MPa do 0.7 MPa. Oblik takve aneurizme dan je na slici (23).



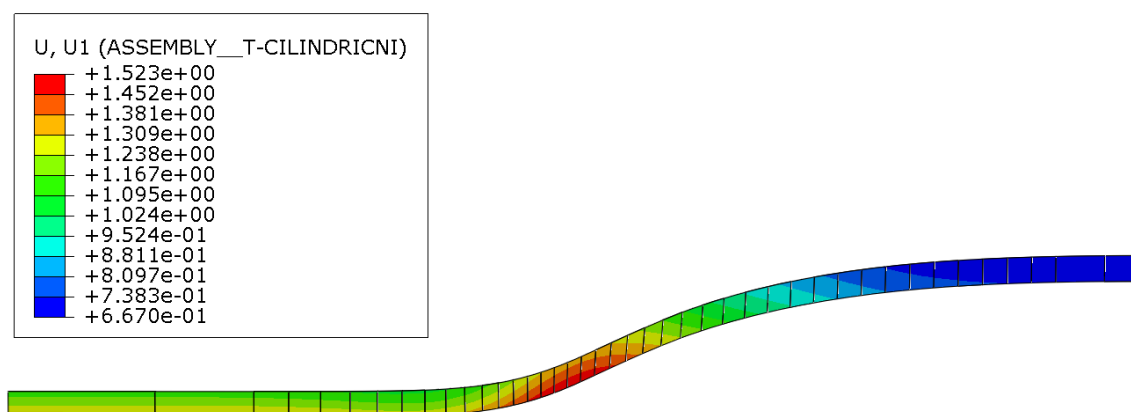
Slika 23: Oblik aneurizme od 42 različita materijala

Uz uvjet simetrije i osne simetrije dobiva se pojednostavljeni model aneurizme koji pokriva kut od 2° . Model je izrađen od 42 različita materijala i podvrgnut analizi konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*. Prikazan je na slici (24)



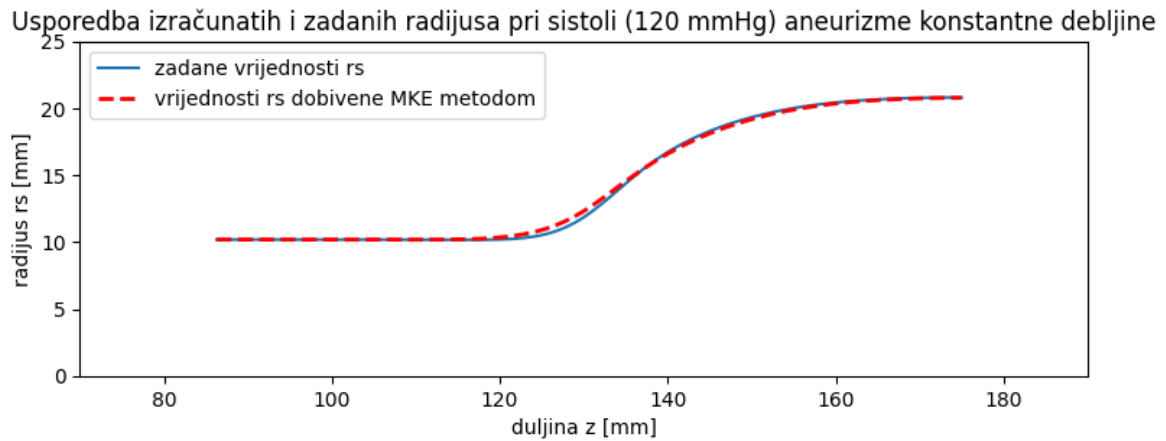
Slika 24: Pojednostavljeni model aneurizme od 42 različita materijala

Na slici (25) prikazani su radijalni pomaci modela izrađenog od 42 materijala pri sistoličkom tlaku. Pomaci su najveći na prijelazu iz ravne žile u aneurizmu (crveno područje). Pomaci su veći na unutarnjem radijusu modela u odnosu na vanjski te su minimalni na području gdje je radijus najveći. Najveći iznos pomaka je oko 1.5 mm, a najmanji oko 0.67 mm.



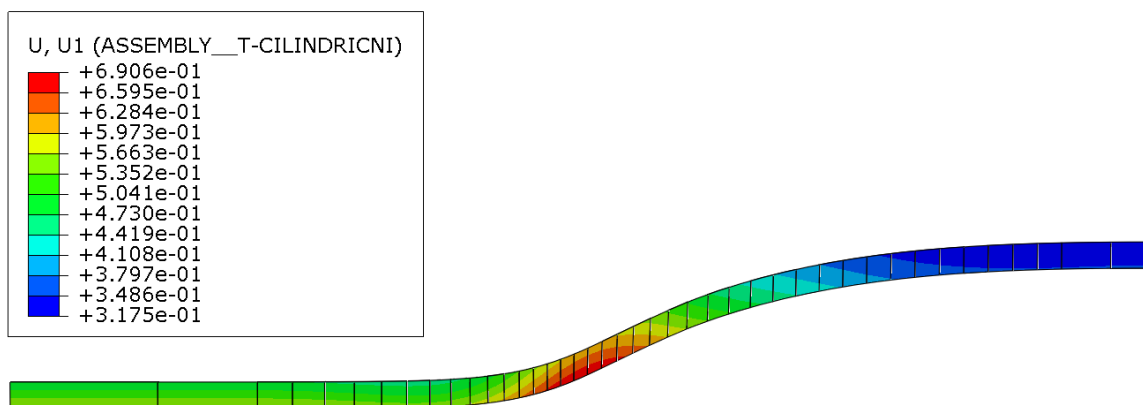
Slika 25: Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od 42 različita materijala pri sistoličkom tlaku

Usporedba dobivenih vrijednosti metodom konačnih elemenata i zadanih vrijednosti unutarnjih radijusa aneurizme pri sistoličkom tlaku dana je na slici (26).



Slika 26: Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od 42 različita materijala pri sistoličkom tlaku

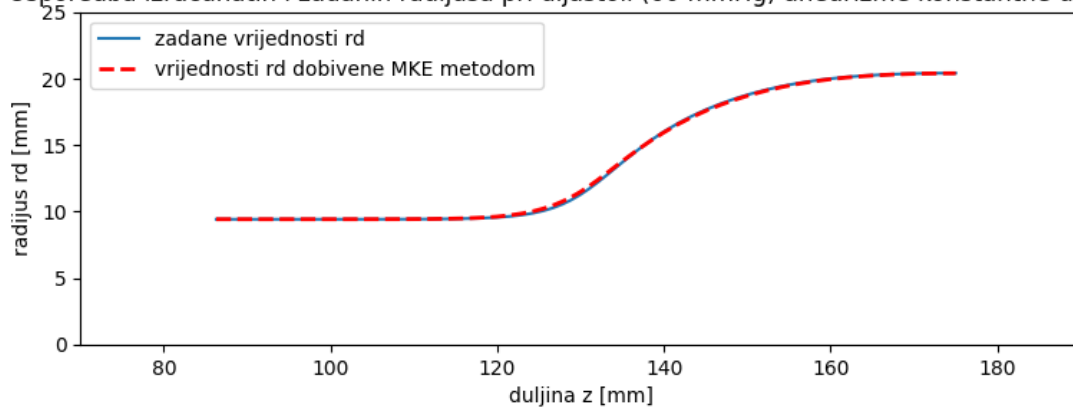
Polje radijalnih pomaka pri dijastoličkom tlaku dana je na slici (27). Najveći pomaci javljaju se pri prijelazu iz zdrave žile u aneurizmu te iznose oko 0.7 mm, a najmanji pri najvećim radijusima te iznose oko 0.3 mm. Pomaci su veći na unutarnjoj površini aneurizme te se smanjuju prema vanjskoj površini.



Slika 27: Polje radijalnih pomaka modela aneurizme od 42 različita materijala pri dijastoličkom tlaku

Usporedba izračunatih i zadanih vrijednosti unutarnjih radijusa aneurizme konstantne debljine pri dijastoličkom tlaku dana je grafom (28).

Usporedba izračunatih i zadanih radijusa pri dijastoli (60 mmHg) aneurizme konstantne debljine



Slika 28: Usporedba zadanih i izračunatih vrijednosti unutarnjeg radijusa aneurizme od 42 različita materijala pri dijastoličkom tlaku

Globalna greška modela računa se prema izrazu (55) te je dana u tablici (8)

Tablica 8: Greška - Model aneurizme konstantne debljine

	Sistola (120 mmHg)	Dijastola (60 mmHg)
greška	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$3.39 \cdot 10^{-5}$

7 Zaključak

Cilj ovog rada je razviti postupak za izračunavanje neopterećene geometrije konusne krvne žile te primjena tog postupka na model krvne žile s aneurizmom. Dobivene modele verificirane simulacijama, moguće je proizvesti 3D ispisom od hiperelastičnih materijala i koristiti u medicinskim istraživanjima. Ovi modeli konstruirani su na temelju geometrije izračunate numeričkim metodama. Numeričkim metodama se iz poznate geometrije opterećene krvne žile izračunava neopterećena geometrija umjetnog modela žile od hiperelastičnog materijala.

Razvijeni numerički model za izračunavanje neopterećene geometrije ravne žile prilagođen je za dobivanje neopterećene geometrije konusne žile. Primijenjen je na konusnu geometriju te su rješenja uspoređena s vrijednostima dobivenim metodom konačnih elemenata. Točnost takvog modela ovisna je o diskretizaciji konusne žile. Što je diskretizacija gušća, rezultati su bolji pa tako model s gušćom diskretizacijom postiže bolju i zadovoljavajuću točnost. Takav numerički model primijenjen je na modelu aneurizme. Geometrija između dvije zadane točke modelirana je kao konusna žila. Izrađena su dva modela aneurizme. Prvi od jednog materijala promjenjive debljine stijenke, a drugi od 42 različita materijala približno konstantne debljine od 2 mm.

Prvi model koristi jedan hiperelastični materijal za cijeli volumen, pa se debljina umjetne žile mijenja s porastom radijusa. Budući da je model od jednog materijala konstantne krutosti, veću krutost moguće je jedino postići većom debljinom materijala. Drugi model koristi različite materijale dok je debljina stijenke konstantna. Korištenjem različitih materijala dobiva se različita krutost duž žile.

Proizvodnja ovakvih modela zahtjeva primjenu metoda aditivne proizvodnje, no zbog strukturne nestabilnosti izazvane malim debljinama, to nije jednostavno. Ipak, uz pravilnu pripremu modela moguće je proizvesti uzorke s malim debljinama. S druge strane još uvijek je nemoguće proizvesti kontinuirani model od različitih materijala, a da ne dođe do miješanja na njihovim granicama što utječe na svojstva materijala. Model aneurizme od različitih materijala tako je za sada još uvijek primjenjiv samo teorijski.

Numerička metoda koristi izraz za tlak na unutrašnjoj stijenci žile, s visokim stupnjem točnosti za analizu ravnih i cilindričnih modela. U oba modela najveća odstu-

panja javljaju se pri prijelazu iz zdrave žile u aneurizmu gdje je i promjena nagiba geometrije najveća. Odstupanja su izraženija pri maksimalnom sistoličkom tlaku no i dalje su unutar inženjerski prihvatljivih vrijednosti.

Literatura

- [1] Krvožilni sustav, Wikipedia, web stranica:
https://hr.wikipedia.org/wiki/Krvo%C5%BEilni_sustav (siječanj 2025.)

- [2] Koje vrste aneurizme postoje i kako se liječe?, ASA bolnica, web stranica:
<https://asabolnica.ba/blog/koje-vrste-aneurizme-postoje-i-kako-se-lijece> (siječanj 2025.)

- [3] Trodimenzionalni ispis, Wikipedia, web stranica:
https://hr.wikipedia.org/wiki/Trodimezionalni_ispis (siječanj 2025.)

- [4] Hyperelastic material, Wikipedia, web stranica:
https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic_material (siječanj 2025.)

- [5] Functon bay tech support, web stranica:
<https://support.functionbay.com/en/faq/single/87/difference-hyper-elastic-material-elastic-material-recurdyn>
(siječanj 2025.)

- [6] Slip Fronts at Frictional Interfaces: A Numerical and Theoretical Study, Theses, David s. Kammer, ETH Zurich, 2014.

- [7] Deformation Gradients, GitHub, web stranica:
<https://mooseframework.inl.gov/modules/peridynamics/DeformationGradients.html> (siječanj 2025.)

- [8] Newton's Method, Wikipedia, web stranica:
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method# (siječanj 2025.)

- [9] Ivo Alfirević, Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, 2003.

Prilozi

- programski *Python* kod za dobivanje neopterećene geometrije konusa materijalne konstante C_1
- programski *Python* kod za dobivanje neopterećene geometrije ravne žile zadane debljine h

Programski *Python* kod za dobivanje neopterećene geometrije konusa materijalne konstante C_1

```
#ulazni podaci su:
# tlakovi pri sistoli i dijastoli ps i pd
# poznati radijusi za konus (rmd,rvd,rms,rvs) i duljina L
# materijalna konstanta C
# željeni broj točaka diskretizacije nL

import numpy as np
from scipy.integrate import simpson
from scipy.optimize import newton

z= np.linspace(0,L,nL,endpoint=True)
Ps=np.full_like(z,ps)
Pd=np.full_like(z,pd)
rd=rmd+(rvd-rmd)/L*z
rs=rms+(rvs-rms)/L*z

def tlak(R,C,r,r0,n=1000):
    x = np.linspace(r,R,n,endpoint=True)
    x0 = np.sqrt(r0**2 + (x**2 - r**2))
    integrand = (x/x0)**2 - 1/(x/x0)**2
    integrand *= 2*C/x
    integral = simpson(y=integrand,x=x)
    return integral

def pomocna_r0(r0,p,C,R,r):
    p_izr=np.zeros(nL)
    for i in range(nL):
        p_izr[i]=tlak(R[i],C,r[i],r0[i])
    return np.abs(p-np.abs(p_izr))

def ini_r0(p,C,R,r):
```

```

root=newton(pomocna_r0,0.7*r,x1=0.999*0.7*r,args=(p,C,R,r))
return root

def pomocna_r(r,p,C,R0,r0):
    R=np.sqrt(r**2+(R0**2-r0**2))
    p_izr=np.zeros(nL)
    for i in range(nL):
        p_izr[i]=tlak(R[i],C,r[i],r0[i])
    return np.abs(p-np.abs(p_izr))

def ref_r(p,C,R0,r0):
    root=newton(pomocna_r,1.001*r0,x1=r0*1.001**2,args=(p,C,R0,r0))
    return root

def dijas_r(R_s,p_s,p_d,C,r_s):
    r0s=ini_r0(p_s,C,R_s,r_s)
    R0s=np.sqrt(r0s**2+(R_s**2-r_s**2))
    r_d=ref_r(p_d,C,R0s,r0s)
    return r_d

def sis_R(R_s,r_d,p_s,p_d,C,r_s):
    return np.abs(r_d-np.abs(dijas_r(R_s,p_s,p_d,C,r_s)))

Rs=newton(sis_R,1.02*rs,args=(rd,Ps,Pd,C,rs))
r0=ini_r0(Ps,C,Rs,rs)
R0=np.sqrt(r0**2+(Rs**2-rs**2))

```


Programski *Python* kod za dobivanje neopterećene geometrije ravne žile zadane debljine h

```
#ulazni podaci su:
# tlakovi pri sistoli i dijastoli ps i pd
# poznati unutarnji radijusi rd i rs
# zeljena debljina pri sistoli h

import numpy as np
from scipy.integrate import simpson
from scipy.optimize import newton

Rs=rs+h

def tlak(R,C,r,r0,la,n=1000):
    x = np.linspace(r,R,n,endpoint=True)
    x0 = np.sqrt(r0**2 + (x**2 - r**2)*la)
    integrand = (x/x0)**2 - 1/(la*x/x0)**2
    integrand *= 2*C/x
    integral = simpson(y=integrand,x=x)
    return integral

def pomocna_r0(r0,p,C,R,r,la):
    return np.abs(p-np.abs(tlak(R,C,r,r0,la)))

def ini_r(p,C,R,r,la):
    root=newton(pomocna_r0,0.7*r,x1=0.999*0.7*r,args=(p,C,R,r,la))
    return root

def pomocna_r(r,p,C,R0,r0,la):
    R=np.sqrt(r**2+(1/la)*(R0**2-r0**2))
    return np.abs(p-np.abs(tlak(R,C,r,r0,la)))
```

```

def ref_r(p,C,R0,r0,la):
    root=newton(pomocna_r,1.001*r0,x1=r0*1.001**2,args=(p,C,R0,r0,la))
    return root

def dijas_r(Rs,ps,pd,C,rs,la):
    r0s=ini_r(ps,C,Rs,rs,la)
    R0s=np.sqrt(r0s**2+(Rs**2-rs**2)*la)
    rd=ref_r(pd,C,R0s,r0s,la)
    return rd

def mat_C(C,Rs,rd,ps,pd,rs,la):
    return np.abs(rd-np.abs(dijas_r(Rs,ps,pd,C,rs,la)))

C=newton(mat_C,0.2, args=(rs+2,rd,ps,pd,rs,la))

r0=ini_r(ps,C,Rs,rs,la)
R0=np.sqrt(r0**2+(Rs**2-rs**2)*la)

```