

# Praćenje procesa kontrolnim kartama za varijable

---

**Grizelj, Dominik**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:029318>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Dominik Grizelj**

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Dr. sc. Vedran Šimunović, dipl. ing.

Student:

Dominik Grizelj

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, uz pomoć navedene literature.

Zahvaljujem se svom mentoru dr. sc. Vedran Šimunović na savjetima, uputstvima i komentarima pri izradi ovog rada. Zahvaljujem se svojoj obitelji na podršci i razumijevanju tijekom studiranja.

Dominik Grizelj



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Proizvodno inženjerstvo, inženjerstvo materijala, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
mehatronika i robotika, autonomni sustavi i računalna inteligencija

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 24 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 24 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Domink Grizelj** JMBAG: 003535223734

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Praćenje procesa kontrolnim kartama za varijable**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Process monitoring with control charts for variables**

Opis zadatka:

Kontrolne karte jedan su od najvažnijih alata u kontroli kvalitete procesa i proizvoda jer omogućuju kontinuirano praćenje proizvodnih parametara i prepoznavanje odstupanja od zadanih specifikacija. Uobičajeno se pojedinačna značajka zasebno prati kontrolnom kartom, međutim, kada više značajki zajednički utječe na proizvod ili proces, korištenje standardnih kontrolnih karata može dovesti do pogrešnih zaključaka. U takvim situacijama primjenjuju se multivarijantne kontrolne karte, koje omogućuju simultano praćenje više povezanih varijabli. Ove karte pomažu u boljem razumije vanju međusobnih utjecaja varijabli i točnijem detektiranju odstupanja koja bi mogla proći neopaženo pri korištenju univarijantnih tehnika.

U radu je potrebno:

- opisati  $\bar{x} - R$  kontrolnu kartu za varijable i njenu primjenu
- opisati Hotelling-ovu kontrolnu kartu i njenu primjenu
- simulirati proizvodni proces gdje barem dvije značajke utječu na funkcionalnost proizvoda
- pratiti proces  $\bar{x} - R$  kontrolnom kartom
- pratiti proces Hotelling-ovom kontrolnom kartom
- analizirati dobivene rezultate.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

26. rujna 2024.

Datum predaje rada:

28. studeni 2024.

Predviđeni datumi obrane:

5., 6. i 9. prosinca 2024.

Zadatak zadao:

Doc.dr.sc. Vedran Šimunović

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Ivica Garašić

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA .....	III
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK .....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD .....	1
2. $\bar{X}$ i $R$ KONTROLNE KARTE .....	4
2.1. Statistička osnova $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti .....	4
2.2. Karte faze 1 i 2 primjene $\bar{x}$ i $R$ karte .....	5
2.3. Revizija kontrolnih granica i središnjih linija .....	7
2.4. Kontrolne granice, granice specifikacije i granice prirodne tolerancije .....	7
2.5. Racionalne podskupine .....	7
2.6. Smjernice za konstruiranje kontrolne karte .....	8
2.7. Interpretacija $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti .....	9
2.8. Primjer $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti[1] .....	12
3. MULTIVARIJANTNE KONTROLNE KARTE .....	17
3.1. Hotelling-ova $T^2$ kontrolna karta .....	19
3.2. Karte faze 1 i faze 2 .....	20
3.3. Kontrolne granice faze 1 .....	22
3.4. Kontrolne granice faze 2 .....	22
3.5. Upotreba i tumačenja .....	23
3.6. Pojedinačni uzorci s nepoznatim parametrima procesa .....	24
3.7. Generalizirani dijagram varijance .....	25
3.8. Primjer multivarijantne kontrolne karte[2] .....	27
4. PRAKTIČNI DIO .....	32
4.1. Primjer 1 .....	32
4.2. Primjer 2 .....	45
4.3. Primjer 3 .....	56
5. ZAKLJUČAK .....	68
LITERATURA .....	69
PRILOG .....	70

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Ciklički obrazac[3] .....	10
Slika 2.	Mixture obrazac[3] .....	10
Slika 3.	Pomak srednje vrijednosti procesa[3].....	11
Slika 4.	Obrazac trenda[3] .....	11
Slika 5.	Obrazac stratifikacije[3] .....	12
Slika 6.	$\bar{x}$ i $R$ kontrolna karta[1].....	16
Slika 7.	Eliptične kontrolne granice[2] .....	18
Slika 8.	$T^2$ kontrolna karta za bivarijantnu proizvodnju tkanine[2].....	31
Slika 9.	$R$ kontrolna karta za $i = 1$ .....	36
Slika 10.	$R$ kontrolna karta za $i = 2$ .....	37
Slika 11.	$\bar{x}$ kontrolna karta za $i = 1$ .....	37
Slika 12.	$\bar{x}$ kontrolna karta za $i = 2$ .....	38
Slika 13.	$T^2$ kontrolna karta .....	42
Slika 14.	Kontrolna karta generalizirane varijance.....	44
Slika 15.	$\bar{x}$ kontrolna karta za faktor loma.....	47
Slika 16.	$\bar{x}$ kontrolna karta za težinu vlakana .....	48
Slika 17.	$R$ kontrolna karta za faktor loma .....	48
Slika 18.	$R$ kontrolna karta za težinu vlakana.....	49
Slika 19.	$T^2$ kontrolna karta .....	53
Slika 20.	Kontrolna karta generalizirane varijance.....	55
Slika 21.	$R$ kontrolna karta za $i = 1$ .....	60
Slika 22.	$R$ kontrolna karta za $i = 2$ .....	60
Slika 23.	$\bar{x}$ kontrolna karta za $i = 1$ .....	61
Slika 24.	$\bar{x}$ kontrolna karta za $i = 2$ .....	61
Slika 25.	$T^2$ kontrolna karta .....	65
Slika 26.	Kontrolna karta generalizirane varijance.....	67
Slika 27.	Vrijednosti $F$ -distribucije[2] .....	70
Slika 28.	Faktori za konstruiranje kontrolnih karti za varijable[1].....	71

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Širina protoka svih uzoraka[1] .....	13
Tablica 2. Vrijednosti aritmetičke sredine i raspona svih uzoraka[1] .....	14
Tablica 3. Bivarijantni podaci prilikom proizvodnje tkanine[2].....	27
Tablica 4. Iznosi statistika potrebnih za konstrukciju $T^2$ kontrolne karte[2] .....	28
Tablica 5. Vrijednosti $p, n, m$ .....	32
Tablica 6. Podaci mjerenja .....	32
Tablica 7. Aritmetička sredina svakog uzorka $\bar{x}_{ij}$ .....	33
Tablica 8. Raspon svakog uzorka $R_{ij}$ .....	34
Tablica 9. Središnje linije $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti .....	35
Tablica 10. Vrijednosti faktora $A_2, D_3$ i $D_4$ .....	35
Tablica 11. Vrijednosti kontrolnih granica za $\bar{x}$ kontrolnu kartu .....	36
Tablica 12. Vrijednosti kontrolnih granica za $R$ kontrolnu kartu .....	36
Tablica 13. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka .....	38
Tablica 14. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka.....	39
Tablica 15. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz .....	40
Tablica 16. Vrijednosti $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ .....	40
Tablica 17. Vrijednosti $T^2$ statistike .....	41
Tablica 18. Vrijednosti generalizirane varijance.....	43
Tablica 19. Vrijednosti faktora $b_1$ i $b_2$ .....	43
Tablica 20. Kontrolne granice generalizirane varijance .....	44
Tablica 21. Aritmetička sredina svakog uzorka $\bar{x}_{ij}$ .....	45
Tablica 22. Raspon svakog uzorka $R_{ij}$ .....	46
Tablica 23. Središnje linije $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti .....	46
Tablica 24. Vrijednosti kontrolnih granica za $\bar{x}$ kontrolnu kartu .....	47
Tablica 25. Vrijednosti kontrolnih granica za $R$ kontrolnu kartu .....	47
Tablica 26. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka.....	49
Tablica 27. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka.....	50
Tablica 28. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz .....	50
Tablica 29. Vrijednosti $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ .....	50
Tablica 30. Vrijednosti $T^2$ statistike .....	51
Tablica 31. Vrijednosti generalizirane varijance.....	53
Tablica 32. Vrijednosti faktora $b_1$ i $b_2$ .....	54
Tablica 33. Kontrolne granice generalizirane varijance .....	54
Tablica 34. Vrijednosti $p, n, m$ .....	56
Tablica 35. Podaci mjerenja .....	56
Tablica 36. Aritmetička sredina svakog uzorka $\bar{x}_{ij}$ .....	57
Tablica 37. Raspon svakog uzorka $R_{ij}$ .....	58
Tablica 38. Središnje linije $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti .....	58
Tablica 39. Vrijednosti faktora $A_2, D_3$ i $D_4$ .....	59
Tablica 40. Vrijednosti kontrolnih granica za $\bar{x}$ kontrolnu kartu .....	59
Tablica 41. Vrijednosti kontrolnih granica za $R$ kontrolnu kartu .....	59
Tablica 42. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka.....	62
Tablica 43. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka.....	63



---

Tablica 44. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz .....	63
Tablica 45. Vrijednosti $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ .....	63
Tablica 46. Vrijednosti $T^2$ statistike .....	64
Tablica 47. Vrijednosti generalizirane varijance.....	65
Tablica 48. Vrijednosti faktora $b_1$ i $b_2$ .....	66
Tablica 49. Kontrolne granice generalizirane varijance .....	66

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_2$	-	Konstanta
$b_1$	-	Parametar
$b_2$	-	Parametar
$D_3$	-	Konstanta
$D_4$	-	Konstanta
$E( S )$	mm <sup>2</sup>	Aritmetička sredina determinante $S$
$F$	-	Distribucija
$i$	-	Broj karakteristike kvalitete u matrici
$j$	-	Broj uzorka u matrici
$k$	-	Opažanje
$m$	-	Broj uzoraka
$n$	-	Veličina uzorka
$p$	-	Broj varijabli
$R$	mm	Raspon
$\bar{R}$	mm	Aritmetička sredina raspona
$S$	mm <sup>2</sup>	Matrica varijance-kovarijance uzorka
$ S $	mm <sup>2</sup>	Determinanta matrice varijance-kovarijance uzorka
$s_i^2$	mm <sup>2</sup>	Aritmetička sredina varijanci svih uzoraka za $i$ -tu karakt.
$s_{ij}^2$	mm <sup>2</sup>	Varijanca uzorka za $i$ -tu karakteristiku u $j$ -tom uzorku
$s_{ih}$	mm <sup>2</sup>	Aritmetička sredina kovarijanci svih uzoraka za $i$ -tu karakt.
$s_{ijh}$	mm <sup>2</sup>	Kovarijanca između karakteristika $i$ i $h$ u $j$ -tom uzorku
$T^2$	-	Statistički parametar $T^2$ kontrolne karte
$V( S )$	mm <sup>2</sup>	Varijanca determinante $S$
CL	mm	Središnja linija kontrolne karte
LCL	mm	Donja kontrolna granica
UCL	mm	Gornja kontrolna granica
$x_{ijk}$	mm	Vrijednost $k$ -tog komada $i$ -te karakteristike u $j$ -tom uzorku
$\bar{x}_{ij}$	mm	Aritmetička sredina $i$ -te karakteristike u $j$ -tom uzorku
$\bar{\bar{x}}_i$	mm	Procijenjena aritmetička sredina procesa za $i$ -tu karakt.
$x_{max}$	mm	Najviša vrijednost u uzorku
$x_{min}$	mm	Najniža vrijednost u uzorku
$\alpha$	%	Vjerojatnost pogreške tipa 1
$\alpha'$	%	Vjerojatnost pogreške tipa 1 za multivarijantni postupak
$\mu$	mm	Očekivanje
$\Sigma$	mm <sup>2</sup>	Matrica varijance-kovarijance procesa
$\sigma$	mm	Standardno odstupanje

---

## SAŽETAK

Kvaliteta proizvoda postala je ključni faktor u konkurentnosti i poslovnom uspjehu. Poboljšanje kvalitete uključuje smanjenje varijabilnosti procesa što rezultira smanjenjem kvarova i povećanjem stabilnosti. Statistička kontrola procesa (SPC) važan je alat za postizanje stabilnosti i poboljšanja kvalitete koristeći sedam osnovnih alata. Kontrolne karte pomažu u praćenju procesa i identifikaciji odstupanja. One omogućuju prepoznavanje problema u proizvodnji i pružaju informacije za poboljšanje procesa. Proces kontrole podrazumijeva dvije faze gdje se prva koristi za postavljanje stabilnih kontrolnih granica dok druga služi za praćenje procesa i otkrivanje manjih odstupanja. U radu je objašnjena statistička osnova  $\bar{x}$  i  $R$  univarijantne kontrolne karte te  $T^2$  multivarijantne kontrolne karte. U diplomskom radu osmišljeni su različiti primjeri kojima je pokazano kako se analizom istih mjernih podataka mogu dobiti drugačija rješenja statističke kontrole ovisno dali se karakteristike kvalitete (varijable) gledaju pojedinačno ili skupno. Kontrolne karte su izrađene u programu Excel.

Ključne riječi: Statistička kontrola procesa,  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte,  $T^2$  multivarijantna kontrolna karta

---

## SUMMARY

The quality of a product has become a key factor in competitiveness and business success. Improving quality involves reducing process variability which results in fewer defects and increased stability. Statistical Process Control (SPC) is an important tool for achieving stability and improving quality using the seven basic tools. Control charts help monitor processes and identify deviations. They enable the recognition of problems in production and provide information for process improvement. The control process involves two phases. The first is used to set stable control limits, while the second is for monitoring the process and detecting minor deviations. This paper explains the statistical foundation of the  $\bar{x}$  and  $R$  univariate control charts, as well as the  $T^2$  multivariate control chart. Examples of these charts are provided to demonstrate how certain data can lead to different statistical control solutions depending on whether quality characteristics (variables) are viewed individually or collectively. The control charts are constructed and presented in Excel.

Key words: statistical process control,  $\bar{x}$  i  $R$  control charts,  $T^2$  multivariate control chart

## 1. UVOD

Kvaliteta je postala jedan od najvažnijih faktora pri odabiru među konkurentskim proizvodima i uslugama bez obzira na to je li potrošač pojedinac, industrijska organizacija, maloprodajna trgovina, banka ili financijska institucija. Posljedično, razumijevanje i poboljšanje kvalitete ključni su faktori koji vode poslovnom uspjehu, rastu i poboljšanoj konkurentnosti. Poboljšanje kvalitete predstavlja smanjenje varijabilnosti procesa i proizvoda što ima direktan utjecaj na smanjenje broja kvarova proizvoda.

Ako proizvod treba ispuniti ili nadmašiti očekivanja kupaca potrebno ga je proizvoditi postupkom koji je stabilan i ponovljiv. Točnije, proces mora biti sposoban funkcionirati s malim varijabilnostima oko ciljnih ili nominalnih dimenzija karakteristika kvalitete proizvoda. Statistička kontrola procesa (SPC) moćna je zbirka alata za rješavanje problema korisnih u postizanju stabilnosti procesa i poboljšanju sposobnosti kroz smanjenje varijabilnosti.[1]

SPC je veliko dostignuće jer se temelji na zdravim temeljnim načelima, jednostavan je za korištenje, ima značajan utjecaj i može se primijeniti na bilo koji proces. Njegovih sedam glavnih alata su: histogram, kontrolni list, Pareto dijagram, uzročno-posljedični dijagram, dijagram koncentracije defekata, dijagram raspršenosti, kontrolna karta.[1]

Iako su ti alati koji se često nazivaju sedam veličanstvenih važan dio SPC-a, oni obuhvaćaju samo njegove tehničke aspekte. Pravilna implementacija SPC-a pomaže u stvaranju okruženja u kojem svi pojedinci u organizaciji traže kontinuirano poboljšanje kvalitete i produktivnosti. Ovo se okruženje najbolje razvija kada se menadžment uključi u proces. Jednom kada se okruženje uspostavi, rutinska primjena SPC-a postaje dio uobičajenog načina poslovanja, a organizacija je na dobrom putu da postigne svoje ciljeve poboljšanja poslovanja.[1]

Od sedam alata, Shewhartova kontrolna karta vjerojatno je tehnički najsofisticiranija. Kontrolna karta je tehnika *online* praćenja procesa. Kontrolne karte također se mogu koristiti za procjenu parametara proizvodnog procesa i za određivanje sposobnosti procesa. Kontrolna karta može pružiti informacije korisne i za poboljšanje procesa.[2]

Kontrolne karte je razvio 1920-ih godina Walter A. Shewhart iz Bell Telephone Laboratories. Da bi se razumjeli statistički koncepti koji čine osnovu SPC-a, prvo je potrebno opisati Shewhartovu teoriju varijabilnosti.[2]

U svakom proizvodnom procesu, bez obzira na to koliko je dobro osmišljen ili pažljivo održavan, uvijek će postojati određena količina inherentne ili prirodne varijabilnosti. Ova prirodna varijabilnost ili "pozadinska buka" je kumulativni učinak mnogih malih, neizbježnih uzroka. U okviru statističke kontrole kvalitete, ova se prirodna varijabilnost često naziva stabilnim sustavom slučajnih uzroka. Za proces koji funkcionira uz prisutne samo slučajne uzroke kaže se da je pod statističkom kontrolom. Drugim riječima, slučajni uzroci su sastavni dio procesa.[1]

Druge vrste varijabilnosti mogu povremeno biti prisutne u izlazu procesa. Ova varijabilnost u ključnim karakteristikama kvalitete obično proizlazi iz tri izvora: neispravno podešeni ili kontrolirani strojevi, pogreške operatera i neispravan materijal. Takva je varijabilnost općenito velika u usporedbi s prirodnom varijabilnosti i obično predstavlja neprihvatljivu razinu izvedbe procesa. Ove izvore varijabilnosti koji nisu dio slučajnog uzroka nazivaju se varijabilnosti koji se mogu pripisati određenom uzroku. Za proces koji djeluje u prisutnosti uzroka koji se mogu pripisati kaže se da je izvan kontrole.[1]

U primjeni statističkih metoda za kontrolu kvalitete tipično je klasificirati podatke o karakteristikama kvalitete kao podatke o atributima ili varijablama. Varijabilni podaci obično su kontinuirana mjerenja, primjerice duljina ili napon. Podaci o atributima obično su diskretni podaci, često u obliku prebrojavanja. [3]

Karakteristike kvalitete često se ocjenjuju u odnosu na specifikacije. Za proizvedeni proizvod, specifikacije su željene mjere za karakteristike kvalitete komponenti i podsklopova koji čine proizvod. Tako se onda mjerna vrijednost koja odgovara željenoj vrijednosti za tu karakteristiku kvalitete naziva se nominalna ili željena vrijednost. Ove nominalne vrijednosti obično su ograničene rasponom vrijednosti za koje se vjeruje da će biti dovoljno blizu cilja da ne utječu na funkciju ili izvedbu proizvoda ako je karakteristika kvalitete u tom rasponu. Najveća dopuštena vrijednost za karakteristiku kvalitete naziva se gornja granica specifikacije

USL (eng. Upper Specification Limit), a najmanja dopuštena vrijednost kvalitete se naziva donja granica specifikacije LSL (eng. Lower Specification Limit).[3]

Upotreba standardne kontrolne karte uključuje fazu 1 i fazu 2 s dva različita cilja. U fazi 1 skup podataka o procesu skuplja se i analizira odjednom u retrospektivnoj analizi, konstruirajući kontrolne granice ispitivanja kako bi se utvrdilo je li proces bio pod kontrolom tijekom vremenskog razdoblja tijekom kojeg su podaci prikupljeni i kako bi se vidjelo mogu li se uspostaviti pouzdane kontrolne granice za praćenje buduće proizvodnje. To je obično prva stvar koja se radi kada se kontrolne karte primjenjuju na bilo koji proces. Kontrolne karte u fazi 1 prvenstveno pomažu operativnom osoblju u dovođenju procesa u stanje statističke kontrole. Faza 2 počinje nakon što imamo "čist" skup podataka o procesu prikupljenih pod stabilnim uvjetima i reprezentativnih za izvedbu procesa u kontroli. U fazi 2 kontrolna karta se koristi za praćenje procesa uspoređujući statistiku uzorka za svaki uzastopni uzorak kako se izvlači iz procesa do kontrolnih granica.[2]

Bitno je naglasiti da su granice kontrolne karte statističke granice izračunate iz podataka dobivenih praćenjem procesa i nisu u vezi s granicama specifikacija proizvoda. Uobičajeno se koristi oznaka UCL (eng. Upper Control Limit) za gornju kontrolnu granicu dok se LCL (eng. Lower Control Limit) koristi za donju kontrolnu granicu.

Shewhartove kontrolne karte vrlo su učinkovite u fazi 1 jer ih je lako konstruirati i interpretirati i jer su učinkovite u otkrivanju velikih, trajnih pomaka u parametrima procesa. Uzorke na Shewhartovim kontrolnim kartama je lako protumačiti i imaju izravno fizičko značenje. U fazi 2 se obično pretpostavlja da je proces stabilan. Često pripisivi uzroci koji se javljaju u fazi 2 rezultiraju manjim procesnim pomacima, jer je većina izvora varijabilnosti sustavno uklonjena tijekom faze 1. Naglasak je sada na praćenju procesa, a ne na dovođenju procesa pod kontrolom.[2]

## 2. $\bar{X}$ i R KONTROLNE KARTE

### 2.1. Statistička osnova $\bar{x}$ i R kontrolnih karti

Pretpostavlja se da je karakteristika kvalitete normalno distribuirana sa očekivanjem  $\mu$  i standardnim odstupanjem  $\sigma$ , gdje su i  $\mu$  i  $\sigma$  poznati. Ako je  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uzorak veličine  $n$ , tada je aritmetička sredina ovog uzorka[1]:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2.1)$$

a,  $\bar{x}$  je normalno distribuiran sa očekivanjem  $\mu$  i standardnim odstupanjem  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Nadalje, vjerojatnost je  $1 - \alpha$  da će bilo koje očekivanje uzorka biti između[1]:

$$\mu + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{i} \quad \mu - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.2)$$

Stoga, ako su  $\mu$  i  $\sigma$  poznati, jednadžba 3.2 može se koristiti kao gornja i donja kontrolna granica na kontrolnoj karti za aritmetičku sredinu uzorka. Uobičajeno je zamijeniti  $Z_{\alpha/2}$  s 3, tako da se koriste  $3\sigma$  odstupanja. Ako aritmetička sredina uzorka padne izvan ovih granica, to je pokazatelj da aritmetička sredina procesa više nije jednaka  $\mu$ . [1]

Iako se pretpostavlja da je distribucija karakteristike kvalitete normalna, navedene formule su još uvijek približno točne čak i ako temeljna distribucija nije normalna zbog središnjeg graničnog teorema [1]

U praksi se obično ne znaju  $\mu$  i  $\sigma$ . Stoga se moraju procijeniti iz preliminarnih uzoraka ili podskupina uzetih kada se smatra da je proces pod kontrolom. Te se procjene obično trebaju temeljiti na najmanje 20 do 25 uzoraka. Pretpostavlja se da je dostupno  $m$  uzoraka, od kojih svaki uzorak sadrži  $n$  komada. Obično će  $n$  biti malen, često 4, 5 ili 6. Ove male veličine uzorka obično proizlaze iz konstrukcije racionalnih podskupina i činjenice da su troškovi uzorkovanja i inspekcije povezani s mjerenjima varijabli relativno visoki. [1]

Neka je  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$  aritmetička sredina svakog uzorka.  $\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$  Tada je najbolji procjenitelj očekivanja procesa ( $\mu$ ), aritmetička sredina svih  $\bar{x}$ , odnosno[1]:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (2.3)$$



Stoga bi se  $\bar{x}$  koristila kao središnja linija na kontrolnoj karti.

Za konstruiranje kontrolnih granica potrebna je procjena standardnog odstupanja  $\sigma$ . Procijenjeno standardno odstupanje se može procijeniti ili iz standardnih odstupanja skupa ili iz raspona  $m$  uzoraka. U ovom radu se koristi metoda raspona. Ako je  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uzorak veličine  $n$ , tada je raspon uzorka razlika između najveće i najmanje vrijednosti odnosno[1]:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (2.4)$$

Neka su  $R_1, R_2, \dots, R_m$  rasponi od  $m$  uzoraka. Aritmetička sredina raspona iznosi[1]:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (2.5)$$

Onda su izrazi za izračunavanje kontrolnih granica  $\bar{x}$  karte[1]:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{x} + A_2 \bar{R} \\ \text{Centralna linija} &= \bar{x} \\ \text{LCL} &= \bar{x} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Izrazi za izračunavanje kontrolnih granica  $R$  karte su[1]:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= D_4 \bar{R} \\ \text{Centralna linija} &= \bar{R} \\ \text{LCL} &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Faktori  $A_2, D_3, D_4$  se očitavaju iz tablica za različite veličine uzorka koji se nalazi u prilogu na slici 28.

## 2.2. Karte faze 1 i 2 primjene $\bar{x}$ i $R$ karte

U fazi 1 korištenja kontrolnih karti, kada se koriste preliminarni uzorci za izradu  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte, uobičajeno je tretirati kontrolne granice dobivenih iz jednadžbi 2.6 i 2.7 kao probne kontrolne granice. One omogućuju da se odredi je li proces bio pod kontrolom kada je odabrano  $m$  inicijalnih uzoraka. Kako bi se utvrdilo je li proces bio pod kontrolom kada su preliminarni uzorci prikupljeni, potrebno je iscrtati vrijednosti  $\bar{x}$  i  $R$  iz svakog uzorka na dijagramu i analizirati rezultate. Ako su sve točke unutar kontrolnih granica i nema nikakvog sustavnog ponašanje zaključuje se da je proces bio pod kontrolom, a probne kontrolne granice su prikladne za kontrolu sadašnje ili buduće proizvodnje. Poželjno je imati 20-25 uzoraka ili

podskupina za izračunavanje kontrolnih granica ispitivanja. Moguće je raditi s manje podataka, ali onda kontrolne granice nisu toliko pouzdane. [4]

Kako bi kontrolne granice za sadašnju ili buduću proizvodnju imale smisla moraju se temeljiti na podacima iz procesa koji je pod kontrolom. Stoga, ukoliko se pretpostavi da je jedna ili više vrijednosti  $\bar{x}$  i  $R$  izvan kontrolnih granica potrebno je izmijeniti probne kontrolne granice. To se radi ispitivanjem svake od točaka izvan kontrole, tražeći uzrok koji se može pripisati. Ako točki izvan kontrolne granice pronađemo uzrok, uzorak se odbacuje i probne kontrole granice se ponovno izračunavaju, koristeći samo preostale uzorke. Ovaj se proces nastavlja sve dok svi uzroci ne budu pod kontrolom, a tada se probne kontrolne granice usvajaju za trenutnu upotrebu. [4]

U nekim slučajevima možda neće biti moguće pronaći uzrok koji se može dodijeliti za točku koja se iscertava van kontrole. Tada su moguće dvije opcije. Prva opcija je eliminirati točku kao da je pronađen uzrok koji joj se može pripisati. Ne postoji analitičko opravdanje za odabir ove opcije, osim da su točke koje su izvan kontrolnih granica vjerojatno izvučene iz distribucije vjerojatnosti karakteristične za stanje izvan kontrole. Alternativa je zadržati točku i smatrati da su probne kontrolne granice i dalje prikladne za trenutnu kontrolu. Problem kod ove opcije je ako točka doista predstavlja stanje izvan kontrole, kontrolne granice bit će preširoke. Međutim, ako postoje samo jedna ili dvije takve točke, to neće značajno iskriviti kontrolnu kartu. Ako budući uzorci i dalje pokazuju kontrolu, tada se neobjašnjene točke mogu sigurno odbaciti. Općenito, ako obje karte u početku pokazuju točke izvan kontrole, dobra je strategija uspostaviti kontrolu na  $R$  karti što je prije moguće. Ako je  $R$  kontrolna karta izvan kontrole, to znači da je varijabilnost procesa nestabilna, a kontrolne granice na  $\bar{x}$  karti, koje zahtijevaju procjenu varijabilnosti procesa, su nepouzdana. [4]

Povremeno, kada se početne vrijednosti uzorka  $\bar{x}$  i  $R$  iscertaju na kontrolnu kartu s probnim kontrolnim granicama, mnoge će točke biti izvan kontrole. Ako se samovoljno maknu te točke ostat će malo podataka s kojima možemo ponovno izračunati pouzdane kontrolne granice. Ovaj bi pristup zanemario mnogo korisnih informacija u podacima. S druge strane, traženje uzroka koji se može pripisati svakoj točki izvan kontrole vjerojatno neće biti uspješan. U tom slučaju je bolje usredotočiti se na obrasce tih kontrolnih točaka, a ne na svaku točku pojedinačno.

Takav će obrazac gotovo uvijek postojati. Obično je uzrok koji se može pripisati uzorku točaka izvan kontrole prilično lako identificirati te uklanjanje ovog problema u procesu rezultira velikim poboljšanjem procesa. [4]

### 2.3. Revizija kontrolnih granica i središnjih linija

Učinkovita uporaba bilo koje kontrolne karte zahtijevat će povremenu reviziju kontrolnih granica i središnjih linija. Mogu se uspostaviti periodičke revizije granica kontrolne karte kao što je svaki tjedan, svaki mjesec ili svakih 25, 50 ili 100 uzoraka. Prilikom revidiranja kontrolnih granica, poželjno je koristiti najmanje 25 uzoraka ili podskupina u izračunavanju kontrolnih granica.[5]

### 2.4. Kontrolne granice, granice specifikacije i granice prirodne tolerancije

Treba naglasiti da ne postoji veza ili odnos između kontrolnih granica na  $\bar{x}$  i  $R$  dijagramima i specifikacijskih granica proizvoda. Kontrolne granice su vođene prirodnom varijabilnošću procesa, koja je procijenjena standardnim odstupanjem iz mjernih podataka, tj. prirodnim granicama tolerancije procesa. Uobičajeno je definirati gornju i donju prirodnu granicu tolerancije, UNTL i LNTL, kao  $3\sigma$  iznad i ispod procesa. Granice specifikacije, s druge strane, određene su izvana. Može ih postaviti uprava, inženjeri proizvodnje, kupac ili razvojni programeri/dizajneri proizvoda. Prilikom postavljanja specifikacija treba imati znanje o inherentnoj varijabilnosti procesa, ali ne postoji matematički ili statistički odnos između kontrolnih granica i granica specifikacije.[6]

### 2.5. Racionalne podskupine

Racionalne podskupine igraju važnu ulogu u korištenju  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karata. Definiranje racionalnih podskupina u praksi može biti lakše uz jasno razumijevanje funkcija dviju vrsta kontrolnih karata. Kontrolna karta  $\bar{x}$  prati aritmetičku sredinu razine kvalitete u procesu. Stoga uzorke treba odabrati na takav način da se maksimiziraju šanse da se pomaci u aritmetičkoj sredini procesa dogode između uzoraka i da se na kontrolnoj karti prikažu kao točke izvan

kontrolne. Kontrolna karta  $R$  mjeri varijabilnost unutar uzorka stoga uzorke treba odabrati tako da varijabilnost unutar uzoraka mjeri samo slučajne uzroke. To znači da  $\bar{x}$  kontrolna karta prati varijabilnost između uzoraka (varijabilnost u procesu tijekom vremena), a  $R$  kontrolna karta mjeri varijabilnost unutar uzorka (trenutačnu varijabilnost procesa).[6]

## 2.6. Smjernice za konstruiranje kontrolne karte

Kako bi se konstruirale  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte potrebno je odrediti veličinu uzorka, širinu kontrolne granice i učestalost uzorkovanja koja će se koristiti. Nije moguće dati točno rješenje kako konstruirati kontrolne karte, osim ako nema detaljnih informacija o statističkim karakteristikama testova kontrolne karte i ekonomskim čimbenicima koji utječu na problem. Cjelovito rješenje problema zahtijeva poznavanje troškova uzorkovanja, troškova istraživanja i mogućeg ispravljanja procesa kao odgovor na signale izvan kontrole te troškova povezanih s proizvodnjom proizvoda koji ne zadovoljava specifikacije. Na osnovu ovih informacija, mogu se konstruirati optimalne kontrolne karte za svaki problem.[2]

Ako se  $\bar{x}$  dijagram prvenstveno koristi za otkrivanje umjerenih do velikih pomaka u procesu, npr.  $2\sigma$  ili više, tada su relativno mali uzorci veličine  $n = 4, 5$  ili  $6$  učinkoviti. S druge strane, ako pokušavamo otkriti male pomake tada su potrebne veće veličine uzorka od  $n = 15 - 25$ . Kada se koriste manji uzorci, manji je rizik od promjene procesa tijekom uzimanja uzorka. Ako do pomaka dođe tijekom uzimanja uzorka, aritmetičku sredinu uzorka može prekriti sam pomak. Ovo je razlog za korištenje male veličine uzorka koliko je u skladu s veličinom pomaka procesa koji se pokušava otkriti. Alternativa povećanju veličine uzorka je korištenje obrazaca u kontrolnim kartama koji povećavaju osjetljivost kako bi se poboljšala sposobnost kontrolne karte za otkrivanje malih pomaka u procesu. No, to znatno povećava tip 1 pogreške pa se u tom slučaju preporučuje korištenje CUSUM ili EWMA kontrolne karte.[2]

$R$  kontrolna karta je relativno neosjetljiva na pomake standardnog odstupanja procesa za male uzorke. Npr. uzorci veličine  $n = 5$  imaju oko 40% vjerojatnosti da na prvom uzorku otkriju pomak standardnog odstupanja procesa sa  $\sigma$  na  $2\sigma$ . Veći broj uzoraka nebi bio učinkovitiji jer metoda raspona za procjenu standardnog odstupanja opada u učinkovitosti kako  $n$  raste. Posljedično, za velike veličine uzorke,  $n > 10$  ili  $12$  najbolje je koristiti  $s$  ili  $s^2$  kontrolnu kartu umjesto  $R$  karte.[7]

## 2.7. Interpretacija $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti

Ako točke na kontrolnoj karti više nisu nasumične nego ukazuju na neki obrazac onda kontrolna karta može ukazivati na stanje izvan kontrole iako nijedna točka nije ucrtana izvan kontrolnih granica. U mnogim slučajevima ovi obrasci će pružiti korisne dijagnostičke informacije o procesu, a te se informacije mogu koristiti za izradu modifikacija procesa koje smanjuju varijabilnost. Ti se obrasci prilično često pojavljuju u fazi 1, a njihovo uklanjanje je ključno za dovođenje procesa pod kontrolu.[1]

Navest će se nekoliko uobičajenih uzoraka koji se pojavljuju na  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnim kartama i neke od karakteristika procesa koje mogu proizvesti takve obrasce. Za učinkovito tumačenje  $\bar{x}$  i  $R$  karte potrebno je biti upoznat i sa statističkim principima koji se nalaze u osnovi kontrolne karte i sa samim procesom.[1]

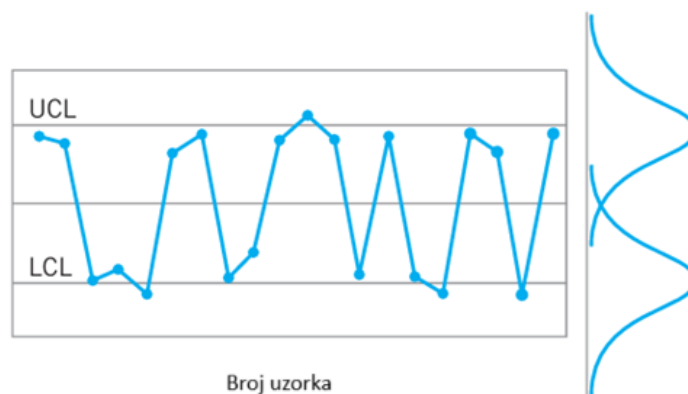
U tumačenju uzoraka na  $\bar{x}$  karti, prvo je potrebno utvrditi da li je  $R$  kontrolna karta u kontroli ili ne. Neki pripisivi uzroci pojavljuju se i na  $\bar{x}$  i na  $R$  kontrolnim kartama. Ako obje karte pokazuju neki obrazac, najbolja strategija je prvo eliminirati uzroke koji se mogu pripisati  $R$  karti. U mnogim slučajevima ovo će automatski eliminirati obrazac i na  $\bar{x}$  kontrolnoj karti. Nikada ne treba tumačiti  $\bar{x}$  kontrolnu kartu ako  $R$  karta ukazuje na stanje izvan kontrole.[1]

Na kontrolnoj karti povremeno se pojavljuju ciklički obrasci. Tipičan primjer prikazan je na slici 1. Takav obrazac na dijagramu može proizaći iz sustavnih promjena okoline kao što su temperatura, umor operatera, redovita rotacija operatera i/ili strojeva ili neke druge varijable u proizvodnoj opremi.  $R$  kontrolna karta će ponekad otkriti cikluse zbog rasporeda održavanja, umora operatera ili istrošenosti alata što rezultira pretjeranom varijabilnošću.[4]



Slika 1. Ciklički obrazac[3]

*Mixture* je obrazac kada ucrtane točke padaju blizu ili malo izvan kontrolnih granica s relativno malo točaka blizu središnje linije kao što je prikazano na slici 2. Obrazac generiraju dvije (ili više) preklapajuće distribucije koje dovode do takvih rezultata procesa. Distribucije vjerojatnosti koje bi se mogle povezati s uzorkom na slici 2 prikazane su na desnoj strani te slike. Ozbiljnost obrasca ovisi o opsegu u kojem se distribucije preklapaju. Ponekad je ova vrsta obrasca rezultat "pretjerane kontrole", gdje operateri prečesto prilagođavaju proces reagirajući na nasumične varijacije u izlazu, a ne na sustavne uzroke. Ovaj se obrazac također može pojaviti kada se izlazni proizvod iz nekoliko izvora dovodi u zajednički tok koji se zatim uzorkuje u svrhu praćenja procesa.[4]



Slika 2. Mixture obrazac[3]

Pomak srednje vrijednosti procesa ilustriran je na slici 3. Ove promjene mogu biti rezultat uvođenja novih radnika, promjene u metodama, sirovinama ili strojevima, promjena metode inspekcije ili standarda, promjena u vještini, pažljivosti ili motivaciji operatera. Ponekad se

primijeti poboljšanje u izvedbi procesa nakon uvođenja programa kontrolne karte, jednostavno zbog motivacijskih čimbenika koji utječu na radnike.[4]



**Slika 3. Pomak srednje vrijednosti procesa[3]**

Trend odnosno kontinuirano kretanje u jednom smjeru je prikazano na kontrolnoj karti na slici 4. Trendovi su obično posljedica postupnog trošenja ili propadanja alata ili neke druge kritične komponente procesa. U kemijskim procesima često nastaju zbog taloženja ili odvajanja komponenta smjese. Također mogu proizaći iz ljudskih uzroka kao što je umor operatera ili prisutnost nadzora. Kada su trendovi posljedica trošenja alata ili drugih sustavnih uzroka pogoršanja to se može izravno ugraditi u model kontrolne karte.[4]



**Slika 4. Obrazac trenda[3]**

Stratifikacija ili tendencija da se točke umjetno grupiraju oko središnje linije je ilustrirana na slici 5. Primjećuje se da postoji značajan nedostatak prirodne varijabilnosti u promatranom obrascu. Jedan potencijalni uzrok je netočan izračun kontrolnih granica. Ovaj obrazac također može nastati kada proces uzorkovanja prikupi jednu ili više jedinica iz nekoliko različitih temeljnih distribucija unutar svake podskupine. Npr. ukoliko je uzorak veličine 5 dobiven

uzimanjem jednog komada iz svakog od pet paralelnih procesa. Ako su najveća i najmanja jedinica u svakom uzorku relativno puno udaljene jer dolaze iz dvije različite distribucije, tada će  $R$  biti netočan uzrokujući da ograničenja na kontrolnoj karti budu preširoka. U ovom slučaju  $R$  netočno pokazuje varijabilnost između različitih osnovnih distribucija, uz varijaciju slučajnog uzroka koju namjerava mjeriti.[4]



**Slika 5. Obrazac stratifikacije[3]**

U tumačenju uzoraka na  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnoj karti treba uzeti u obzir dvije karte istovremeno. Ako je temeljna distribucija normalna, tada su slučajne varijable  $\bar{x}$  i  $R$  izračunate iz istog uzorka statistički nezavisne. Dakle,  $\bar{x}$  i  $R$  bi se trebali ponašati nezavisno jedna o drugoj na kontrolnoj karti. Ako postoji korelacija između vrijednosti  $\bar{x}$  i  $R$ , tj. ako točke na dvije kontrolne karte slijede jedna drugu, to znači da je temeljna distribucija iskrivljena. Ako su specifikacije određene uz pretpostavku normalnosti te analize mogu biti pogrešne.[1]

## 2.8. Primjer $\bar{x}$ i $R$ kontrolnih karti[1]

Proces tvrdog pečenja koristi se zajedno s fotolitografijom u proizvodnji poluvodiča. Potrebno je uspostaviti statističku kontrolu širine protoka otpornika u ovom procesu koristeći  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte. U fazi 1 uzeto je 25 uzoraka, svaki veličine 5 pločica. Razmak između uzoraka je jedan sat. Podaci mjerenja širine protoka iz ovih uzoraka prikazani su u tablici 1.



Tablica 1. Širina protoka svih uzoraka[1]

Broj uzorka	Pločice ( $\mu\text{m}$ )				
	1	2	3	4	5
1	1,3235	1,4128	1,6744	1,4573	1,6914
2	1,4314	1,3592	1,6075	1,4666	1,6109
3	1,4284	1,4871	1,4932	1,4324	1,5674
4	1,5028	1,6352	1,3841	1,2831	1,5507
5	1,5604	1,2735	1,5265	1,4363	1,6441
6	1,5955	1,5451	1,3574	1,3281	1,4198
7	1,6274	1,5064	1,8366	1,4177	1,5144
8	1,4190	1,4303	1,6637	1,6067	1,5519
9	1,3884	1,7277	1,5355	1,5176	1,3688
10	1,4039	1,6697	1,5089	1,4627	1,5220
11	1,4158	1,7667	1,4278	1,5928	1,4181
12	1,5821	1,3355	1,5777	1,3908	1,7559
13	1,2856	1,4106	1,4447	1,6398	1,1928
14	1,4951	1,4036	1,5893	1,6458	1,4969
15	1,3589	1,2863	1,5996	1,2497	1,5471
16	1,5747	1,5301	1,5171	1,1839	1,8662
17	1,3680	1,7269	1,3957	1,5014	1,4449
18	1,4163	1,3864	1,3057	1,6210	1,5573
19	1,5796	1,4185	1,6541	1,5116	1,7247
20	1,7106	1,4412	1,2361	1,3820	1,7601
21	1,4371	1,5051	1,3485	1,5670	1,4880
22	1,4738	1,5936	1,6583	1,4973	1,4720
23	1,5917	1,4333	1,5551	1,5295	1,6866
24	1,6399	1,5243	1,5705	1,5563	1,5530
25	1,5797	1,3663	1,6240	1,3732	1,6887

Prilikom konstruiranja  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karti najbolje je započeti s  $R$  kontrolnom kartom. Budući da kontrolna ograničenja na  $\bar{x}$  karti ovise o varijabilnosti procesa, ova ograničenja neće imati značenje ako varijabilnost procesa nije pod kontrolom.

Prvi korak je izračunati raspon svakog uzorka pomoću jednadžbe 3.4. Rezultati su prikazani u tablici 2. Zatim se računa središnja linija za  $R$  kartu pomoću jednadžbe 3.5 i ono iznosi:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{8,1302}{25} = 0,3252 \quad (2.8)$$

Za veličinu uzorka  $n = 5$ , iz slike 34 se izvuku konstante  $D_3 = 0$  i  $D_4 = 2,114$ . Kontrolne granice za  $R$  kartu iznose:

$$\begin{aligned} \text{LCL} &= \bar{R}D_3 = 0,3252 \cdot 0 = 0 \\ \text{UCL} &= \bar{R}D_4 = 0,3252 \cdot 2,114 = 0,6875 \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Tablica 2. Vrijednosti aritmetičke sredine i raspona svih uzoraka[1]**

Broj uzorka	$\bar{x}_i$	$R_i$
1	1,5119	0,3679
2	1,4951	0,2517
3	1,4817	0,1390
4	1,4712	0,3521
5	1,4882	0,3706
6	1,4492	0,2674
7	1,5805	0,4189
8	1,5343	0,2447
9	1,5076	0,3589
10	1,5134	0,2658
11	1,5242	0,3509
12	1,5284	0,4204
13	1,3947	0,4470
14	1,5261	0,2422
15	1,4083	0,3499

16	1,5344	0,6823
17	1,4874	0,3589
18	1,4573	0,3153
19	1,5777	0,3062
20	1,5060	0,5240
21	1,4691	0,2185
22	1,5390	0,1863
23	1,5592	0,2533
24	1,5688	0,1156
25	1,5264	0,3224
	$\sum \bar{x}_i = 37,6400$ $\bar{\bar{x}} = 1,5056$	$\sum R_i = 8,1302$ $\bar{R} = 0,3252$

$R$  kontrolna karta je prikazana na slici 6 i kada se svih 25 uzoraka iscrtava na dijagram vidljivo je da su sve točke unutar kontrolnih granica.

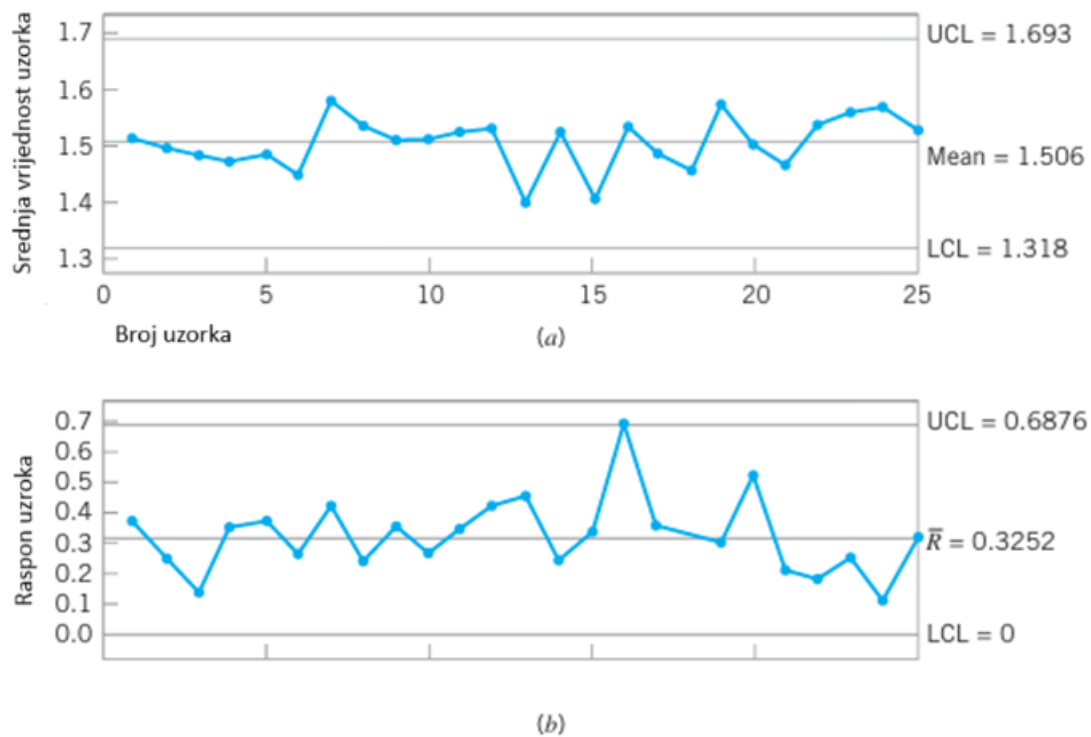
S obzirom da  $R$  karta sugerira da je procesna varijabilnost u statističkoj kontroli može se konstruirati  $\bar{x}$  kontrolna karta. Središnja linija se dobije uvrštavanjem podataka u jednadžbu 3.3 te iznosi:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{37,6400}{25} = 1,5056 \quad (2.10)$$

Kako bi se pronašle kontrolne granice na  $\bar{x}$  kontrolnoj karti, za uzorak  $n = 5$ , iz slike 34 se izvuče konstanta  $A_2 = 0,577$  i uvrsti u jednadžbu 3.6:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 1,5056 + (0,577)(0,3252) = 1,6932 \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 1,5056 - (0,577)(0,3252) = 1,3179 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na slici 6 je prikazana  $\bar{x}$  kontrolna karta. Kada su preliminarnе aritmetičke sredine uzoraka iscrtaju na kontrolnoj karti zaključuje se da je proces pod kontrolom jer su sve točke unutar kontrolnih granica i probne kontrolne granice se koriste u fazi 2 odnosno u kontroli toga procesa u budućnosti.

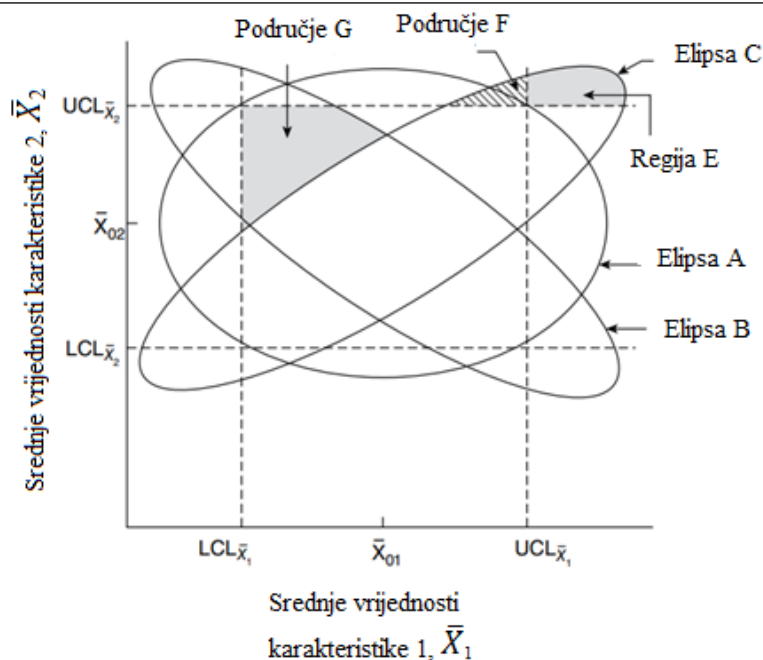
Slika 6.  $\bar{x}$  i R kontrolna karta[1]

### 3. MULTIVARIJANTNE KONTROLNE KARTE

Pretpostavljaju se dvije karakteristike kvalitete koje moraju biti pod kontrolom kako bi sam proces bio pod kontrolom. Ako se kretanje aritmetičkih sredina ovih dviju karakteristika prati univarijantnom kontrolnom kartom, rezultat je pravokutno kontrolno područje na dvodimenzionalnom dijagramu. Granice ovog područja su u osnovi gornja i donja kontrolna granica dviju karakteristika kvalitete. Ako je bivarijantno promatranje uzorka  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$  unutar kontrolnih granica, proces će biti pod kontrolom.[4]

Međutim, takve pravokutne granice često mogu biti netočne. Stvarno kontrolno područje za dvije karakteristike je eliptične prirode i prikazano je na slici 7. Jednadžba koja uključuje dvije karakteristike kvalitete je elipsa kao što je prikazano u jednadžbi 3.3. Ako su dvije karakteristike neovisne jedna o drugoj, velika i sporedna os elipse paralelne su s odgovarajućim osima dijagrama (elipsa A na slici 7). Ako par aritmetičkih sredina uzorka  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$  padne unutar granice elipse, kaže se da je proces pod kontrolom. Ako su dvije karakteristike kvalitete u negativnoj korelaciji, oblik kontrolne elipse bit će sličan obliku elipse B, a ako su dvije karakteristike kvalitete u pozitivnoj korelaciji, kontrolna elipsa bit će slična onoj elipsi C.[4]

Slika 7 pokazuje da ako su varijable u pozitivnoj korelaciji i pogrešno se koristi pravokutno područje kao kontrolno područje, mogu se donijeti razni netočni zaključci. Npr., ako  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  pada u područje E ili područje F, proces je pod kontrolom iako je točka izvan pravokutnog područja. S druge strane, točka u području G nalazi se unutar pravokutnog područja, ali je proces izvan kontrole.[4]



Slika 7. Eliptične kontrolne granice[2]

Stupanj korelacije između varijabli utječe na veličinu pogrešaka na koje se nailazi pri donošenju zaključaka. Ako se za svaku karakteristiku konstruira zasebna  $\bar{X}$  kontrolna karta na temelju vjerojatnosti pogreške tipa 1 ( $\alpha$ ) i koristi se pravokutno kontrolno područje, tada je za nezavisne varijable vjerojatnost pogreške tipa 1 za multivarijantni kontrolni postupak:[8]

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p \quad (3.1)$$

gdje  $p$  predstavlja broj zajednički kontroliranih varijabli. Vjerojatnost da sve  $p$  aritmetičke sredine uzorka budu unutar pravokutnog područja je  $(1 - \alpha)^p$ . Umjerene ili velike vrijednosti  $p$  imaju velik utjecaj na pogreške tipa 1. [8]

Ako se prepostavi da su univarijantne granice kontrolne karte konstruirane pomoću vjerojatnosti pogreške tipa 1 od 0,0026 i ako imamo četiri neovisne karakteristike kvalitete (tj.  $p = 4$ ), ukupna vjerojatnost pogreške tipa 1 za postupak zajedničke kontrole je [8];

$$\alpha' = 1 - (0,9974)^4 = 0,0104 \quad (3.2)$$

Ako varijable nisu neovisne, bit će teško dobiti veličinu pogreške tipa 1. U praksi, kontrolnu elipsu treba odabrati tako da je vjerojatnost uzorka da se iscrta unutar eliptičnog područja kada je proces pod kontrolom  $1 - \alpha$ , gdje je  $\alpha$  željena ukupna vjerojatnost pogreške tipa 1.[8]

### 3.1. Hotelling-ova $T^2$ kontrolna karta

Pretpostavljaju se dvije karakteristike kvalitete,  $X_1$  i  $X_2$ , raspoređene zajedno prema bivarijantnoj normalnoj distribuciji. Željene aritmetičke sredine karakteristika označene su s  $\bar{X}_{01}$  odnosno  $\bar{X}_{02}$ . Neka aritmetičke sredine uzorka budu  $\bar{X}_1$  i  $\bar{X}_2$ , s procijenjenim varijancama uzorka  $s_1^2$  i  $s_2^2$ , a kovarijanca između dviju varijabli označena je sa  $s_{12}$  za uzorak veličine  $n$ . Pod tim uvjetima,  $T^2$  statistika iznosi[2]:

$$T^2 = \frac{n}{s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2} \left[ s_2^2 (\bar{X}_1 - \bar{X}_{01})^2 + s_1^2 (\bar{X}_2 - \bar{X}_{02})^2 - 2s_{12} (\bar{X}_1 - \bar{X}_{01})(\bar{X}_2 - \bar{X}_{02}) \right] \quad (3.3)$$

i distribuira se prema Hotelling-ovoj  $T^2$  distribuciji s 2 i  $(n - 1)$  stupnjeva slobode. Dva u ovom slučaju dolazi iz dvije karakteristike koje se razmatraju, a  $(n - 1)$  su stupnjevi slobode povezani s varijancom uzorka. Ako izračunata vrijednost  $T^2$  dana jednadžbom 3.3 premašuje  $T_{\alpha,2,n-1}^2$  točku na  $T^2$  distribuciji tada je barem jedna od karakteristika izvan kontrole.[2]

Ovaj postupak se može prikazati grafički. Jednadžba 3.3 predstavlja kontrolne elipse prikazane na slici 7. Ako su varijable nezavisne onda je kovarijanca između njih nula (tj.  $s_{12} = 0$ ), a zajedničko kontrolno područje predstavljeno je područjem unutar kontrolne elipse A. Ako dijagram bivarijantne sredine  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$  spada u ovo kontrolno područje, može se pretpostaviti da je sustav pod kontrolom. Ako su dvije varijable u pozitivnoj korelaciji, tada je  $s_{12} > 0$ , a kontrolna elipsa je slična elipsi C. Ako su varijable u negativnoj korelaciji, tada je  $s_{12} < 0$ , a kontrolna elipsa će biti slična elipsi B.[2]

Hotelling-ov postupak kontrolne elipse ima nekoliko nedostataka. Prvo, gubi se vremenski slijed iscrtanih točaka  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ . To implicira da se ne mogu provjeriti obrasci kao kod univarijantnih kontrolnih karata. Drugo, konstrukcija kontrolne elipse postaje prilično teška za više od dvije karakteristike. Kako bi se prevladali ovi nedostaci, vrijednosti  $T^2$  dane jednadžbom 3.3 iscrtavaju se na kontrolnoj karti za 'uzorak po uzorak' kako bi se očuvao vremenski redosljed u kojem su dobivene vrijednosti podataka. Takva kontrolna karta ima gornju kontrolnu granicu  $T_{\alpha,p,n-1}^2$  gdje  $p$  predstavlja broj karakteristika. U takvim dijagramima mogu se istražiti obrasci koji nisu slučajne prirode.[2]

Vrijednosti Hotelling-ovih  $T^2$  percentilnih točaka mogu se dobiti iz percentilnih točaka  $F$ -distribucije korištenjem relacije:

$$T_{\alpha,p,n-1}^2 = p \left( \frac{n-1}{n-p} \right) F_{\alpha,p,n-p} \quad (3.4)$$

gdje  $F_{\alpha,p,n-p}$  predstavlja točku na  $F$ -distribuciji tako da je područje s desne strane  $\alpha$  s  $p$  stupnjeva slobode u brojniku i  $(n - p)$  stupnjeva slobode u nazivniku.[2]

Ako se razmatraju više od dvije karakteristike kvalitete, vrijednost  $T^2$  dana jednadžbom 3.3 za uzorak može se generalizirati kao:

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)\Sigma^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \quad (3.5)$$

gdje  $\bar{X}$  predstavlja vektor aritmetičkih sredina uzoraka  $p$  karakteristika za uzorak veličine  $n$ ,  $\mu_0$  predstavlja vektor procijenjenih aritmetičkih sredina procesa za svaku karakteristiku i  $\Sigma$  označava matricu varijance–kovarijance  $p$  karakteristika kvalitete.[2]

### 3.2. Karte faze 1 i faze 2

Pretpostavlja se da za proces kontrole imamo  $m$  uzoraka svaki veličine  $n$  s brojem karakteristika  $p$ . Vektor aritmetičkih sredina uzorka dan je izrazom:

$$\bar{X}_j = \begin{bmatrix} \bar{X}_{1j} \\ \bar{X}_{2j} \\ \vdots \\ \bar{X}_{pj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

gdje  $\bar{X}_{ij}$  predstavlja aritmetičku sredinu  $i$ -te karakteristike za  $j$ -ti uzorak, a izračunava se:

$$\bar{X}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ijk}}{n} \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

gdje  $X_{ijk}$  predstavlja vrijednost  $k$ -tog komada  $i$ -te karakteristike u  $j$ -tom uzorku.[2]



Varijance uzorka za  $i$ -tu karakteristiku u  $j$ -tom uzorku dane su izrazom[2]:

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 \quad (3.8)$$

$$i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Kovarijanca između karakteristika  $i$  i  $h$  u  $j$ -tom uzorku izračunava se izrazom[2]:

$$s_{ijh} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})(X_{hjk} - \bar{X}_{hj}) \quad (3.9)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq h$$

Vektor  $\bar{\bar{X}}_i$  predstavlja procijenjenu aritmetičku sredinu procesa svake karakteristike za  $m$  uzoraka i izračunava se izrazom[2]:

$$\bar{\bar{X}}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{X}_{ij}}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.10)$$

Elementi matrice kovarijance-varijance procesa  $\Sigma$  u jednadžbi 3.5 procjenjuju se iz sljedećeg prosjeka za  $m$  uzoraka[2]:

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^m s_{ij}^2}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.11)$$

i

$$s_{ih} = \frac{\sum_{j=1}^m s_{ihj}}{m}, \quad i \neq h \quad (3.12)$$

Konačno, matrica  $\Sigma$  se procjenjuje korištenjem  $S$  na sljedeći način (matrica je simetrična)[2]:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ sim & s_2^2 & \cdots & s_{2p} \\ sim & sim & \ddots & \vdots \\ sim & sim & sim & s_p^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.3. Kontrolne granice faze 1

Gornja kontrolna granica  $T^2$  kontrolne karte dana jednadžbom 3.4 može se modificirati u sljedeći oblik:[2]

$$\text{UCL} = \left( \frac{mnp - mp - np + p}{mn - n - p + 1} \right) F_{\alpha, p, mn - m - p + 1} \quad (3.14)$$

gdje  $m$  predstavlja broj uzoraka, svaki veličine  $n$ , korištenih za procjenu  $\bar{X}$  i  $S$ . Vrijednost  $T^2$  za svaki od  $m$  uzoraka izračunava se pomoću procijenjene  $T^2$  statistike:[2]

$$T^2 = n \left( \bar{X} - \bar{\bar{X}} \right) S^{-1} \left( \bar{X} - \bar{\bar{X}} \right) \quad (3.15)$$

i zatim se uspoređuje s UCL-om danom jednadžbom 3.14. Ako je vrijednost  $T^2$  za  $j$ -ti uzorak iznad UCL-a, to se tretira kao točka izvan kontrole.[2]

### 3.4. Kontrolne granice faze 2

Nakon što se obrišu točke izvan kontrole, pod pretpostavkom da su poduzete odgovarajuće korektivne radnje, postupak se ponavlja dok svi zadržani uzorci ne budu pod kontrolom.

Sada se faza 2 postupka koristi za praćenje budućih uzoraka iz procesa. Ako se označi broj uzoraka zadržanih na kraju faze 1 s  $m$ , od kojih svaki sadrži  $n$  komada uzoraka onda je jednadžba za gornju kontrolnu granicu u fazi 2 dana izrazom:[2]

$$\text{UCL} = \left( \frac{p(m+1)(n-1)}{mn - m - p + 1} \right) F_{\alpha, p, mn - m - p + 1} \quad (3.16)$$

### 3.5. Upotreba i tumačenja

Hotelling-ova kontrolna karta konstruira se korištenjem gornje kontrolne granice i iscrtanih vrijednosti  $T^2$  za svaki uzorak danih jednadžbom 3.15, gdje se vektor  $\bar{\bar{X}}$  i matrica  $S$  nalaze pomoću prethodnog postupka. Vrijednost uzorka  $T^2$  iznad gornje kontrolne granice ukazuje da je sustav izvan kontrole. [9]

No, kako odrediti koja je karakteristika kvalitete uzrokovala stanje izvan kontrole? Čak i sa samo dvije karakteristike kvalitete situacija može biti složena. Ako su dvije karakteristike kvalitete u visokoj pozitivnoj korelaciji, očekuje se da će aritmetička sredina za svaku karakteristiku u uzorku zadržati isti odnos u odnosu na procijenjenu aritmetičku sredinu procesa  $\bar{\bar{X}}$ . Npr. u  $j$ -tom uzorku, ako je  $\bar{X}_{1j} < \bar{\bar{X}}_1$ , onda se očekuje da  $\bar{X}_{2j} < \bar{\bar{X}}_2$ , što bi potvrdilo da se aritmetičke sredine uzorka za svaku karakteristiku kreću u istom smjeru. [9]

Ako su dvije karakteristike u visokoj pozitivnoj korelaciji i  $\bar{X}_{1j} > \bar{\bar{X}}_1$ , ne očekuje se da će  $\bar{X}_{2j} < \bar{\bar{X}}_2$ . Međutim, ako se to dogodi ovaj se uzorak može pokazati kao točka izvan kontrole u Hotelling-ovoj  $T^2$  karti, što ukazuje da je bivarijantni proces izvan kontrole. Isti zaključak može se izvesti pomoću pojedinačnih dijagrama  $3\sigma$  kontrolnih granica konstruiranih za svaku karakteristiku ako  $\bar{X}_{1j}$  premašuje  $\bar{\bar{X}}_1 + 3\sigma_{\bar{x}_1}$  ili ako  $\bar{X}_{2j}$  premašuje  $\bar{\bar{X}}_2 + 3\sigma_{\bar{x}_2}$ . Međutim, pojedinačne karakteristike mogu se iscrtati unutar kontrolnih granica na univarijantnim kontrolnim kartama iako se  $T^2$  iscertava iznad UCL-a na multivarijantnoj kontrolnoj karti. Korištenje multivarijantnih kontrolnih dijagrama za karakteristike koje je potrebno ispitati istovremeno ima prednost.[9]

Općenito, potrebne su veće veličine uzoraka za otkrivanje promjena procesa s pozitivno koreliranim karakteristikama nego s negativno koreliranim karakteristikama. Nadalje, za visoko pozitivno korelirane karakteristike potrebne su veće veličine uzorka za otkrivanje velikih pozitivnih pomaka u aritmetičkoj sredini procesa nego za otkrivanje malih pozitivnih pomaka.[9]

Ako se pomoću Hotelling-ove kontrolne karte otkrije stanje izvan kontrole, pojedinačni kontrolni intervali izračunavaju se za svaku karakteristiku za taj uzorak. Ako je vjerojatnost

pogreške tipa 1 za postupak multivarijantne kontrole  $\alpha$ , tada je za uzorak  $j$  pojedinačni kontrolni interval za  $i$ -tu karakteristiku kvalitete:[9]

$$\bar{\bar{X}}_i \pm t_{\alpha/2, p, m(n-1)} s_i \sqrt{\frac{m-1}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.17)$$

gdje su  $\bar{\bar{X}}_i$  i  $s_i^2$  dani jednadžbom 3.10 i 3.11. Ako je  $\bar{X}_{ij}$  izvan ovog intervala, odgovarajuću karakteristiku treba ispitati zbog nedostatka kontrole. Ako se otkriju posebni uzroci, uzorak koji sadrži podatke koji se odnose na sve karakteristike kvalitete treba izbrisati kada se ponovno izračunava gornja kontrolna granica.[9]

Kao što je prethodno opisano, iako je  $T^2$  kontrolna karta korisna u otkrivanju pomaka u vektoru aritmetičke sredine procesa, ona ne identificira koje su specifične varijable odgovorne. Metoda dekompozicije  $T^2$  je još jedan od načina kako otkriti koja karakteristika kvalitete je izvan kontrole. U metodi dekompozicije potrebno je odrediti pojedinačne doprinose svake od  $p$  varijabli ili njihovih kombinacija, ukupnoj  $T^2$  statistici. Ovi pojedinačni doprinosi ili djelomične  $T^2$  statistike nalaze se pomoću jednadžbe[9]:

$$D_i = T^2 - T_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,p}^2, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.18)$$

gdje  $T_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,p}^2$  označava  $T^2$  statistiku kada je  $i$ -ta varijabla izostavljena. Velike vrijednosti  $D_i$  pokazat će značajan utjecaj varijable  $i$  za određeno opažanje koje se promatra.[9]

### 3.6. Pojedinačni uzorci s nepoznatim parametrima procesa

Prethodno razmatrana situacija bavila se podskupinama podataka, gdje veličina uzorka  $n$  za svaku podskupinu prelazi 1. Sada se razmatraju pojedinačni uzorci i pretpostavlja se da su parametri procesa, vektor očekivanja procesa ili elementi matrice varijance-kovarijance nepoznati. U fazi 1 koriste se preliminarni podatci kako bi se zadržali uzorci pod kontrolom.[10]

Vrijednost  $T^2$  kod pojedinačnih uzoraka dan je izrazom:

$$T^2 = (X - \bar{X})S^{-1}(X - \bar{X}) \quad (3.19)$$

U jednadžbi 3.19 vektor očekivanja procesa procjenjuje se iz uzorka pomoću  $\bar{X}$ , dok se matrica varijance–kovarijance procesa procjenjuje pomoću podataka  $S$ . Gornja kontrolna granica u ovoj situaciji, u fazi 1, dana je izrazom [10]:

$$\text{UCL} = \frac{(m-1)^2}{m} B\left(\alpha, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2}\right) \quad (3.20)$$

gdje  $B_{(\alpha, p/2, (m-p-1)/2)}$  označava gornji  $\alpha$ -ti kvantil beta distribucije s parametrima  $p/2$  i  $(m-p-1)/2$ . [10]

Ako vektor uzorka ima vrijednost  $T^2$  koja premašuje vrijednost UCL-a, briše se iz skupa preliminarnih podataka. Revidirani vektor procijenjene aritmetičke sredine procesa i elemenata procijenjene matrice varijance–kovarijance nalaze se korištenjem preostalih uzoraka i proces se ponavlja dok svi uzorci ne budu unutar kontrolnih granica. [10]

Sada se prelazi na fazu 2 za praćenje budućih uzoraka. Procjene  $\bar{X}$  i  $S$  dobivene na kraju faze 1 koriste se za izračun  $T^2$  za buduće uzorke. Uz pretpostavku da je broj uzoraka zadržanih na kraju faze 1 dan s  $m$ , gornja kontrolna granica za fazu 2 dobiva se izrazom [10]:

$$\text{UCL} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{\alpha, p, m-p} \quad (3.21)$$

Stoga će se vrijednosti  $T^2$  za nove uzorke usporediti s UCL-om za određivanje stanja izvan kontrole. [10]

### 3.7. Generalizirani dijagram varijance

Multivarijantne kontrolne karte o kojima se prethodno raspravljalo su se bavile praćenjem vektora procijenjene aritmetičke sredine procesa. Time se nije moglo pratiti varijabilnost samog procesa te su zbog toga razvijene metode za praćenje varijabilnosti procesa na temelju matrice kovarijance-varijance uzorka  $S$ . Mjera generalizirane varijance uzorka dana je sa  $|S|$ , determinantom matrice varijance–kovarijance uzorka. [2]

Označavajući aritmetičku sredinu i varijancu  $|S|$  s  $E(|S|)$  odnosno  $V(|S|)$  te koristeći svojstvo da je većina distribucije vjerojatnosti  $|S|$  sadržana u intervalu  $E(|S|) \pm 3\sqrt{V(|S|)}$ , mogu se dobiti parametri  $|S|$  kontrolne karte. [2]

Ako je:

$$E(|S|) = b_1 |\Sigma| \quad (3.22)$$

$$V(|S|) = b_2 |\Sigma|^2 \quad (3.23)$$

gdje  $\Sigma$  predstavlja matricu varijance–kovarijance procesa. Jednadžbe za parametre  $b_1$  i  $b_2$  iznose:[2]

$$b_1 = \frac{\prod_{i=1}^p (n-1)}{(n-1)^p} \quad (3.24)$$

$$b_2 = \frac{\prod_{i=1}^p (n-1) \left[ \prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right]}{(n-1)^{2p}} \quad (3.25)$$

Matrica varijance-kovarijance  $\Sigma$  je obično nepoznata te se procjenjuje na temelju informacija o uzorku. Korištenjem jednadžbe 3.22 i 3.23 središnja linija i kontrolne granice za  $|S|$  dijagram dane su izrazom [2]:

$$\begin{aligned} \text{CL} &= b_1 |\Sigma| \\ \text{UCL} &= |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2}) \\ \text{LCL} &= |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kada je navedena ciljana vrijednost za matricu varijance-kovarijance  $\Sigma_0$ ,  $|\Sigma|$  se zamjenjuje s  $|\Sigma_0|$  u jednadžbi 3.26. Alternativno, varijanca-kovarijanca uzorka  $|\Sigma|$  dana sa  $|S|/b_1$  koristit će se za izračunavanje središnje linije i kontrolnih granica u jednadžbi 3.26. U slučaju da je LCL manji od nule, pretvara se u nulu.[2]

Za dati uzorak  $j$ ,  $|S_j|$ , determinanta matrice varijance-kovarijance izračunava se i iscertava na generaliziranom dijagramu varijance. Ako je iscertana vrijednost  $|S_j|$  izvan kontrolnih granica, označava se proces i traže se posebni uzroci.[2]

Iako je generalizirani dijagram varijance uzorka koristan, budući da grupira varijabilnost nekoliko varijabli u jedan indeks mora se koristiti s oprezom. To je zato što različite vrijednosti  $S_j$  matrice mogu dati istu vrijednost  $|S_j|$ , dok struktura varijance može biti sasvim drugačija. Stoga dijagram univarijantnog raspona ( $R$ ) ili dijagram standardnog odstupanja ( $s$ ) može pomoći pri razumijevanju karakteristika kvalitete koje doprinose da zajednički utjecaj na generaliziranu varijancu bude značajan.[2]

### 3.8 Primjer multivarijantne kontrolne karte[2]

Zadatak: Faktor loma jedne niti i težina tekstilnih vlakana važni su za održavanje procesa proizvodnje tkanine pod kontrolom. Tablica 1 prikazuje podatke za dvije karakteristike za 20 uzoraka veličine 4.[2], [3]

**Tablica 3. Bivarijantni podaci prilikom proizvodnje tkanine[2]**

Uzorak	Faktor loma, $i = 1$				Težina tekstilnih vlakana, $i = 2$			
1	80	82	78	85	19	22	20	20
2	75	78	84	81	24	21	18	21
3	83	86	84	87	19	24	21	22
4	79	84	80	83	18	20	17	16
5	82	81	78	86	23	21	18	22
6	86	84	85	87	21	20	23	21
7	84	88	82	85	19	23	19	22
8	76	84	78	82	22	17	19	18
9	85	88	85	87	18	16	20	16
10	80	78	81	83	18	19	20	18
11	86	84	85	86	23	20	24	22

12	81	86	82	79	16	18	20	19
13	81	86	82	79	16	18	20	19
14	75	78	82	80	22	21	23	22
15	77	84	78	85	22	19	21	18
16	86	82	84	84	19	23	18	22
17	84	85	78	79	17	22	18	19
18	82	86	79	83	20	19	23	21
19	79	88	85	83	21	23	20	18
20	80	84	82	85	18	22	19	20

Da bi se konstruirao Hotelling-ov  $T^2$  dijagram potrebno je izračunati aritmetičke sredine uzorka, varijance i kovarijanca uzorka i  $T^2$  vrijednosti. Te vrijednosti su prikazane u tablici 2. Broj karakteristika  $p = 2$ ,  $n = 4$  za veličinu uzorka i  $m = 20$  za broj uzoraka. Proračun se odvija na sljedeći način.

Aritmetičke sredine uzorka svake karakteristike se izračunavaju pomoću jednadžbe 3.7. Za uzorak 1, aritmetička sredina faktora prijeloma je

$$\bar{X}_{11} = \frac{80 + 82 + 78 + 85}{4} = 81,25 \quad (3.27)$$

Slično tome, aritmetička sredina težine vlakana za uzorak 1 je 20,25. Ovaj se postupak ponavlja za svaki uzorak, dajući rezultate prikazane u tablici 4.

**Tablica 4. Iznosi statistika potrebnih za konstrukciju  $T^2$  kontrolne karte[2]**

Uzorak, $j$	Aritmetičke sredine uzoraka		Varijance uzorka		Kovarijanca uzorka, $s_{12j}$	Hotelling $T_j^2$	Generalizirana varijanca, $ S_j $
	Faktor loma, $\bar{X}_{1j}$	Težina, $\bar{X}_{2j}$	$s_{1j}^2$	$s_{2j}^2$			
1	81,25	20,25	8,92	1,58	0,92	0,78	13,28
2	79,50	21,00	15,00	6,00	-9,00	5,25	9,00



3	85,00	21,50	3,33	4,33	3,00	5,98	5,44
4	81,50	17,75	5,67	2,92	1,17	7,95	15,17
5	81,75	21,00	10,92	4,67	5,33	1,03	22,50
6	85,50	21,25	1,67	1,58	0,17	6,72	2,61
7	84,75	20,75	6,25	4,25	4,58	3,36	5,55
8	80,00	19,00	13,33	4,67	-7,33	5,27	8,44
9	86,25	17,50	2,25	3,67	-2,50	15,25	2,00
10	80,50	18,75	4,33	0,92	-0,50	4,86	3,72
11	85,25	22,25	0,92	2,92	0,92	10,08	1,83
12	81,75	21,75	0,92	0,92	0,58	3,17	0,50
13	82,00	18,25	8,67	2,92	-0,33	4,74	25,17
14	78,75	22,00	8,92	0,67	1,33	10,66	4,17
15	81,00	20,00	16,67	3,33	-7,33	1,21	1,78
16	84,00	20,50	2,67	5,67	-2,67	1,45	8,00
17	81,50	19,00	12,33	4,67	3,00	2,31	48,55
18	82,50	20,75	8,33	2,92	-4,50	0,41	4,05
19	83,75	20,50	14,25	4,33	3,17	1,06	51,72
20	82,75	19,75	4,92	2,92	2,92	0,25	5,83
Srednje vrijednosti: $\bar{X}_1 = 82,46$ , $\bar{X}_2 = 20,17$ , $s_1^2 = 7,51$ , $s_2^2 = 3,29$ , $s_{12} = -0,35$							

Zatim se varijanca uzorka svake karakteristike izračunava pomoću jednadžbe 3.8. Za faktor loma niti ( $i = 1$ ), varijanca uzorka 1 iznosi:

$$s_{11}^2 = \frac{1}{3} [(80 - 80,25)^2 + (82 - 81,25)^2 + (78 - 81,25)^2 + (85 - 81,25)^2] = 8,92 \quad (3.28)$$

Kovarijance između dviju karakteristika se zatim izračunava za svaki uzorak pomoću jednadžbe 3.9. Za uzorak 1 izračunava se:

$$s_{121} = \frac{1}{3} [(80 - 81,25)(19 - 20,25) + (82 - 81,25)(22 - 20,25) + (78 - 81,25)(20 - 20,25) + (85 - 81,25)(20 - 20,25)] = 0,917 \quad (3.29)$$

Zatim se nalaze procijenjene aritmetičke sredine procesa svake karakteristike pomoću jednadžbe 3.10. Procjene elemenata matrice varijance kovarijance matrice  $S$  izračunate su pomoću jednadžbi 3.11 i 3.12. Vrijednosti  $T^2$  dane su jednadžbom 3.3.

Gornja kontrolna granica za  $T^2$  kartu za ukupnu vjerojatnost pogreške tipa 1 od 0,0054 nalazi se pomoću jednadžbe 3.14:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \left[ \frac{(20)(4)(2) - (20)(2) - (4)(2) + 2}{(20)(4) - 20 - 2 + 1} \right] F_{0,0054,2,(20)(4) - 20 - 2 + 1} & (3.30) \\ &= 1,932 F_{0,0054,2,59} = (1,932)(6,406) = 12,376 \end{aligned}$$

Vrijednost  $F_{0,0054,2,59}$  može se aproksimirati iz slike 33 koristeći linearnu interpolaciju.

Multivarijantna  $T^2$  kontrolna karta za ove dvije karakteristike je prikazana na slici 8 i karta pokazuje da je uzorak 9 izvan kontrole. Iz tablice 4,  $T^2 = 15,25$  za taj uzorak što prelazi gornju kontrolnu granicu od 12,376. Sljedeći korak je istražiti koja karakteristika uzrokuje ovo stanje.

Aritmetička sredina raspona ( $R$ ) faktora loma za 20 uzoraka je 5,75, dok je za težinu vlakana 3,95. Kada se konstruiraju pojedinačne  $3\sigma$  granice ( $\alpha/2p = 0,0054/4 = 0,0013$ , što daje  $z$  vrijednost od 3,00), kontrolne granice nalaze se na sljedeći način.

Za faktor loma niti, gornja kontrolna granica iznosi:

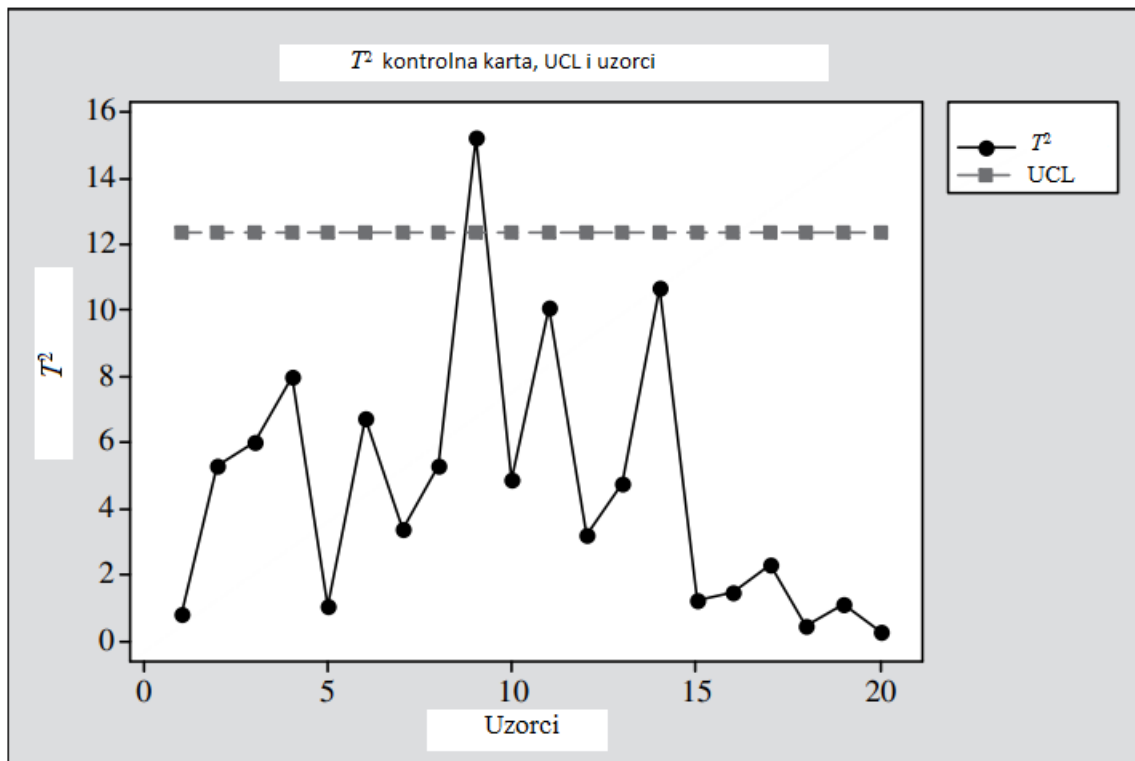
$$\text{UCL} = \bar{\bar{X}}_1 + A_2 \bar{R} = 82,46 + (0,729)(5,75) = 86,652 \quad (3.31)$$

Za težinu niti, gornja kontrolna granica iznosi:

$$\text{UCL} = \bar{\bar{X}}_2 + A_2 \bar{R} = 20,17 + (0,729)(3,95) = 23,050 \quad (3.32)$$

Univarijantne kontrolne karte ne pokazuju da je uzorak 9 izvan kontrole. Stoga, u ovom slučaju multivarijantna kontrolna karta ukazuje na stanje izvan kontrole dok pojedinačne kontrolne karte to ne pokazuje.

U sljedećem koraku potrebno je utvrditi što je uzrokovalo da faktor loma niti ili težina vlakna izmakne kontroli. Nakon što se poduzmu potrebne korektivne mjere, Hotelling-ove  $T^2$  kontrolne granice treba revidirati brisanjem uzorka 9 za obje karakteristike.



Slika 8.  $T^2$  kontrolna karta za bivarijantnu proizvodnju tkanine [2]

Temeljem postupka multivarijantne kontrole ovaj proces je identificiran kao izvan kontrole. Treba identificirati i provesti korektivne radnje temeljene na posebnim uzrocima za uzorak 9. Kontrolne granice za Hotelling-ov  $T^2$  dijagram treba revidirati brisanjem cijelog uzorka za sve karakteristike kvalitete. Ovaj primjer ilustrira da multivarijantna kontrolna karta može ukazivati na proces izvan kontrole iako pojedinačne karte to ne čine.

## 4. PRAKTIČNI DIO

U praktičnom dijelu je potrebno usporediti univarijantne kontrolne karte ( $\bar{x}$  i  $R$ ) sa multivarijantnom kontrolnom kartom ( $T^2$ ) i prikazati različite mogućnosti dobivanja rezultata između univarijantnih i multivarijantnih karti. Cijeli proračun i kontrolne karte je potrebno napraviti u excelu te nakon toga interpretirati rezultate.

Potrebno je napraviti tri primjera te koristiti isti broj varijabli, uzoraka i veličinu uzoraka. Razlikuju se mjerenja. U drugom primjeru su uzeta mjerenja iz primjera za multivarijantnu kontrolnu kartu kako bi se napravio proračun i kontrolna karta, te provjerila valjanost proračuna u excelu. U primjeru 1 i 3 su ti podaci mjerenja promijenjeni kako bi se dobili drugačiji rezultati kontrolnih karata.

### 4.1. Primjer 1

U tablici 5 je prikazan broj varijabli  $p$ , broj uzoraka  $m$ , te veličina samog uzorka  $n$ . Sva mjerenja su prikazana u tablici 6.

**Tablica 5. Vrijednosti  $p, n, m$**

Broj varijabli	Veličina uzorka	Broj uzoraka
$p$	$n$	$m$
2	4	20

**Tablica 6. Podaci mjerenja**

Uzorak	Karakteristika kvalitete $i = 1$				Karakteristika kvalitete $i = 2$			
1	80	82	78	85	19	22	20	20
2	75	78	84	81	24	21	18	21
3	83	86	84	87	19	24	21	22
4	79	84	80	83	18	20	17	16
5	82	81	78	86	23	21	18	22

6	86	84	85	87	21	20	23	21
7	84	88	82	85	21	22	22	25
8	76	84	78	82	22	17	19	18
9	85	88	85	87	21	22	24	20
10	80	78	81	83	18	19	20	18
11	86	84	85	86	23	20	24	22
12	80	81	83	82	24	24	23	23
13	81	86	82	79	16	18	20	19
14	83	78	78	77	20	20	19	19
15	77	84	78	85	22	19	21	18
16	86	82	84	84	19	23	18	22
17	84	85	78	79	17	22	18	19
18	82	86	79	83	20	19	23	21
19	79	88	85	83	21	23	20	18
20	80	84	82	85	18	22	19	20

Prvo se konstruira univarijantna kontrolna karta. Da bi se konstruirala univarijantna kontrolna karta potrebno je prvo izračunati aritmetičke sredine i raspone za svaki uzorak i za svaku karakteristiku kvalitete pomoću formula 2.1 i 2.4. Rezultati su prikazani u tablici 7 za aritmetičku sredinu uzorka i tablici 8 za raspone. Funkcija za raspon u excelu je '=max()-min()'

**Tablica 7. Aritmetička sredina svakog uzorka  $\bar{x}_{ij}$**

Broj uzorka, $j$	Aritmetička sredina za $i = 1, \bar{X}_{1j}$	Aritmetička sredina za $i = 2, \bar{X}_{2j}$
1	81,25	20,25
2	79,50	21,00
3	85,00	21,50
4	81,50	17,75
5	81,75	21,00
6	85,50	21,25

7	84,75	22,50
8	80,00	19,00
9	86,25	21,75
10	80,50	18,75
11	85,25	22,25
12	81,50	23,50
13	82,00	18,25
14	79,00	19,50
15	81,00	20,00
16	84,00	20,50
17	81,50	19,00
18	82,50	20,75
19	83,75	20,50
20	82,75	19,75

**Tablica 8. Raspon svakog uzorka  $R_{ij}$**

Broj uzorka	Raspon za $i = 1$ , $R_{1j}$	Raspon za $i = 2$ , $R_{2j}$
1	7	3
2	9	6
3	4	5
4	5	4
5	8	5
6	3	3
7	6	4
8	8	5
9	3	4
10	5	2
11	2	4
12	3	1

13	7	4
14	6	1
15	8	4
16	4	5
17	7	5
18	7	4
19	9	5
20	5	4

Zatim se računa aritmetička sredina svih  $\bar{x}_{1j}$  i  $\bar{x}_{2j}$  i aritmetička sredina svih  $R_{1j}$  i  $R_{2j}$  pomoću jednadžbi 2.3 i 2.5. Te vrijednosti ujedno predstavljaju i središnje linije  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karti. Rezultati su prikazani u tablici 9.

**Tablica 9. Središnje linije  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karti**

Karakteristika kvalitete	Središnja linija $\bar{x}$ karte	Središnja linija $R$ karte
$i = 1$	82,46	5,80
$i = 2$	20,44	3,90

Nakon toga se računaju kontrolne granice za  $\bar{x}$  i  $R$  kartu. Kontrolne granice se računaju pomoću jednadžbi 2.6 i 2.7. Kako bi se izračunale potrebno je prvo odrediti faktore  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$  za  $n = 4$  iz slike 28. Vrijednosti faktora su prikazani u tablici 10.

**Tablica 10. Vrijednosti faktora  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$**

$A_2$	0,729
$D_3$	0
$D_4$	2,282

Vrijednosti kontrolnih granica za  $\bar{x}$  kontrolnu kartu su prikazani u tablici 11, a za  $R$  kontrolnu kartu u tablici 12.

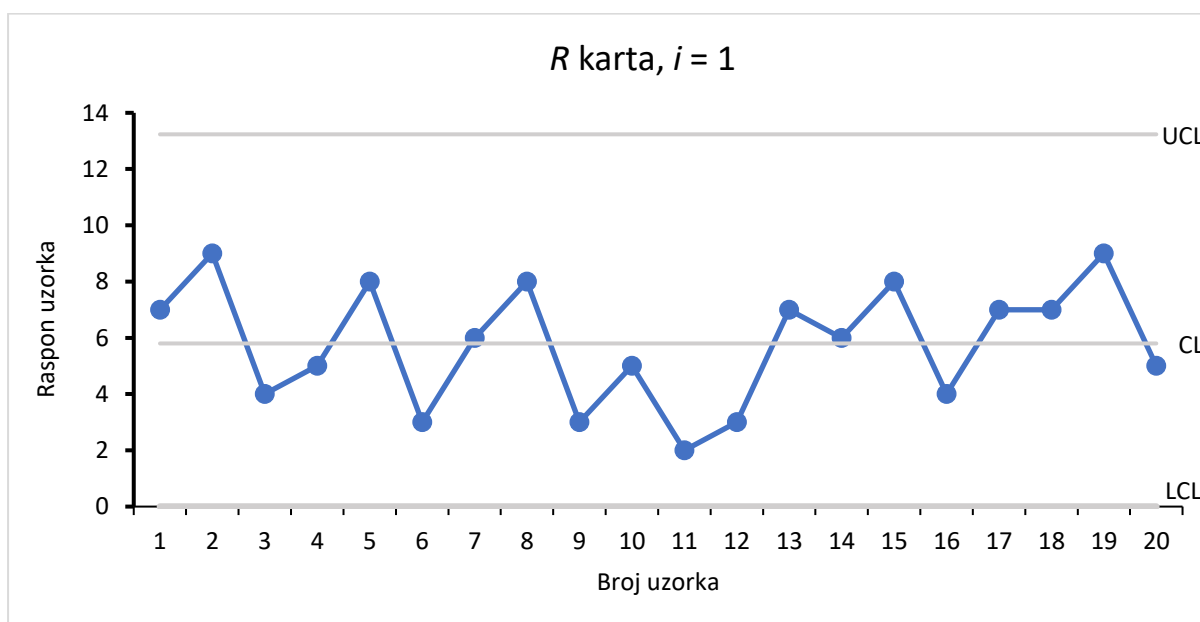
Tablica 11. Vrijednosti kontrolnih granica za  $\bar{x}$  kontrolnu kartu

$\bar{x}$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
$i = 1$	82,46	78,23	86,69
$i = 2$	20,44	17,59	23,28

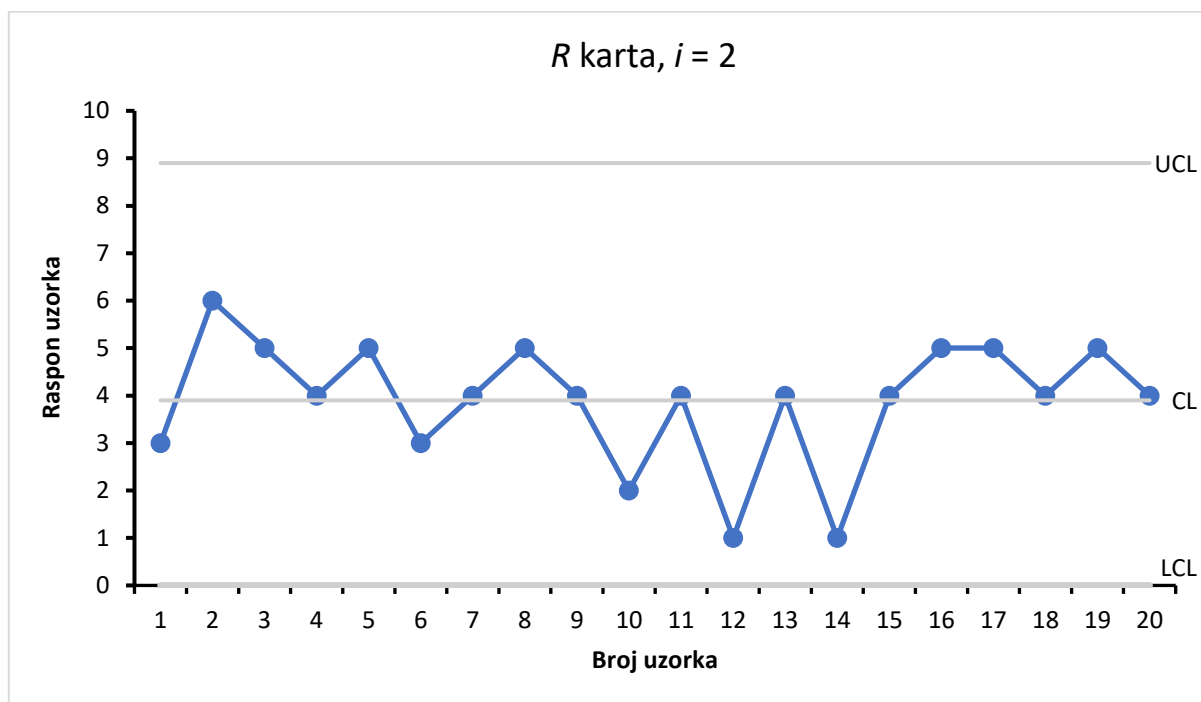
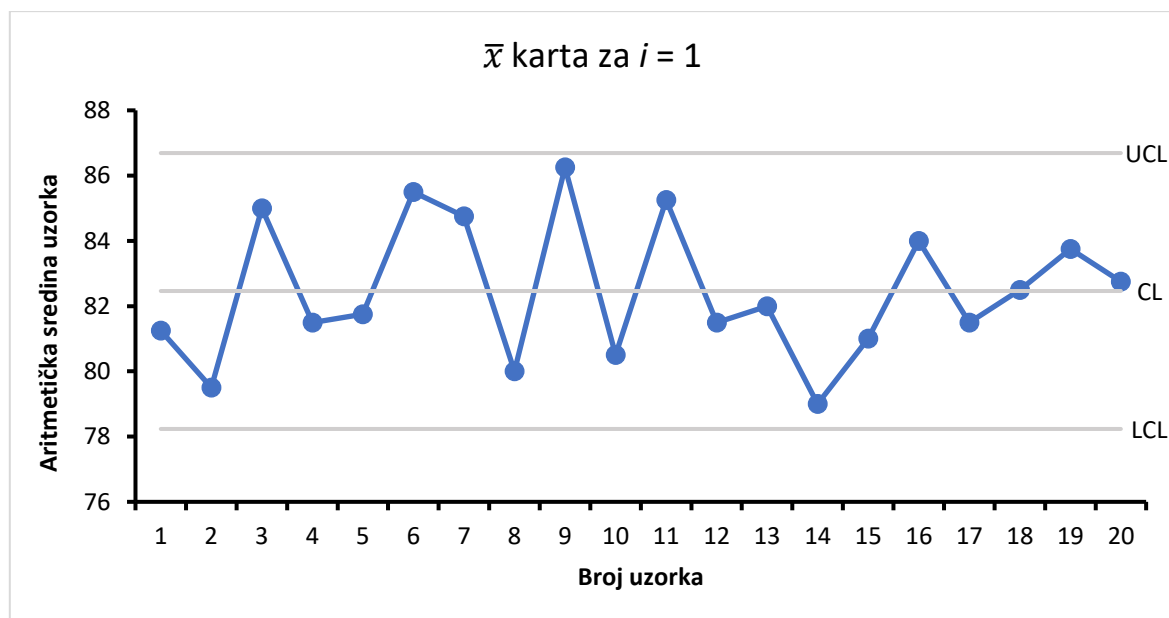
Tablica 12. Vrijednosti kontrolnih granica za  $R$  kontrolnu kartu

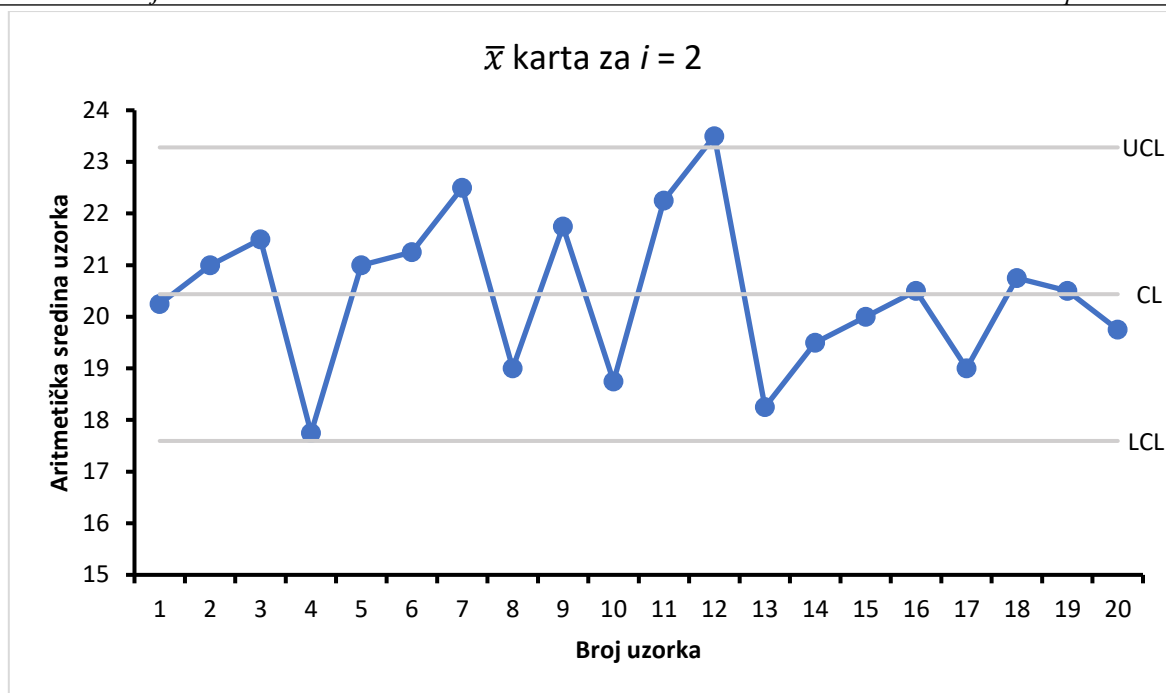
$R$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
$i = 1$	5,80	0	13,24
$i = 2$	3,90	0	8,90

Sada se kontrolne karte mogu prikazati u excelu pomoću prethodno izračunatih podataka kao što je prikazano na slikama 9-12.

Slika 9.  $R$  kontrolna karta za  $i = 1$



Slika 10. R kontrolna karta za  $i = 2$ Slika 11.  $\bar{x}$  kontrolna karta za  $i = 1$

Slika 12.  $\bar{x}$  kontrolna karta za  $i = 2$ 

Sljedeći korak je konstruiranje multivarijantne kontrolne karte. Kako bi izračunali  $T^2$  vrijednost za svaki uzorak pomoću formule 3.15 potrebno je izračunati inverz matrice varijance-kovarijance uzorka i  $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ . Kako bi dobili matricu varijance-kovarijance uzorka potrebno je prvo izračunati varijancu i kovarijancu uzorka. Varijanca  $s_{ij}$  se računa pomoću jednadžbe 3.8 i formule VAR.S u excelu, a nakon toga se računa kovarijanca uzorka  $s_{ihj}$  pomoću jednadžbe 3.9 i formule COVARIANCE.S. Vrijednosti varijance i kovarijance za svaki uzorak su prikazani u tablici 13.

Tablica 13. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka

Broj uzorka	Varijanca uzorka		Kovarijanca uzorka
	$s_{1j}$	$s_{2j}$	$s_{12j}$
1	8,92	1,58	0,92
2	15,00	6,00	-9,00
3	3,33	4,33	3,00
4	5,67	2,92	1,17
5	10,92	4,67	5,33

6	1,67	1,58	0,17
7	6,25	3,00	0,50
8	13,33	4,67	-7,33
9	2,25	2,92	-0,92
10	4,33	0,92	-0,50
11	0,92	2,92	0,92
12	1,67	0,33	-0,67
13	8,67	2,92	-0,33
14	7,33	0,33	1,00
15	16,67	3,33	-7,33
16	2,67	5,67	-2,67
17	12,33	4,67	3,00
18	8,33	2,92	-4,50
19	14,25	4,33	3,17
20	4,92	2,92	2,92

Zatim se računaju aritmetičke sredine varijanci i kovarijanci uzorka koristeći formule 3.11 i 3.12. Rezultati su prikazani u tablici 14.

**Tablica 14. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka**

Aritmetička sredina varijance uzorka		Aritmetička sredina kovarijance uzorka
$s_1$	$s_2$	$s_{12}$
7,47	3,15	-0,56

Sljedeći korak je da se pomoću tih vrijednosti napiše matrica varijance-kovarijance uzorka kao u jednadžbi 3.13 te njezin inverz. Matrica  $S$  i  $S^{-1}$  su prikazani u tablici 15. Inverz matrice se računa pomoću formule MINVERSE.

**Tablica 15. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz**

Matrica varijance-kovarijance uzorka, $S$	$\begin{bmatrix} 7,47 & -0,56 \\ -0,56 & 3,15 \end{bmatrix}$
Inverz matrice varijance-kovarijance uzorka, $S^{-1}$	$\begin{bmatrix} 0,1357 & 0,0241 \\ 0,0241 & 0,3222 \end{bmatrix}$

Nakon toga je potrebno izračunati vrijednosti  $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ . Iz formule se može vidjeti da je potrebno oduzeti aritmetičku sredinu za svaki uzorak od ukupne aritmetičke sredine svih uzoraka. Vrijednosti su prikazani u tablici 16.

**Tablica 16. Vrijednosti  $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$** 

Broj uzorka	$\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$	
	$i = 1$	$i = 2$
1	-1,21	-0,19
2	-2,96	0,56
3	2,54	1,06
4	-0,96	-2,69
5	-0,71	0,56
6	3,04	0,81
7	2,29	2,06
8	-2,46	-1,44
9	3,79	1,31
10	-1,96	-1,69
11	2,79	1,81
12	-0,96	3,06
13	-0,46	-2,19
14	-3,46	-0,94
15	-1,46	-0,44
16	1,54	0,06
17	-0,96	-1,44

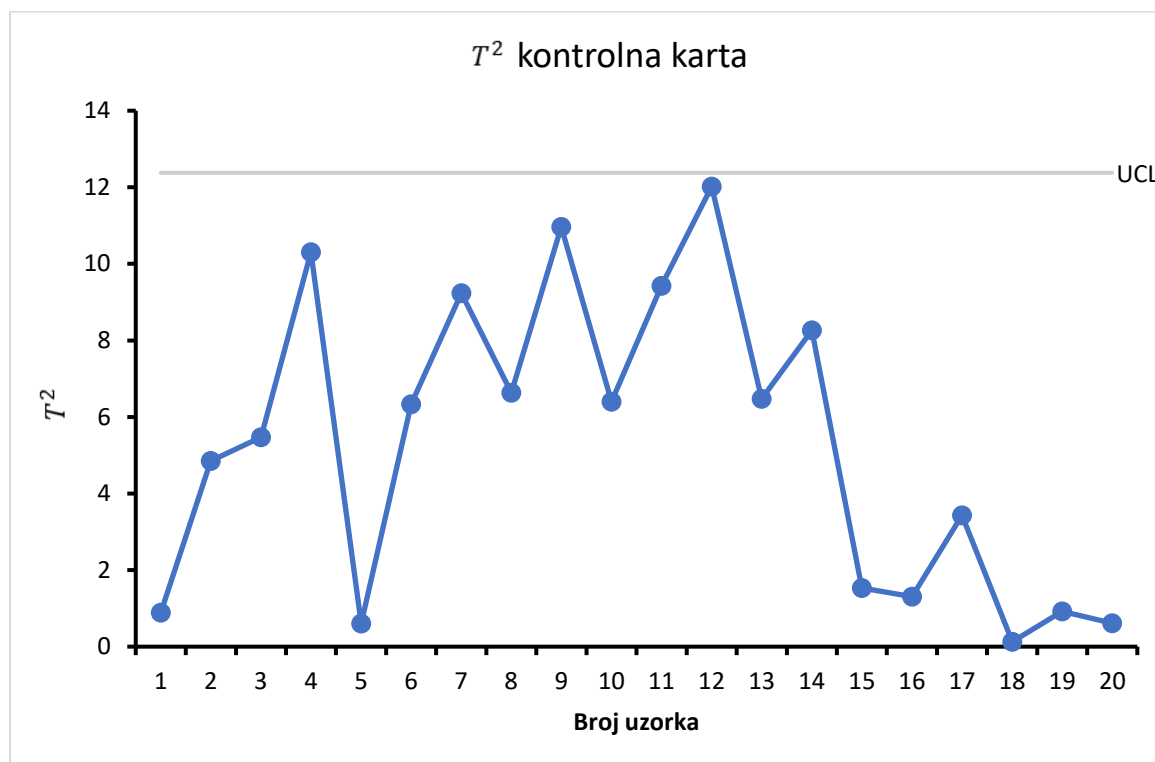
18	0,04	0,31
19	1,29	0,06
20	0,29	-0,69

Sada se može izračunati vrijednosti  $T^2$  pomoću jednadžbe 3.15. Formula za računanje u excelu je  $n * \text{MMULT}(\text{MMULT}; \text{TRANSPOSE})$  gdje je MMULT funkcija za množenje matrica, a TRANSPOSE funkcija za transponiranje matrice. Vrijednosti  $T^2$  su prikazane u tablici 17.

**Tablica 17. Vrijednosti  $T^2$  statistike**

Broj uzorka	Hotelling $T^2$
1	0,89
2	4,85
3	5,47
4	10,31
5	0,61
6	6,33
7	9,23
8	6,63
9	10,96
10	6,40
11	9,42
12	12,02
13	6,48
14	8,26
15	1,53
16	1,31
17	3,43
18	0,13
19	0,92
20	0,62

Kako bi se nacrtala  $T^2$  kontrolna karta potrebno je još izračunati gornju kontrolnu granicu. UCL se računa pomoću jednadžbe 3.14. Kako bi se uvrstili svi podaci u tu jednadžbu potrebno je linearnom interpolacijom iz slike 27 odrediti vrijednost  $F$ -distribucije za  $F_{0,0054,2,59}$ . Vrijednost koja se dobije je 6,406. Uvrštavanjem u jednadžbu 3.14 dobije se vrijednost gornje kontrolne granice 12,378. Sada se može nacrtati  $T^2$  kontrolna karta kao što je prikazano na slici 13.



Slika 13.  $T^2$  kontrolna karta

Kako  $T^2$  kontrolna karta prikazuje samo promjenu aritmetičke sredine procesa potrebno je nacrtati i kontrolnu kartu koja će dati podatke o varijabilnosti multivarijantnog procesa. To omogućuje kontrolna karta generalizirane varijance. Za izračunavanje vrijednosti generalizirane varijance potrebno je odrediti determinantu matrice  $S_j$  svakog uzorka. Funkcija u excelu za izračunavanje determinante matrice je MDETERM. Vrijednosti su prikazane u tablici 18.

**Tablica 18. Vrijednosti generalizirane varijance**

Broj uzorka	Generalizirana varijanica
1	13,25
2	9,00
3	5,44
4	15,17
5	22,50
6	2,61
7	5,55
8	8,44
9	2,00
10	3,72
11	1,83
12	0,50
13	25,17
14	4,17
15	1,78
16	8,00
17	48,55
18	4,05
19	51,72
20	5,83

Sada je potrebno izračunati kontrolne granice pomoću jednadžbi 3.26, no prije toga je potrebno izračunati faktore  $b_1$  i  $b_2$  pomoću jednadžbi 3.24 i 3.25. Vrijednosti faktora su dani u tablici 19, a kontrolnih granica u tablici 20.

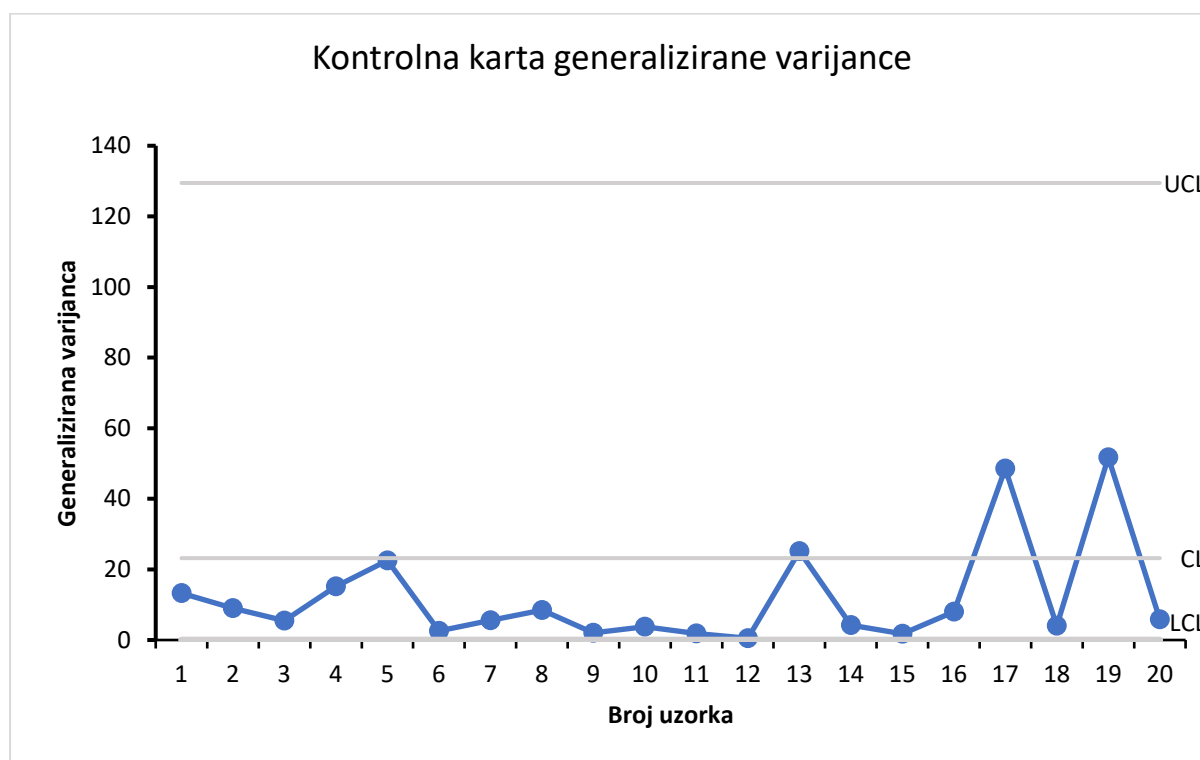
**Tablica 19. Vrijednosti faktora  $b_1$  i  $b_2$** 

$b_1$	0,667
$b_2$	1,037

Tablica 20. Kontrolne granice generalizirane varijance

CL	UCL	LCL
23,19	129,46	-83,08 → 0

Sada se može nacrtati kontrolna karta generalizirane varijance kao što je prikazano na slici 14.



Slika 14. Kontrolna karta generalizirane varijance

U ovom primjeru se može vidjeti da  $\bar{x}$  kontrolna karta za varijablu 2 pokazuje da je uzorak 12 izvan kontrolnih granica. U  $T^2$  kontrolnoj karti su sve točke unutar granica što ukazuje da je sustav u kontroli te da nema potreba za revidiranjem granica. Ta razlika ukazuje da treba koristiti multivarijantne kontrolne karte ukoliko je potrebno kontrolirati više varijabli na istom uzorku zato što multivarijantna karta uzima u obzir korelaciju između varijabli, dok univarijantne karte to ne uzimaju u obzir.



## 4.2. Primjer 2

U primjeru 2 su korišteni podaci iz primjera za multivarijantne kontrolne karte. Prvo će se konstruirati univarijantna kontrolna karta. Postupak računa je isti kao i u Primjeru 1. Rezultati su prikazan u sljedećim tablicama i dijagramima.

**Tablica 21. Aritmetička sredina svakog uzorka  $\bar{x}_{ij}$**

Broj uzorka, $j$	Aritmetička sredina faktora loma, $\bar{X}_{1j}$	Aritmetička sredina težine vlakana, $\bar{X}_{2j}$
1	81,25	20,25
2	79,50	21,00
3	85,00	21,50
4	81,50	17,75
5	81,75	21,00
6	85,50	21,25
7	84,75	20,75
8	80,00	19,00
9	86,25	17,50
10	80,50	18,75
11	85,25	22,25
12	81,75	21,75
13	82,00	18,25
14	78,75	22,00
15	81,00	20,00
16	84,00	20,50
17	81,50	19,00
18	82,50	20,75
19	83,75	20,50
20	82,75	19,75

Tablica 22. Raspon svakog uzorka  $R_{ij}$ 

Broj uzorka	Raspon faktora loma, $R_{1j}$	Raspon težine vlakana, $R_{2j}$
1	7	3
2	9	6
3	4	5
4	5	4
5	8	5
6	3	3
7	6	4
8	8	5
9	3	4
10	5	2
11	2	4
12	2	2
13	7	4
14	7	2
15	8	4
16	4	5
17	7	5
18	7	4
19	9	5
20	5	4

Tablica 23. Središnje linije  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karti

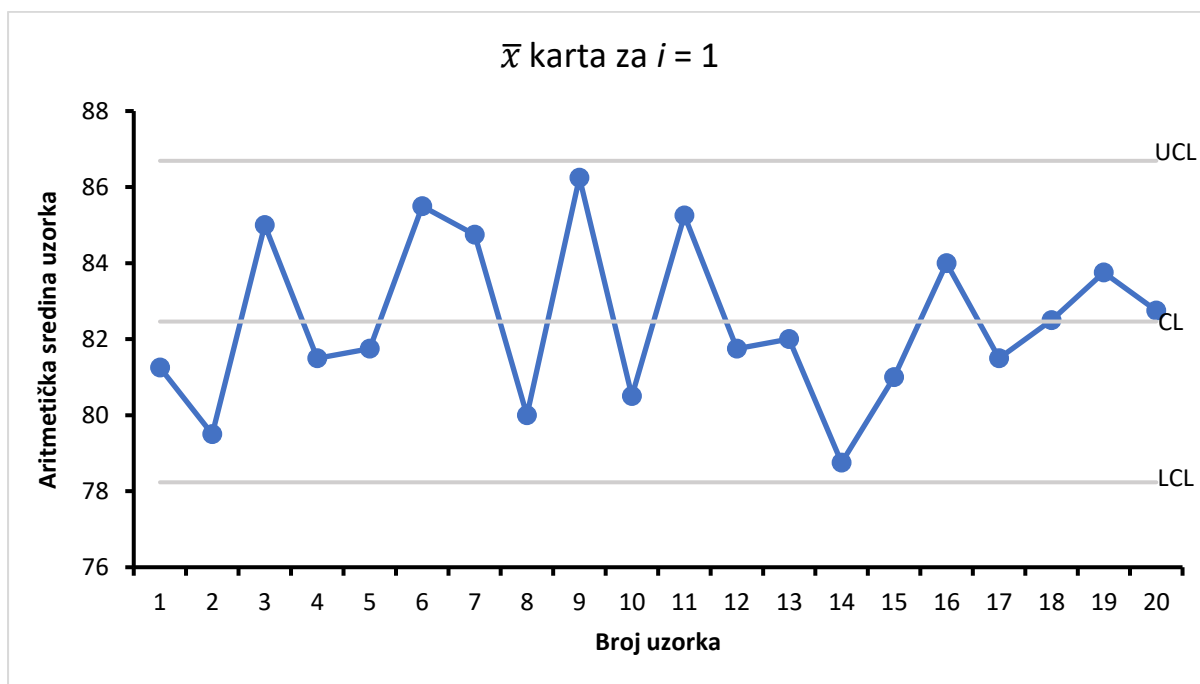
Karakteristika kvalitete	Središnja linija $\bar{x}$ karte	Središnja linija $R$ karte
Faktor loma, $i = 1$	82,46	5,80
Težina niti, $i = 2$	20,18	4,00

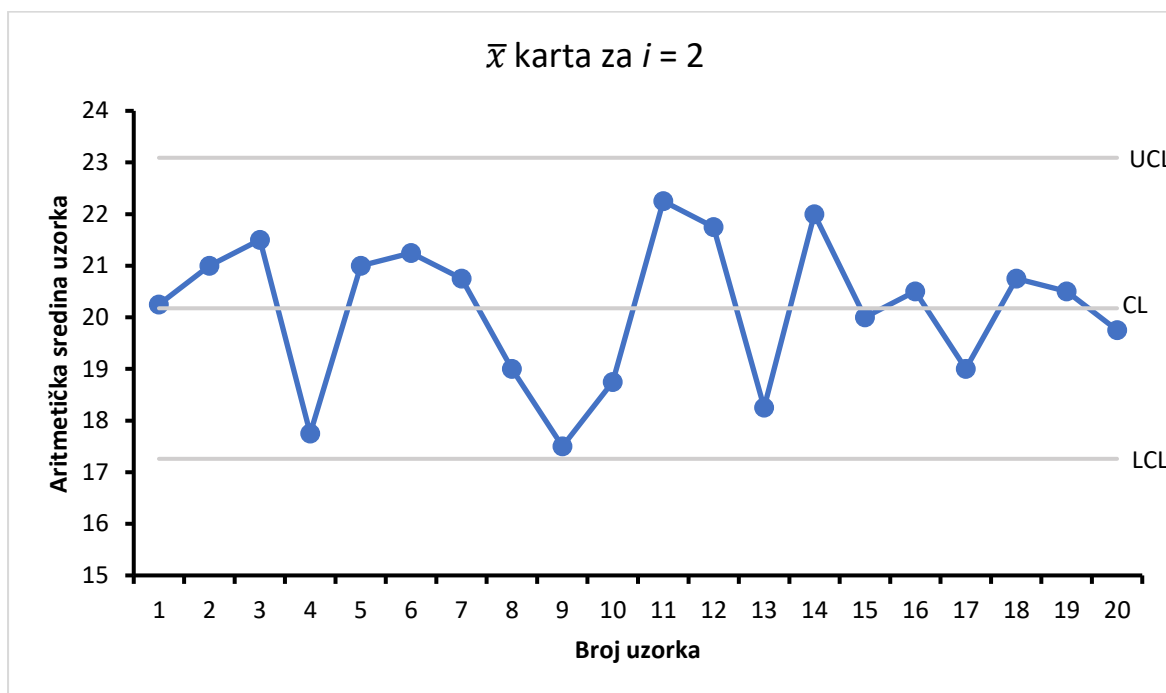
Tablica 24. Vrijednosti kontrolnih granica za  $\bar{x}$  kontrolnu kartu

$\bar{x}$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
Faktor loma, $i = 1$	82,47	78,234	86,691
Težina niti, $i = 2$	20,18	17,259	23,091

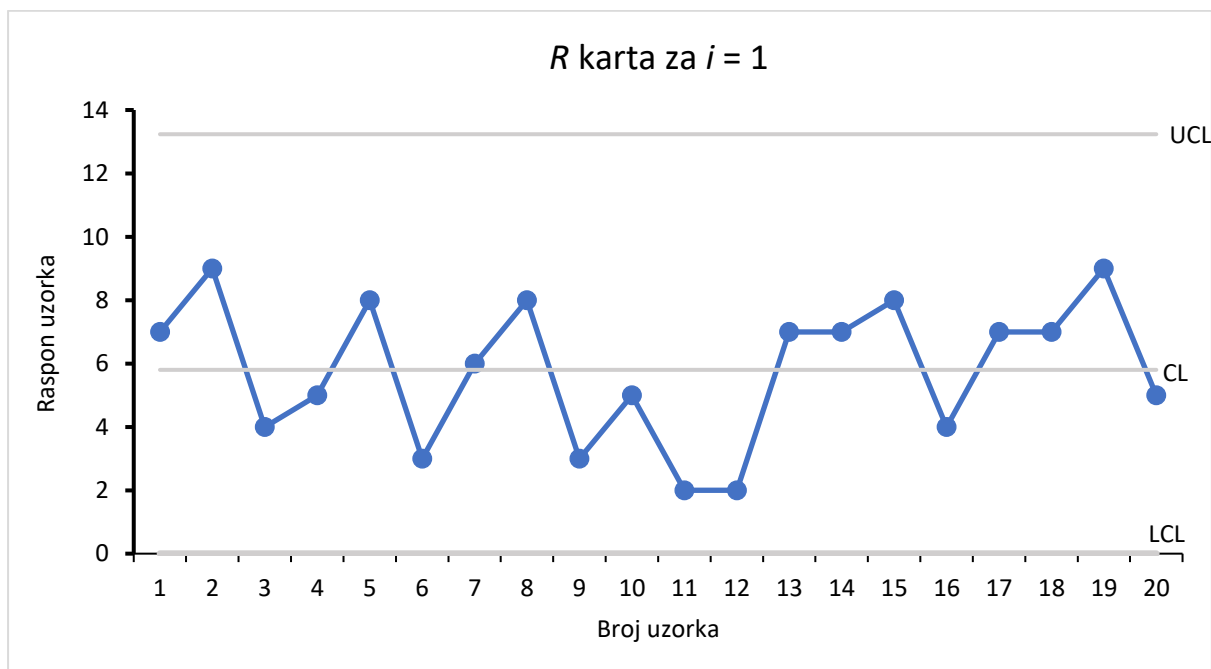
Tablica 25. Vrijednosti kontrolnih granica za  $R$  kontrolnu kartu

$R$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
Faktor loma, $i = 1$	5,80	0	13,24
Težina niti, $i = 2$	4,00	0	9,13

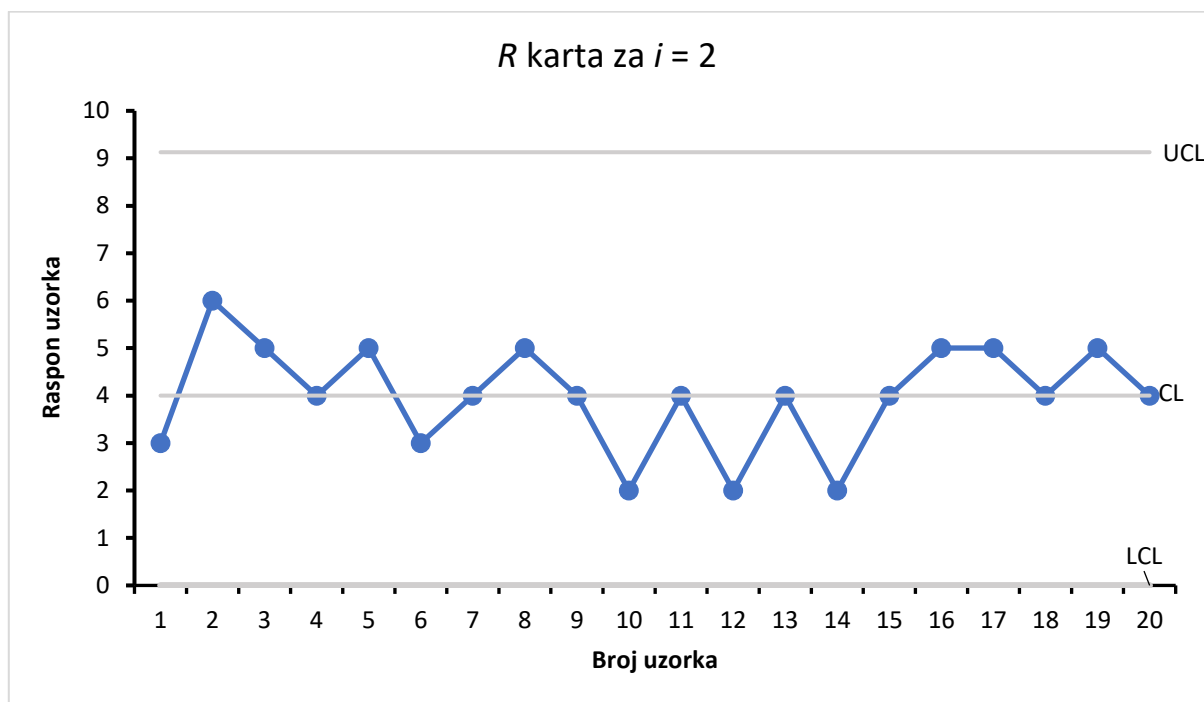
Slika 15.  $\bar{x}$  kontrolna karta za faktor loma



Slika 16.  $\bar{x}$  kontrolna karta za težinu vlakana



Slika 17. R kontrolna karta za faktor loma



Slika 18. R kontrolna karta za težinu vlakana

Sljedeći korak je konstruiranje multivarijantne kontrolne karte.

Tablica 26. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka

Broj uzorka	Varijanca uzorka		Kovarijanca uzorka
	$s_{1j}$	$s_{2j}$	$s_{12j}$
1	8,92	1,58	0,92
2	15,00	6,00	-9,00
3	3,33	4,33	3,00
4	5,67	2,92	1,17
5	10,92	4,67	5,33
6	1,67	1,58	0,17
7	6,25	4,25	4,58
8	13,33	4,67	-7,33

9	2,25	3,67	-2,50
10	4,33	0,92	-0,50
11	0,92	2,92	0,92
12	0,92	0,92	0,58
13	8,67	2,92	-0,33
14	8,92	0,67	1,33
15	16,67	3,33	-7,33
16	2,67	5,67	-2,67
17	12,33	4,67	3,00
18	8,33	2,92	-4,50
19	14,25	4,33	3,17
20	4,92	2,92	2,92

Tablica 27. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka

Aritmetička sredina varijance uzorka		Aritmetička sredina kovarijance uzorka
$s_1$	$s_2$	$s_{12}$
7,51	3,29	-0,35

Tablica 28. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz

Matrica varijance-kovarijance uzorka, $S$	$\begin{bmatrix} 7,51 & -0,35 \\ -0,35 & 3,29 \end{bmatrix}$
Inverz matrice varijance-kovarijance uzorka, $S^{-1}$	$\begin{bmatrix} 0,1338 & 0,0144 \\ 0,0144 & 0,3053 \end{bmatrix}$

Tablica 29. Vrijednosti  $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ 

Broj uzorka	$\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$	
	$i = 1$	$i = 2$
1	-1,21	0,07
2	-2,96	0,82

3	2,54	1,33
4	-0,96	-2,43
5	-0,71	0,82
6	3,04	1,08
7	2,29	0,57
8	-2,46	-1,18
9	3,79	-2,68
10	-1,96	-1,43
11	2,79	2,08
12	-0,71	1,58
13	-0,46	-1,93
14	-3,71	1,83
15	-1,46	-0,18
16	1,54	0,32
17	-0,96	-1,18
18	0,04	0,57
19	1,29	0,32
20	0,29	-0,43

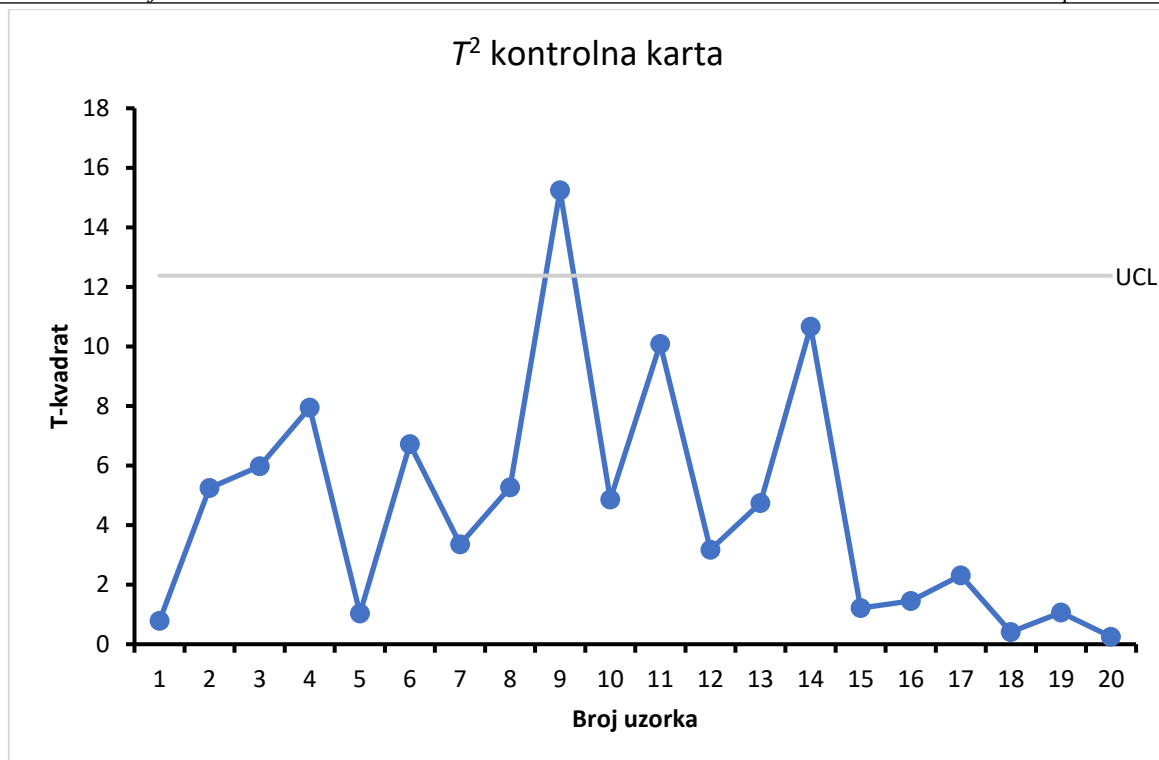
Tablica 30. Vrijednosti  $T^2$  statistike

Broj uzorka	Hotelling $T^2$
1	0,78
2	5,25
3	5,98
4	7,95
5	1,04
6	6,73
7	3,36
8	5,26

9	15,25
10	4,86
11	10,08
12	3,17
13	4,74
14	10,66
15	1,21
16	1,45
17	2,31
18	0,41
19	1,06
20	0,25

Kako bi se nacrtala  $T^2$  kontrolna karta potrebno je još izračunati gornju kontrolnu granicu. UCL se računa pomoću jednadžbe 3.14. Kako bi se uvrstili svi podaci u tu jednadžbu potrebno je linearnom interpolacijom iz slike 27 odrediti vrijednost  $F$ -distribucije za  $F_{0.0054,2,59}$ . Vrijednost koja se dobije je 6,406. Uvrštavanjem u jednadžbu 3.14 dobije se vrijednost gornje kontrolne granice 12,378. Sada se može nacrtati  $T^2$  kontrolna karta kao što je prikazano na slici 19.



Slika 19.  $T^2$  kontrolna karta

Tablica 31. Vrijednosti generalizirane varijance

Broj uzorka	Generalizirana varijanca
1	13,25
2	9,00
3	5,44
4	15,17
5	22,50
6	2,61
7	5,55
8	8,44
9	2,00
10	3,72
11	1,83
12	0,50

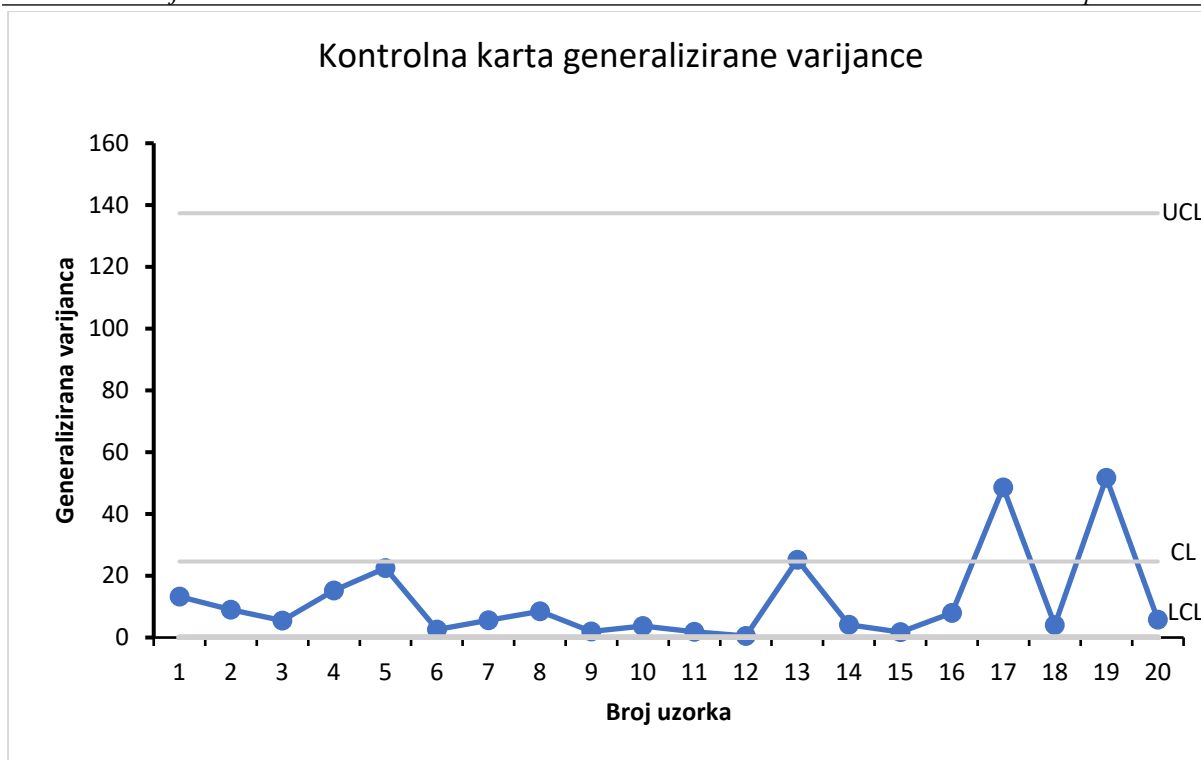
13	25,17
14	4,17
15	1,78
16	8,00
17	48,55
18	4,05
19	51,72
20	5,83

**Tablica 32. Vrijednosti faktora  $b_1$  i  $b_2$** 

$b_1$	0,667
$b_2$	1,037

**Tablica 33. Kontrolne granice generalizirane varijance**

CL	UCL	LCL
24,60	137,35	-88,14 → 0



**Slika 20. Kontrolna karta generalizirane varijance**

Univarijantne  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte ukazuju da je sustav u statističkoj kontroli zato što su sve točke unutar kontrolnih granica i nema obrazaca koji bi ukazivali na kretanje koje nije slučajne prirode. No, multivarijantna karta pokazuje da je uzorak 9 iznad gornje kontrolne granice što ukazuje da je sustav izvan kontrole te je potrebno odrediti zašto je sustav izvan kontrole i revidirati kontrolne granice. Ovaj primjer prikazuje kako univarijantne karte mogu prikazati da je svaka varijabla u kontroli, međutim multivarijantna karta pokazuje da je jedan uzorak izvan kontrole što znači da je potrebno varijable kontrolirati skupno, a ne odvojeno zato što postoji korelacija između varijabli koja se u univarijantnim kontrolnim kartama ne može vidjeti.

### 4.3. Primjer 3

U primjeru 3 su iste vrijednosti  $p$ ,  $n$ ,  $m$ , a podaci mjerenja su prikazani u tablici 35. Postupak računa je isti kao i u Primjeru 1. Rezultati su prikazan u sljedećim tablicama i dijagramima.

**Tablica 34. Vrijednosti  $p$ ,  $n$ ,  $m$**

Broj varijabli	Veličina uzorka	Broj uzoraka
$p$	$n$	$m$
2	4	20

**Tablica 35. Podaci mjerenja**

Uzorak	Karakteristika kvalitete $i = 1$				Karakteristika kvalitete $i = 2$			
1	81	84	78	85	20	22	20	20
2	76	80	84	81	25	21	18	21
3	84	86	84	87	20	24	21	22
4	80	86	80	83	19	20	17	16
5	81	83	78	86	24	21	18	22
6	86	86	85	87	22	20	23	21
7	85	90	82	85	20	23	19	22
8	77	86	80	82	23	17	19	18
9	84	88	80	85	21	18	22	18
10	81	80	81	83	19	19	20	18
11	86	86	81	86	24	20	24	22
12	82	83	81	82	23	21	23	21
13	82	88	82	79	17	18	20	19
14	76	80	82	80	23	21	23	22
15	78	86	78	85	23	19	21	18
16	87	84	84	84	20	23	18	22
17	85	87	78	79	18	22	18	19
18	83	88	79	83	21	19	23	21

19	80	90	85	83	22	23	20	18
20	81	86	82	85	19	22	19	20

**Tablica 36. Aritmetička sredina svakog uzorka  $\bar{x}_{ij}$**

Broj uzorka, $j$	Aritmetička sredina za $i = 1, \bar{X}_{1j}$	Aritmetička sredina za $i = 2, \bar{X}_{2j}$
1	82,00	20,50
2	80,25	21,25
3	85,25	21,75
4	82,25	18,00
5	82,00	21,25
6	86,00	21,50
7	85,50	21,00
8	81,25	19,25
9	84,25	19,75
10	81,25	19,00
11	84,75	22,50
12	82,00	22,00
13	82,75	18,50
14	79,50	22,25
15	81,75	20,25
16	84,75	20,75
17	82,25	19,25
18	83,25	21,00
19	84,50	20,75
20	83,50	20,00

Tablica 37. Raspon svakog uzorka  $R_{ij}$ 

Broj uzorka	Raspon faktora loma, $R_{1j}$	Raspon težine vlakana, $R_{2j}$
1	7	2
2	8	7
3	3	4
4	6	4
5	8	6
6	2	3
7	8	4
8	9	6
9	8	4
10	3	2
11	5	4
12	2	2
13	9	3
14	6	2
15	8	5
16	3	5
17	9	4
18	9	4
19	10	5
20	5	3

Tablica 38. Središnje linije  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolnih karti

Karakteristika kvalitete	Središnja linija $\bar{x}$ karte	Središnja linija $R$ karte
$i = 1$	82,95	6,40
$i = 2$	20,53	3,95

**Tablica 39. Vrijednosti faktora  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$** 

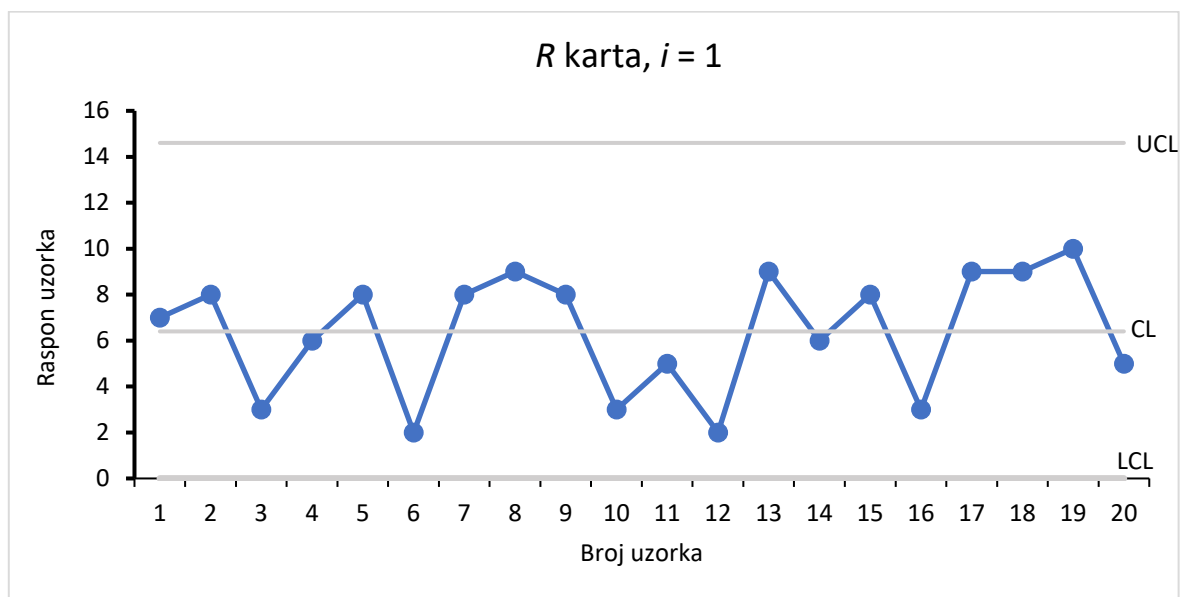
$A_2$	0,729
$D_3$	0
$D_4$	2,282

**Tablica 40. Vrijednosti kontrolnih granica za  $\bar{x}$  kontrolnu kartu**

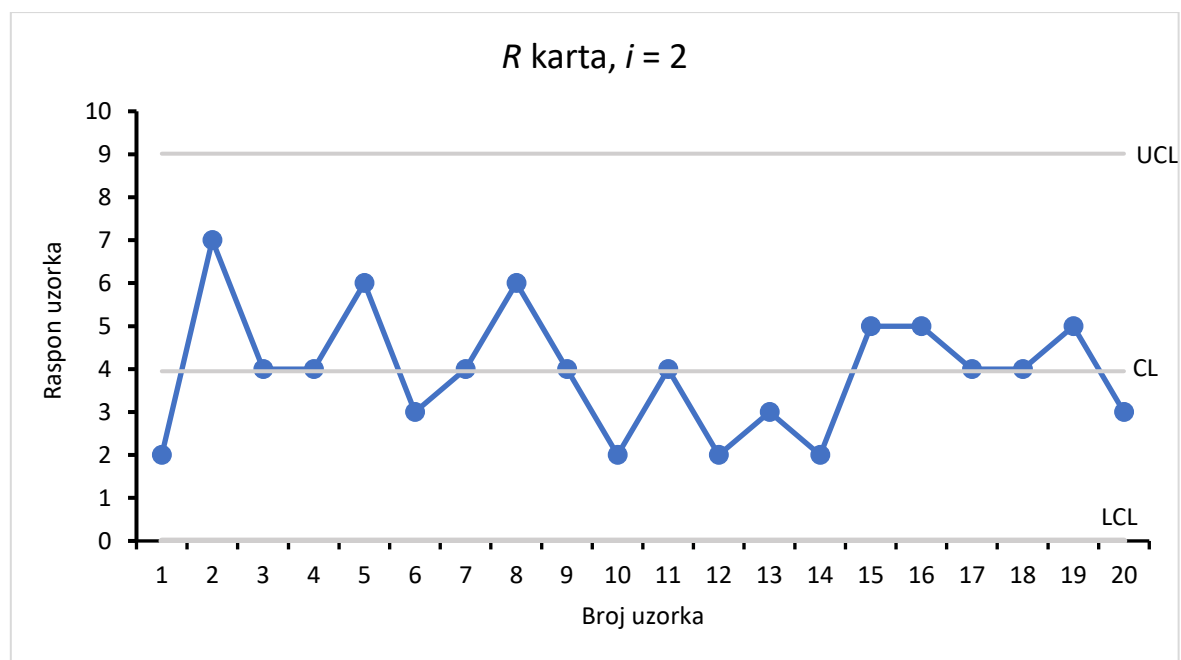
$\bar{x}$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
$i = 1$	82,95	78,28	87,62
$i = 2$	20,53	17,65	23,40

**Tablica 41. Vrijednosti kontrolnih granica za  $R$  kontrolnu kartu**

$R$ kontrolna karta			
Karakteristika kvalitete	CL	LCL	UCL
$i = 1$	6,40	0	14,60
$i = 2$	3,95	0	9,01

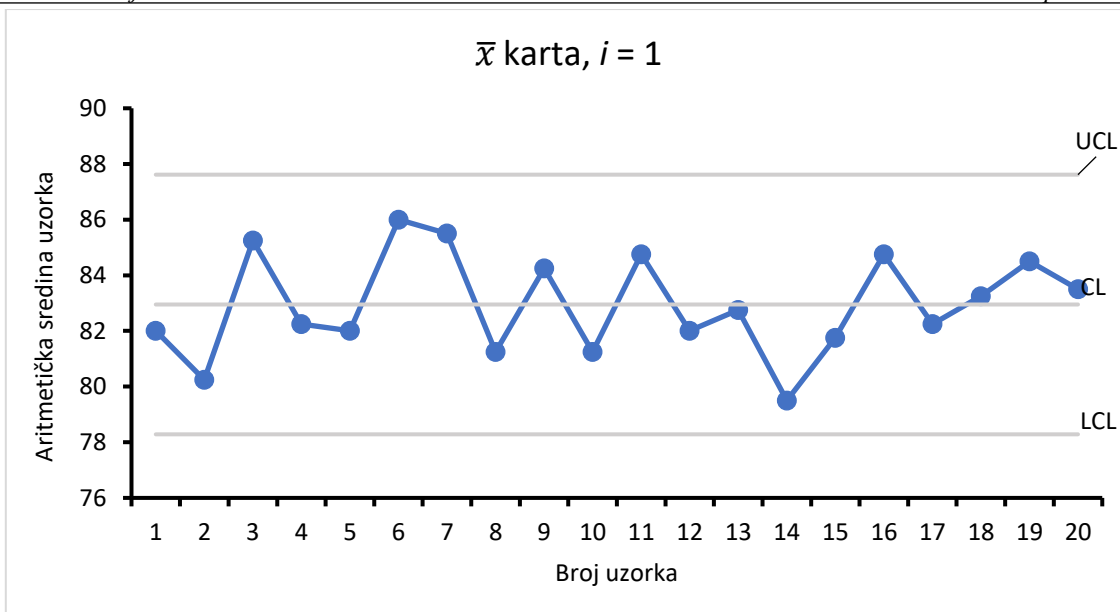


Slika 21. R kontrolna karta za  $i = 1$

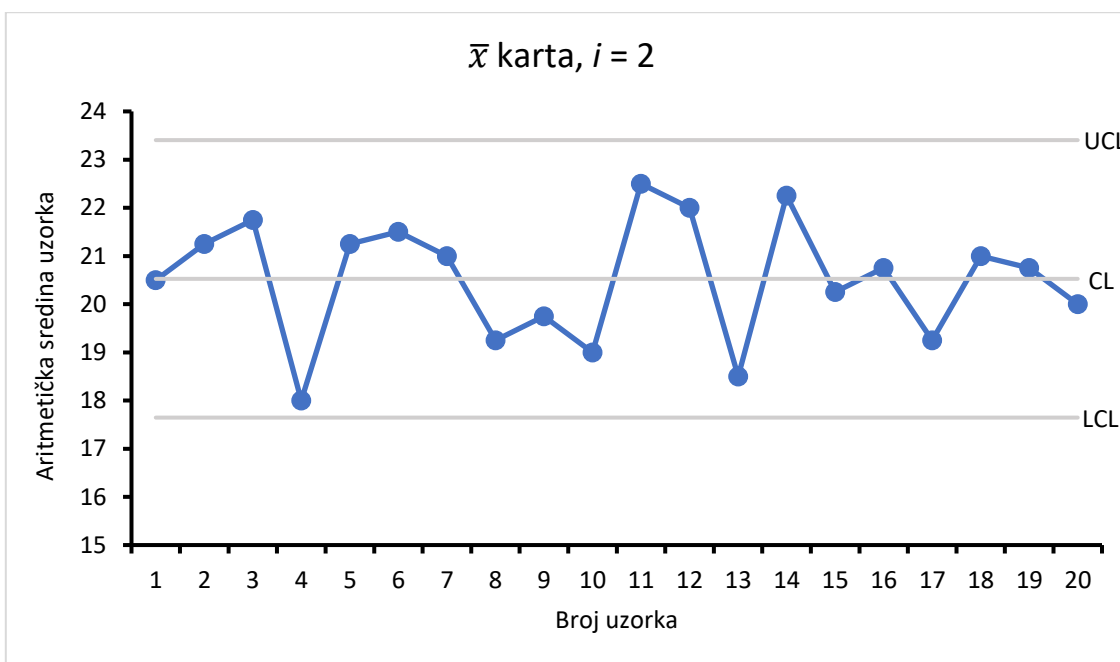


Slika 22. R kontrolna karta za  $i = 2$





Slika 23.  $\bar{x}$  kontrolna karta za  $i = 1$



Slika 24.  $\bar{x}$  kontrolna karta za  $i = 2$

Tablica 42. Vrijednosti varijance i kovarijance uzorka

Broj uzorka	Varijanca uzorka		Kovarijanca uzorka
	$s_{1j}$	$s_{2j}$	$s_{12j}$
1	10,00	1,00	1,33
2	10,92	8,25	-9,42
3	2,25	2,92	1,75
4	8,25	3,33	2,00
5	11,33	6,25	4,33
6	0,67	1,67	-0,67
7	11,00	3,33	5,33
8	14,25	6,92	-9,08
9	10,92	4,25	-5,92
10	1,58	0,67	-0,67
11	6,25	3,67	-2,50
12	0,67	1,33	-0,67
13	14,25	1,67	-1,50
14	6,33	0,92	-0,50
15	18,92	4,92	-8,58
16	2,25	4,92	-0,75
17	19,58	3,58	5,25
18	13,58	2,67	-6,00
19	17,67	4,92	3,50
20	5,67	2,00	3,00

Tablica 43. Aritmetičke sredine varijanci i kovarijance uzorka

Aritmetička sredina varijance uzorka		Aritmetička sredina kovarijance uzorka
$s_1$	$s_2$	$s_{12}$
9,32	3,46	-0,99

Tablica 44. Matrica varijance kovarijance uzorka i njezin inverz

Matrica varijance-kovarijance uzorka, $S$	$\begin{bmatrix} 9,32 & -0,99 \\ -0,99 & 3,46 \end{bmatrix}$
Inverz matrice varijance-kovarijance uzorka, $S^{-1}$	$\begin{bmatrix} 0,1107 & 0,0316 \\ 0,0316 & 0,2982 \end{bmatrix}$

Tablica 45. Vrijednosti  $\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$ 

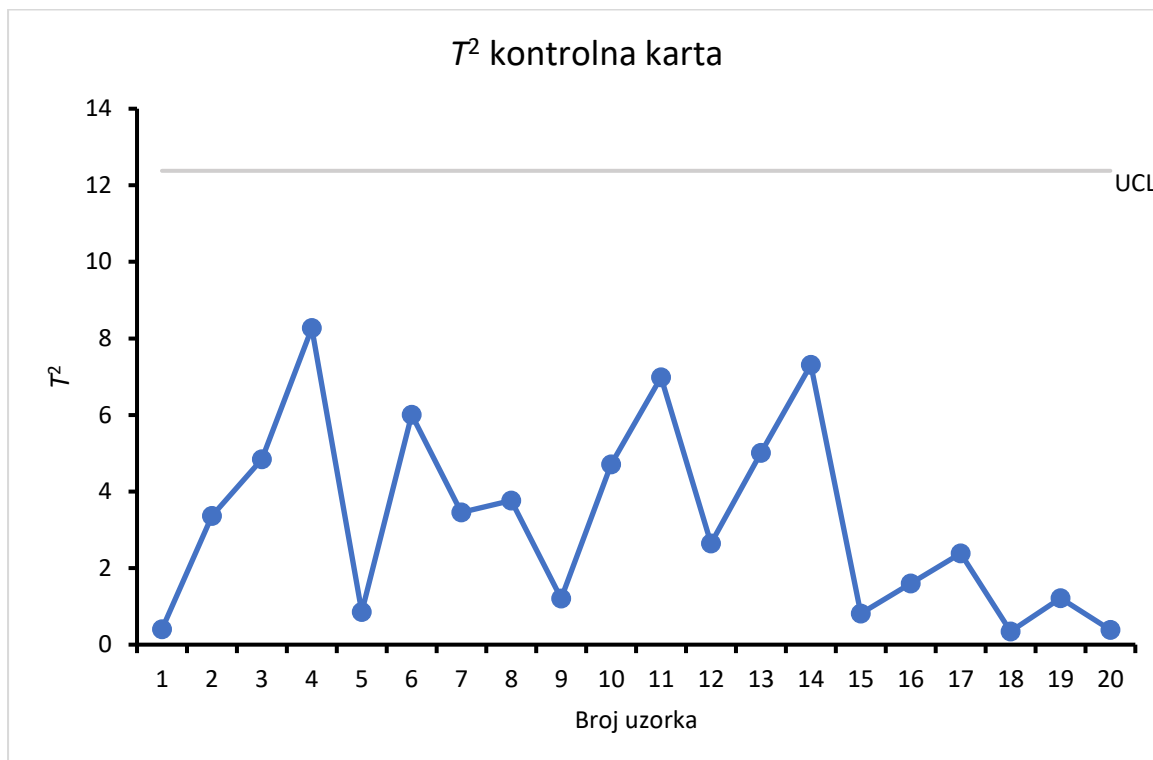
Broj uzorka	$\bar{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i$	
	$i = 1$	$i = 2$
1	-0,95	-0,02
2	-2,70	0,73
3	2,30	1,23
4	-0,70	-2,53
5	-0,95	0,73
6	3,05	0,98
7	2,55	0,48
8	-1,70	-1,28
9	1,30	-0,77
10	-1,70	-1,53
11	1,80	1,98
12	-0,95	1,48
13	-0,20	-2,03
14	-3,45	1,73
15	-1,20	-0,27

16	1,80	0,23
17	-0,70	-1,28
18	0,30	0,48
19	1,55	0,23
20	0,55	-0,52

Tablica 46. Vrijednosti  $T^2$  statistike

Broj uzorka	Hotelling $T^2$
1	0,41
2	3,36
3	4,84
4	8,27
5	0,85
6	6,00
7	3,45
8	3,77
9	1,21
10	4,71
11	6,99
12	2,64
13	5,01
14	7,31
15	0,81
16	1,60
17	2,38
18	0,34
19	1,21
20	0,39

Kako bi se nacrtala  $T^2$  kontrolna karta potrebno je još izračunati gornju kontrolnu granicu. UCL se računa pomoću jednadžbe 3.14. Kako bi se uvrstili svi podaci u tu jednadžbu potrebno je linearnom interpolacijom iz slike 27 odrediti vrijednost  $F$ -distribucije za  $F_{0,0054,2,59}$ . Vrijednost koja se dobije je 6,406. Uvrštavanjem u jednadžbu 3.14 dobije se vrijednost gornje kontrolne granice 12,378. Sada se može nacrtati  $T^2$  kontrolna karta kao što je prikazano na slici 25.

Slika 25.  $T^2$  kontrolna karta

Tablica 47. Vrijednosti generalizirane varijance

Broj uzorka	Generalizirana varijanca
1	13,25
2	9,00
3	5,44
4	15,17
5	22,50
6	2,61

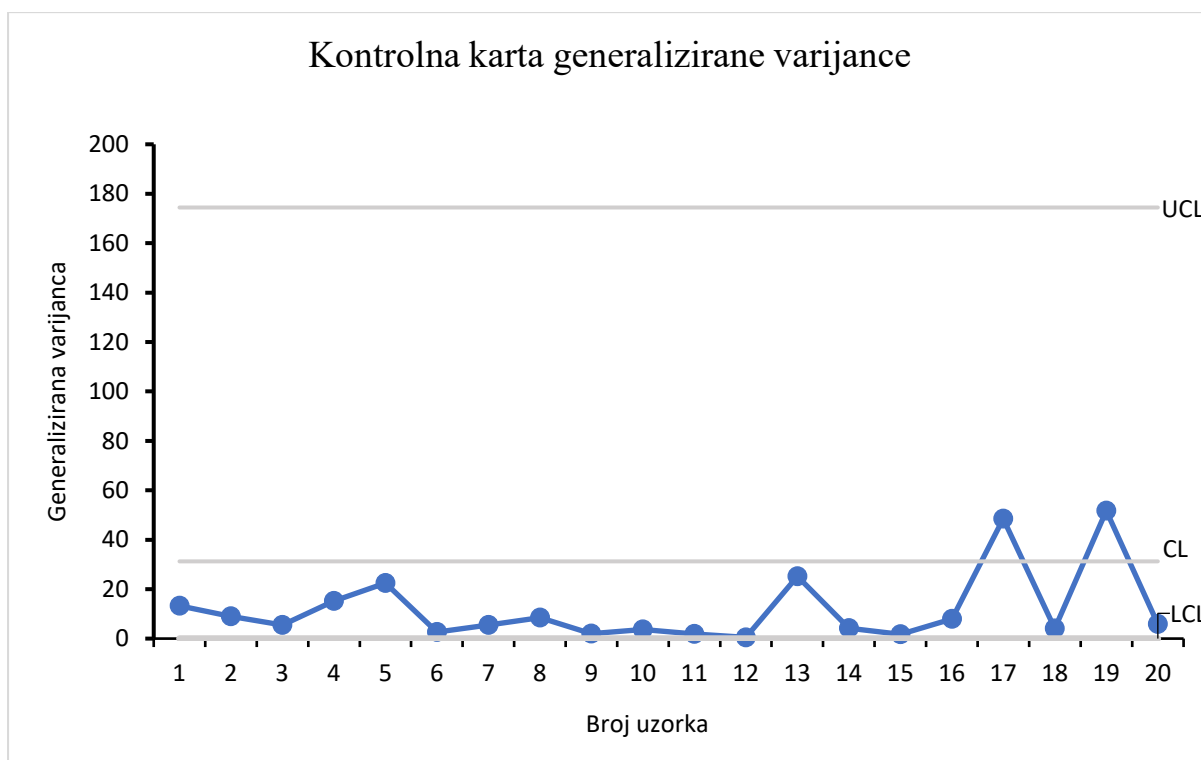
7	5,55
8	8,44
9	2,00
10	3,72
11	1,83
12	0,50
13	25,17
14	4,17
15	1,78
16	8,00
17	48,55
18	4,05
19	51,72
20	5,83

**Tablica 48. Vrijednosti faktora  $b_1$  i  $b_2$**

$b_1$	0,667
$b_2$	1,037

**Tablica 49. Kontrolne granice generalizirane varijance**

CL	UCL	LCL
31,24	174,43	-111,94 → 0



**Slika 26. Kontrolna karta generalizirane varijance**

U ovom primjeru se može vidjeti da  $\bar{x}$  kontrolna karta pokazuje da su univarijantne  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte te multivarijantna  $T^2$  kontrolna karta u kontroli što znači da nema točaka izvan kontrolnih granica. To znači da se te kontrolne granice mogu uzeti za fazu 2 primjene kontrolnih karti odnosno može se pratiti proces u trenutnom vremenu pomoću izračunatih granica.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom diplomskom radu dana je teorijska osnova  $\bar{x}$  i  $R$  univarijantnih kontrolnih karti i Hotellingove  $T^2$  multivarijantne kontrolne karte. Opisana je razlika tih dviju kontrolnih karti te prednosti i nedostaci jedne u odnosu na drugu. Zatim su u eksperimentalnom dijelu rada konstruirana 3 primjera u excelu kako bi vidjela razlika između rezultata univarijantnih i multivarijantnih kontrolnih karti.

Izabrani je primjer iz literature (Primjer 2) kako bi se verificirao izračun u excelu. Iako je primjer za bivarijantni problem, korištene su funkcije za matrični račun i uz male prilagodbe excel programa mogao bi se koristiti i za multivarijantno praćenje procesa.

U primjeru 1 univarijantna  $\bar{x}$  kontrolna karta je pokazala da je jedan uzorak izvan kontrolnih granica dok su u multivarijantnoj  $T^2$  karti sve točke unutar kontrolnih granica. Ta pokazuje da univarijantne nisu dovoljno dobre za kontroliranje više varijabli istovremeno jer ne uzimaju u obzir korelaciju između varijabli.

U primjeru 2 je univarijantne karte pokazuju da je svaka varijabla u kontroli, međutim multivarijantna karta pokazuje da je jedan uzorak izvan kontrole. To dovodi do istog zaključka, da je potrebno varijable kontrolirati skupno, a ne odvojeno.

U primjeru 3 su univarijantne  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte te multivarijantna  $T^2$  kontrolna karta u kontroli što znači da nema točaka izvan kontrolnih granica. To znači da se te kontrolne granice mogu uzeti za fazu 2 primjene kontrolnih karti odnosno može se pratiti proces u trenutnom vremenu pomoću izračunatih granica.



---

**LITERATURA**

- [1] D. C. Montgomery, *Statistical Quality Control*, Phoenix: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [2] M. Amitava, *Fundamentals of Quality Control and Improvement*, Hoboken: Wiley, 2021.
- [3] Acheson J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics*, Princeton: D. Van Nostrand Company, Inc., 1957.
- [4] N. L. Johnson, *Multivariate quality control*. New York: John Wiley and Sons. Inc., 1985.
- [5] K. G. L. Drury and L. R. Schilling, The Role of Control Charts in Modern Process Management, *Journal of Quality Technology*, 1982, 183-190
- [6] K. K. Lai and P. S. L. Lee, Control Charts and Process Capability: A Review, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2003., 653-660
- [7] M. A. Khan and M. A. Zulkifli, A Comparative Study of Control Charts for Monitoring the Process Capability, *International Journal of Quality & Reliability Management*, 2015., 82-100
- [8] T. P. Ryan, *Statistical methods for quality improvement*. Hoboken: Wiley-Blackwell, 2011.
- [9] A. R. M. R. Runger and D. C. Montgomery, Hotelling's  $T^2$  Control Chart: A Review and Extensions, *Technometrics*, 2000, 1-12
- [10] J. P. Woodall and M. J. Montgomery, Multivariate Control Charts: A Review, *Technometrics*, 1999, 316-334

## PRILOG

		$\nu_1 = \text{Degrees of Freedom for Numerator}$										
$\nu_2$	$\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18	0.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.95
	0.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37
	0.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81
	0.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43
	0.005	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.94
	0.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.25
20	0.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91
	0.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31
	0.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72
	0.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29
	0.005	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76
	0.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.94
25	0.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.84
	0.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20
	0.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56
	0.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06
	0.005	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.45
	0.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.42
30	0.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79
	0.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13
	0.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46
	0.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91
	0.005	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.25
	0.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.11
40	0.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.74
	0.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04
	0.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33
	0.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73
	0.005	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	3.03
	0.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.75
50	0.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73	1.70
	0.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99
	0.025	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26
	0.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63
	0.005	8.63	5.90	4.83	4.23	3.85	3.58	3.38	3.22	3.09	2.99	2.90
	0.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82	3.67	3.55
60	0.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68
	0.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95
	0.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22
	0.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56
	0.005	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.82
	0.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69	3.54	3.42

Slika 27. Vrijednosti  $F$ -distribucije[2]

Observations in Sample, $n$	$\bar{X}$ -Charts						s-Charts						R-Charts					
	Factors for Control Limits			Factors for Centerline			Factors for Control Limits			Factors for Centerline			Factors for Control Limits			Factors for Centerline		
	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	1/c <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>		
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267		
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574		
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282		
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114		
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004		
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924		
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864		
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816		
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777		
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744		
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717		
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693		
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672		
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653		
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637		
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622		
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608		
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597		
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585		
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575		
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566		
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557		
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548		
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541		

Slika 28. Faktori za konstruiranje kontrolnih karti za varijable[1]