SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Luka Šunjić

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor: Student:

Prof. dr. sc. Josip Kasać, dipl. ing. Luka Šunjić

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof.dr.sc. Josipu Kasaću na dostupnosti, pristupačnosti, savjetima i pomoći prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, prijateljima i djevojci na podršci i strpljenju tijekom studiranja. Također se zahvaljujem svim kolegama s faksa koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studiranja.

Luka Šunjić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Proizvodno inženjerstvo, inženjerstvo materijala, industrijsko inženjerstvo i menadžment, mehatronika i robotika, autonomni sustavi i računalna inteligencija

Sveučilište u Zagreb Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: **602 - 04 / 24 - 06 / 1**	
Ur.broj: **15 - 24 -**	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Luka Šunjić** JMBAG: 0035211773

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Nelinearno robusno upravljanje kranom s dva stupnja slobode gibanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Nonlinear robust control of a crane with two degrees of freedom**

Opis zadatka:

Linearni regulatori primijenjeni na upravljanje kranom često imaju suboptimalne performanse zbog nemogućnosti poznavanja preciznih vrijednosti parametara dinamičkog modela krana, poput nepoznate mase ovješenog tereta i koeficijenata trenja. Nadalje, vanjski poremećaji poput vjetra ili neujednačenosti tereta, također mogu značajno utjecati na performanse linearnih regulatora. U ovom radu razmatra se primjena nelinearnih robusnih regulatora i usporedba njihovih performansi sa standardnim linearnim regulatorima.

U radu je potrebno:

- Izvesti nelinearni dinamički model krana na temelju Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode.
- Provesti linearizaciju nelinearnih dinamičkih jednadžbi i prikazati sustav u obliku prostora stanja. Provjeriti upravljivost i mjerljivost lineariziranog sustava.
- Provesti sintezu linearnog regulatora stanja primjenom metode podešavanja polova, uz pretpostavku da su sve pozicije i brzine mjerljive.
- Provesti sintezu linearnog LQR regulatora stanja, uz pretpostavku da su sva stanja mjerljiva.
- Provjeriti simulacijama kako izbor polova regulatora stanja i težinskih matrica LQR regulatora utječe na prigušenje njihanja ovješenog tereta krana.
- Provesti sintezu linearnog regulatora s observerom stanja, uz pretpostavku da su mjerljive samo linearna i kutna pozicija.
- Provesti sintezu nelinearnog robusnog regulatora stanja primjenom Lyapunovljeve metode.
- Provesti sintezu robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom (engl. sliding-mode controller) uz pretpostavku nepoznatih parametara sustava i prisutnosti vanjskih poremećaja.
- Međusobno usporediti performanse navedenih regulatora u slučaju preciznog i nepreciznog poznavanja parametara poput mase ovješenog tereta i koeficijenata trenja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datumi obrane:
18. siječnja 2024.	21. ožujka 2024.	25. – 29. ožujka 2024.

Zadatak zadao:
Kasać Josip
Prof.dr.sc. Josip Kasać

Predsjednik Povjerenstva:
Prof. dr. sc. Ivica Garašić

Sadržaj

Popis slika

Popis tablica

Popis oznaka

Oznaka	**Jedinica**	**Opis**
a	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Akceleracija
a_x	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Akceleracija u smjeru osi x
a_y	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Akceleracija u smjeru osi y
$\mathbf{A}$	-	Matrica stanja
$\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}$	-	Matrica zatvorenog kruga
$b_1(\theta)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$b_2(\theta)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$\mathbf{B}$	-	Matrica ulaza
$\mathbf{C}$	-	Matrica izlaza
$d(t)$	-	Ukupni poremećaj koji djeluje na sustav
$d_{\mathrm{ext}}(t)$	-	Vanjski poremećaj koji djeluje na sustav
D_x	$\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}$	Koeficijent viskoznog trenja kolica
D_θ	$\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}$	Koeficijent viskoznog trenja njihala
$\mathbf{D}$	-	Prijenosna matrica
$f(x)$	-	Funkcija koja se linearizira
$f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
F_{t}	N	Ukupna sila koja djeluje na sustav
g	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Gravitacijska akceleracija
$h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
I	$\mathrm{kg \cdot m^2}$	Moment tromosti
K_{11}	-	Element matrične funkcije nelinearnog modela
$K_{12}(\theta)$	-	Element matrične funkcije nelinearnog modela
$K_{21}(\theta)$	-	Element matrične funkcije nelinearnog modela
K_{22}	-	Element matrične funkcije nelinearnog modela
$\mathbf{K}$	-	Matrica pojačanja regulatora
$\mathbf{K}(\theta)$	-	Matrična funkcija nelinearnog modela
l	m	Duljina njihala
L	J	Lagranžijan
$\mathbf{L}$	-	Matrica pojačanja regulatora kod observera
m	kg	Masa njihala
M	kg	Masa kolica
n	-	Broj stanja
p	-	Broj ulaza
$\mathbf{p}$	-	Vektor polova

$\mathbf{p}_1$	-	Vektor polova
$\mathbf{p}_2$	-	Vektor polova
$\mathbf{p}_3$	-	Vektor polova
q	-	Broj izlaza
Q_x	N	Poopćena vanjska sila primjenjena na os x
Q_θ	N	Poopćena vanjska sila primjenjena na kut θ
$\mathbf{Q}$	-	Težinska matrica
$\mathbf{Q}_1$	-	Težinska matrica
$\mathbf{Q}_2$	-	Težinska matrica
$\mathbf{Q}_3$	-	Težinska matrica
$\mathbf{P}$	-	Modalna matrica
$\mathbf{R}$	-	Težinska matrica
T_{ct}	J	Translacijska kinetička energija kolica
T_{pr}	J	Translacijska kinetička energija njihala
T_{pt}	J	Rotacijska kinetička energija njihala
T_{t}	J	Ukupna kinetička energija
$\mathbf{T}$	-	Matrica transformacija
u	N	Horizontalna sila koja djeluje na kolica
$u_{\mathrm{R}}(t)$	-	Nelinearni član regulatora
$\mathbf{u}(t)$	-	Vektor ulaza
V_{t}	J	Ukupna potencijalna energija sustava
$w(t)$	-	Referentni vektor vođenja
x	m	Horizontalna pozicija kolica
x_{p}	-	Koordinata centra ovješene mase na osi apscise
x_0	-	Vrijednost oko koje se funkcija aproksimira
x_1	-	Vrijednost za koju se funkcija aproksimira
$\dot{x}$	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Horizontalna brzina
$\ddot{x}$	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	Horizontalno ubrzanje kolica
$\mathbf{x}(t)$	-	Vektor stanja
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	-	Derivacija vektora stanja
$\widehat{\mathbf{x}}(t)$	-	Vektora estimiranih stanja
$\dot{\widehat{\mathbf{x}}}(t)$	-	Derivacija vektora estimiranih stanja
y_{p}	-	Koordinata centra ovješene mase na osi ordinate
$\mathbf{y}(t)$	-	Vektor izlaza
ε	-	Mali pozitivni parametar
θ	rad	Kut otklona njihala
$\dot{\theta}$	$\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$	Kutna brzina
$\ddot{\theta}$	$\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$	Kutno ubrzanje
ρ	-	Pojačanje robusnog nelinearnog regulatora

Sažetak

U ovom radu razmatra se upravljanje kranom primjenom nelinearnih robusnih regulatora i usporedba njihovih performansi sa standardnim linearnim regulatorima. Nelinearni dinamički model krana izveden je na temelju Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode. Provedena je linearizacija nelinearnih dinamičkih jednadžbi i dobivene linearizirane jednadžbe prikazane su u obliku prostora stanja. Provedena je sinteza linearnog regulatora primjenom metode podešavanja polova kao i linearnog kvadratičnog regulatora. Uz pretpostavku mjerljivosti samo linearne i kutne pozicije, primjenom observera stanja estimirana je linearna i kutna brzina. Provedena je sinteza robusnog nelinearnog regulatora i robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada. Simulacijski rezultati ilustriraju značajno bolje performanse nelinearnih regulatora u slučaju prisutnosti vanjskih poremećaja kao i u slučaju nepreciznog poznavanja parametara poput mase ovješenog tereta.

Ključne riječi: kran s dva stupnja slobode gibanja, linearna regulacija, observer stanja, robusna nelinearna regulacija, robusna nelinearna regulacija s kliznim režimom rada

Summary

This thesis examines the crane control using nonlinear robust controllers and compares their performance with standard linear controllers. The nonlinear dynamic model of the crane is derived based on the Euler-Lagrange and Newton-Euler methods. Linearization of the nonlinear dynamic equations is conducted, and the resulting linearized equations are represented in state-space form. The synthesis of a linear controller is performed using pole placement method as well as a linear quadratic regulator. Assuming measurability of only linear and angular positions, linear and angular velocities are estimated using state observers. The synthesis of a robust nonlinear controller and a robust nonlinear sliding mode controller is carried out. Simulation results illustrate significantly better performance of nonlinear controllers in the presence of external disturbances as well as in cases of imprecise parameter knowledge such as the mass of the suspended load.

Keywords: gantry crane with two degrees of freedom of motion, linear control, state observer, robust nonlinear control, sliding mode control

1. Uvod

Kran se koristi u mnogima područjima industrije. U građevini se koriste za prenošenje tereta na velike visine. Koriste se pri ukrcavanju kontejnera u transportne brodove. U pogonima se koriste za relokaciju većih i težih komponenti. Radi se o nelinearnim sustavima u kojima su prisutne nekontrolirane oscilacije koje uzrokuju probleme u stabilnosti i sigurnosti sustava. U radu će se s pomoću modela krana s dva stupnja slobode gibanja prikazati kako se kran ponaša, kako utječu različiti tipovi regulacije na njegove performanse i robusnost i kako se ponaša u prisutnosti poremećaja.

Započet će se prikazom laboratorijskog modela krana koji će dati uvid u izgled samog modela. Pojasnit će se osnovni način na koji kran funkcionira. S pomoću slike laboratorijskog modela krana napravit će se grafički prikaz u kojem će se označiti i pojasniti sve komponente krana. Poslije toga će se detaljno pojasniti matematika iza Euler-Lagrangeove metode koja će se koristiti za dobivanje nelinearnog dinamičkog modela. Isti postupak će se ponoviti i za Newton-Eulerovu metodu koja će služiti kao dodatan način kojim se može opisati nelinearna dinamika. U sklopu ove metode, prikazat će se dijagrami tijela oslobođenih veza, iz kojih će se dobiti jednadžbe ravnoteže potrebne za raspisivanje dinamike. Treće poglavlje opisat će osnovni invarijantni oblik prostora stanja. Svaka komponenta tog oblika prostora stanja bit će označena i ukratko opisana. Kao dio istog poglavlja prikazat će se postupak linearne aproksimacije Taylorovim reda. Dobivena linearna dinamika modela će se koristiti za sintezu linearnih regulatora. Pojasnit će se dvije metode; metoda podešavanja polova i LQR metoda. Sintetizirani regulatori koristit će se za regulaciju nelinearnog i linearnog dinamičkog modela krana, čiji će se odzivi paralelno grafički prikazati. Tako će se lakše moći usporediti odzivi nelinearne i linearne dinamike modela. Kao dio posljednjeg poglavlja, pokazat će se kako se matematički poremećaj unosi u sustav. Postavit će se proizvoljan poremećaj čiji će se utjecaj na odzive linearnih regulatora grafički prikazati. U ovom će se dijelu pojasniti kako funkcionira robusni nelinearni regulator i koje su mu prednosti. Grafički će se prikazati njegovo djelovanje na utjecaj poremećaja. Uz to će se i detaljno matematički prikazati kako se sintetizira robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada. Za njega će se također napraviti grafički prikaz djelovanja na utjecaj poremećaja. Za kraj će se svaki tip regulatora testirati za slučaj u kojem je nepoznata masa ovješena na kraju njihala. Svaki tip regulacije bit će popraćen grafom i kratkim komentarima.

2. Nelinearni dinamički model krana

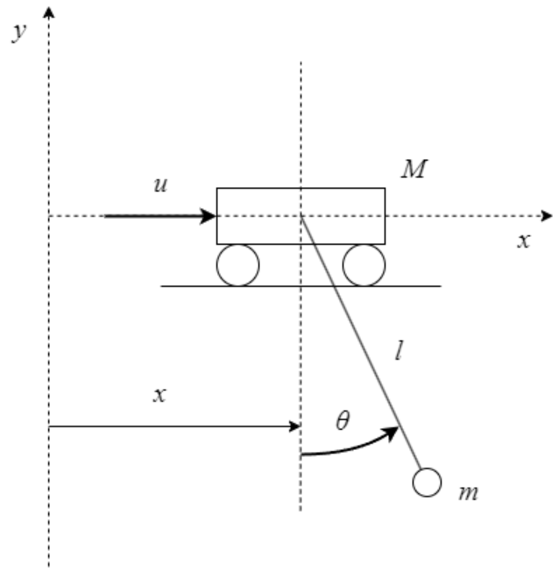
Uzet će se slika laboratorijskog modela krana iz literature. Treba naglasiti da će se prikaz na slici 1 koristiti samo kao primjer kako bi se kasnije lakše razumijeli grafovi krana.

Slika 1: Primjer laboratorijskog modela krana [1]

Kran se sastoji od kolica i letvice koja ima ulogu njihala. Kolica se mogu kretati horizontalno u dva smjera Njihalo se kretanjem kolica otklanja za kut otklona, koji će biti tim veći što su kretanja kolica naglija. Zadatak regulacije bit će pomicanje kolica od proizvoljno zadane pozicije do po izboru postavljenog ishodišta. Cilj je da pomicanje u ishodište bude što brže što manjim otklonom njihala. Segment regulacije i simulacije rezultata napravit će se pomoću programskog paketa *MATLAB*. Prije toga je potrebno napraviti prikladan dinamički model. Za to će se koristiti dvije metode: Euler-Lagrangeova i Newton-Eulerova metoda. Iako imaju različit pristup, rezultirat će identičnom dinamičkom modelu krana.

2.1. Grafički prikaz krana

Prikaz krana u karetezijevom koordinatnom sustavu prvi je korak u definiranju dinamičkog modela. Budući da se kolica krana mogu kretati horizontalno, dok se njihalo otklanja pri pomaku kolica, zaključit će se da kran ima dva stupnja slobode gibanja. Pomoću slike 1 napravit će se shema tj. grafički prikaz krana.



Slika 2: Grafički prikaz krana

Parametri označeni na slici 2 su:

l	- duljina njihala,
M	- masa kolica,
m	- masa njihala,
u	- horizontalna sila koja djeluje na kolica,
x	- horizontalna pozicija kolica i
θ	- kut otklona njihala.

Za letvicu odnosno njihalo uzet će se pretpostavka da ne mijenja svoj oblik i volumen odnosno da je kruto tijelo. Masa njihala će se zanemariti. Na kraju njihala ovješen je teret mase m. Upravljačka varijabla u tj. horizontalna sila koja će pokretati kolica usmjerena je u pozitovnom smjeru osi x pri čemu je kut otklona θ usmjeren obrnuto od kazaljke na satu u pozitivnom smjeru rotacije. Grafički prikaz sa slike 2 bit će od velike važnosti za Newton-Eulerovu metodu, no prvo će se napraviti dinamički model pomoću Euler-Lagrangeove metode.

2.2. Euler-Lagrangeva metoda

Za sintezu dinamičkog modela krana pomoću ove metode potrebno je izračunati ukupnu potencijalnu energiju sustava V_t i ukupnu kinetičku energiju sustava T_t sustava [1].

Potencijalna energija je energija koju neko tijelo posjeduje zbog svoga položaja u prostoru, naprezanja u sebi, električnog naboja ili nekog drugog faktora [2]. Ovaj sustav ima samo jedan utjecaj potencijalne energije; gravitacija. To znači da je ukupna potencijalna energija sustava V_t jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji:

$$V_\mathrm{t} = -m\,g\,l\,\cos(\theta), \tag{2.1}$$

gdje je:

g - gravitacijska akceleracija.

U jednadžbi (2.1) stavljen je minus zato što se masa m nalazi ispod kolica (pogledati sliku 2). Kinetička energija predstavlja energiju tijela u pokretu [3]. Ukupna kinetička energija bit će suma svih translacijskih i rotacijskih kinetičkih energija. Započet će se izračunom translacijske kinetičke energije kolica T_ct:

$$T_\mathrm{ct} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{2.2}$$

gdje je:

$\dot{x}$ - horizontalno ubrzanje kolica.

Translacijska kinetička energija njihala T_pt može se izraziti kao funkcija brzine centra gravitacije ovješene mase m:

$$T_\mathrm{pt} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\dot{x}_\mathrm{p}{}^2 + \dot{y}_\mathrm{p}{}^2}\right)^2 \tag{2.3}$$

gdje su:

x_p - koordinata centra ovješene mase na osi apscise i

y_p - koordinata centra ovješene mase na osi ordinate.

Koordinate su opisane jednadžbama:

$$x_\mathrm{p} = x + l\,\sin(\theta), \tag{2.4}$$

$$y_\mathrm{p} = -l\,\cos(\theta). \tag{2.5}$$

Brzine $\dot{x}_\mathrm{p}$ i $\dot{y}_\mathrm{p}$ dobit će se derivacijom jednadžbi (2.4) i (2.5) po vremenu t:

$$\dot{x}_\mathrm{p} = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta), \tag{2.6}$$

$$\dot{y}_\mathrm{p} = l\,\dot{\theta}\,\sin(\theta). \tag{2.7}$$

Jednadžbe (2.6) i (2.7) uvrštavaju se u jednadžbu (2.3):

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{pt}} &= \frac{1}{2} m \left(\cancel{\sqrt{\left(\dot{x} + l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right)^2 + \left(l\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)\right)^2}} \right)^{\cancel{2}} \\
&= \frac{1}{2} m \left(\left(\dot{x} + l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right)^2 + \left(l\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)\right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m \left(\dot{x} + l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(l\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 2\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + l^2\,\dot{\theta}^2\,\cos^2(\theta) \right) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2\,\sin^2(\theta) \\
&= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2\,\cos^2(\theta) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2\,\sin^2(\theta) \\
&= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2\,\underbrace{\left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)}_{=1},
\end{aligned}$$

čime se dobiva raspisan izraz za kinetičku translacijsku energiju njihala T_{pt}:

$$T_{\mathrm{pt}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2. \tag{2.8}$$

Preostaje još samo izračunati rotacijsku kinetičku energiju njihala T_{pr} [4]:

$$T_{\mathrm{pr}} = \frac{1}{2} I\,\dot{\theta}^2, \tag{2.9}$$

gdje je:

I - moment tromosti.

Moment tromosti I dobit će se pomoću formule [5]:

$$I = m\,l^2. \tag{2.10}$$

Dobivene kinetičke energije u jednadžbama (2.2), (2.8) i (2.9) će se zbrojiti:

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{t}} &= T_{\mathrm{ct}} + T_{\mathrm{pt}} + T_{\mathrm{pr}} \\
&= \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I\,\dot{\theta}^2,
\end{aligned}$$

čime se, nakon sređivanja, dobiva izraz za ukupnu kinetičku energiju T_{t}:

$$T_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\left(M + m\right)\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(I + m\,l^2\right)\dot{\theta}^2. \tag{2.11}$$

Izračun energija sustava omogućuje rješavanje Lagrangeovih jednadžbi. Produkt njihova rješenja bit će dinamički model krana.

Za slučaj krana s dva stupnja slobode gibanja, imaju oblik [6]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=Q_x, \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=Q_\theta, \tag{2.13}$$

gdje su:

L	- lagranžijan,
Q_x	- poopćena vanjska sila primijenjena na os x i
Q_θ	- poopćena vanjska sila primijenjena na kut θ.

Lagranžijan predstavlja razliku ukupnih energija sustava [6]:

$$L = T_\mathrm{t} - V_\mathrm{t}\,. \tag{2.14}$$

Sile Q_x i Q_θ zadane su jednadžbama:

$$Q_x = u - D_x\,\dot{x}, \tag{2.15}$$

$$Q_\theta = -D_\theta\,\dot{\theta}. \tag{2.16}$$

gdje su:

D_x	- koeficijent viskoznog trenja kolica i
D_θ	- koeficijent viskoznog trenja njihala.

Viskozno trenje uzrokovano je kretanjem tijela kroz fluid. U ovom slučaj taj fluid je zrak. Utjecaj viskoznog trenja bit će lako vidljiv u grafovima simulacija. Trenje između podloge i kotača kolica će se zanemariti.

Jednadžbe će se raspisati postepeno, član po član. Započet će se sa raspisivanjem člana $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$ iz jednadžbe (2.12):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\,(T_\mathrm{t}-V_\mathrm{t})}{\partial \dot{x}}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(I+m\,l^2\right)\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,l\,\cos(\theta)\right)\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((M+m)\,\dot{x} + m\,l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right),\end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije po vremenu dobiva raspisani član $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\,\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta). \tag{2.17}$$

Član $\frac{\partial L}{\partial x}$ u jednadžbi (2.12) jednak je nuli jer lagranžijan L (2.14) nema varijablu x u sebi:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{2.18}$$

Raspisuje se član $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)$ iz jednadžbe (2.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\left(T_{\mathrm{t}}-V_{\mathrm{t}}\right)}{\partial \dot{\theta}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\left(M+m\right)\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(I+ml^2\right)\dot{\theta}^2 + m\,g\,l\,\cos(\theta)\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,l\,\dot{x}\cos(\theta) + \left(I+ml^2\right)\dot{\theta}\right),
\end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije po vremenu i jednostavnog preslagivanja članova dobiva raspisani član $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\,l\,\ddot{x}\cos(\theta) + \left(I+ml^2\right)\ddot{\theta} - m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta). \tag{2.19}$$

Preostaje još raspisati član $\frac{\partial L}{\partial \theta}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(T_{\mathrm{t}}-V_{\mathrm{t}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}\left(M+m\right)\dot{x}^2 + m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(I+ml^2\right)\dot{\theta}^2 + m\,g\,l\,\cos(\theta)\right),
\end{aligned}$$

gdje se nakon parcijalne derivacije po kutu otklona θ dobiva član $\frac{\partial L}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta) - m\,g\,l\,\sin(\theta). \tag{2.20}$$

Dobiveni članovi uvrstit će se u pripadajuće jednadžbe. Izrazi (2.15), (2.17) i (2.18) uvrštavaju se u prvu Lagrangeovu jednadžbu (2.12):

$$\left(M+m\right)\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) = u - D_x\,\dot{x}. \tag{2.21}$$

Izrazi (2.16), (2.19) i (2.20) uvrštavaju se u drugu Lagrangeovu jednadžbu (2.13):

$$m\,l\,\ddot{x}\cos(\theta) - \cancel{m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)} + \left(I+ml^2\right)\ddot{\theta} + \cancel{m\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)} + m\,g\,l\,\sin(\theta) = -D_\theta\,\dot{\theta},$$

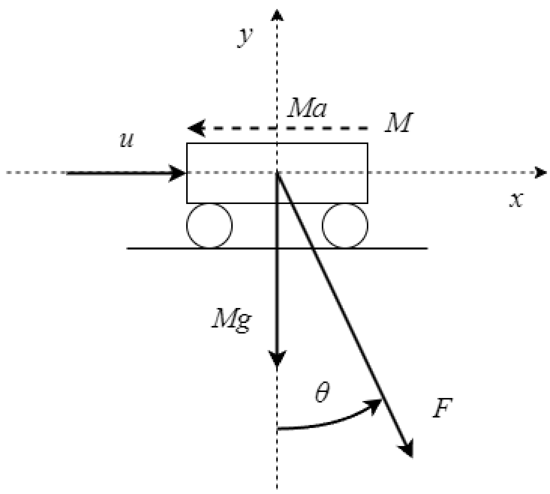
gdje se nakon kraćenja članova dobiva jednadžba:

$$m\,l\,\ddot{x}\cos(\theta) + \left(I+ml^2\right)\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\sin(\theta) = -D_\theta\,\dot{\theta}. \tag{2.22}$$

S jednadžbama (2.21) i (2.22) opisan je dinamički model krana.

2.3. Newton-Eulerova metoda

Kran sastoji se od dva tijela; kolica i njihala. Pomoću grafičkog prikaza na slici 2, napravit će se dva grafa tijela oslobođenih veza [7], započevši sa kolicima.



Slika 3: Grafički prikaz kolica oslobođenih veza

U suprotnom smjeru osi x postavljena je sila Ma. Ta sila predstavlja inerciju kolica. Inercija je tendecija ili želja tijela da ostane u stanju mirovanja. Uvijek je usmjerena suprotno smjeru gibanja. Proizlazi iz d'Alembertovog principa [8], kojim se problem u dinamici pretvara u statički problem. Opisan je formulom:

$$F_{\mathrm{t}} - M\,a = 0, \tag{2.23}$$

gdje su:

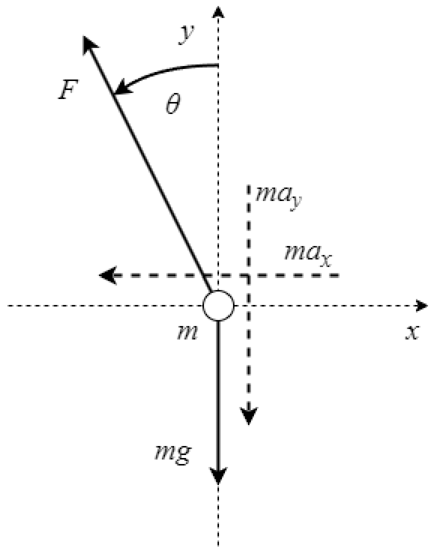
F_{t}	- ukupna sila koja djeluje na sustav i
a	- akceleracija.

Jednadžbe ravnoteže kolica imat će identičan oblik kao i jednadžba (2.23):

$$u + F\,sin(\theta) - M\ddot{x} = 0, \tag{2.24}$$

$$F\,cos(\theta) + M\,g = 0. \tag{2.25}$$

Isti postupak će se ponoviti za njihalo. Napravit će se graf njihala oslobođenog veza.



Slika 4: Grafički prikaz njihala oslobođenog veza

Sile ma_x i ma_y predstavljaju inercije njihala. U ovom slučaju se radi o dvije sile inercije zato što sustav ima dva smjera gibanja (horizontalno i vertikalno), gdje su kolica imala samo jedan (horizontalno). Razlog zadanom usmjerenju inercija je pretpostavka gibanja njihala. Pogleda li se slika 2, primjetit će se da je kut θ usmjeren obrnuto od kazaljke na satu, što znači da se njihalo njiše u tom smjeru. Inercije onda moraju biti postavljene kako je prikazano na slici 4. Akceleracije po osima definirane su formulama:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{2.26}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{2.27}$$

gdje su:

a_x - akceleracija u smjeru osi x i

a_y - akceleracija u smjeru osi y.

Koordinate x_p i y_p su već prije opisane u jednadžbama (2.4) i (2.5) pa ih je potrebno samo uvrstiti u jednadžbe (2.26) i (2.27):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x + l\sin(\theta)\right), \tag{2.28}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(-l\cos(\theta)\right). \tag{2.29}$$

Prvo će se raspisati akceleracija a_x:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x} + l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right) \\ &= \ddot{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l\,\dot{\theta}\,\cos(\theta)\right), \end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije člana u zagradi dobiva jednadžba:

$$a_\mathrm{x} = \ddot{x} + l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta). \tag{2.30}$$

Slijedi raspisivanje akceleracije a_y:

$$a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)\right),$$

derivacijom po vremenu dobiva se jednadžba:

$$a_\mathrm{y} = l\,\ddot{\theta}\,\sin(\theta) + l\,\dot{\theta}^2\,\cos(\theta). \tag{2.31}$$

Pomoću slike 4, raspisat će se jednadžbe ravnoteže njihala:

$$-F\,\sin(\theta) - m\,a_\mathrm{x} = 0, \tag{2.32}$$

$$F\,\cos(\theta) - m\,g - m\,a_\mathrm{y} = 0. \tag{2.33}$$

Jednadžba za akceleraciju a_x (2.30) uvrstit će se u jednadžbu (2.32):

$$\begin{aligned} -F\,\sin(\theta) - m\left(\ddot{x} + l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\right) &= 0, \\ -F\,\sin(\theta) - m\ddot{x} - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) &= 0, \end{aligned}$$

gdje se nakon preslagivanja članova dobiva izraz za $F\,\sin(\theta)$:

$$F\,\sin(\theta) = -m\ddot{x} - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta). \tag{2.34}$$

Izraz za $F\,\sin(\theta)$ uvrstit će se u jednadžbu (2.24). Dobiveni izraz će presložiti:

$$\begin{aligned} u - m\ddot{x} - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) - M\ddot{x} &= 0, \\ M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) &= u. \end{aligned}$$

Nakon grupiranja fizikalnih veličina uz horizontalnu akceleraciju $\ddot{x}$ i dodavanja djelovanje viskoznog trenja na kolica $-D_x\dot{x}$ s desne strane jednadžbe, dobiva se prva jednadžba dinamičkog modela krana:

$$(M+m)\,\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) - m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) = u - D_x\dot{x}. \tag{2.35}$$

Jednadžba (2.34) će se ponovno iskoristiti. Pomnožit će se sa $\cos(\theta)$ i podijelit sa $\sin(\theta)$:

$$F\,\sin(\theta) = -m\ddot{x} - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) \qquad \Big/ \cdot \cos(\theta)\,,$$
$$F\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) = -m\ddot{x}\,\cos(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos^2(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) \qquad \Big/ : \sin(\theta)\,,$$

nakon čega se dobiva izraz za $F\,\cos(\theta)$:

$$F\,\cos(\theta) = \frac{-m\ddot{x}\,\cos(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos^2(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \tag{2.36}$$

Izraz za $F\,\cos(\theta)$ i jednadžba za akceleraciju a_y (2.31) se zatim uvrštavaju u jednadžbu (2.33). Jednadžba se nakon uvrštavanja množi sa $\sin(\theta)$ i $-l$:

$$\frac{-m\ddot{x}\,\cos(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos^2(\theta) + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - m\,g - m\,l\,\ddot{\theta}\,\sin(\theta) - m\,l\,\dot{\theta}^2\,\cos(\theta) = 0 \qquad \Big/ \cdot \sin(\theta)\,,$$
$$-m\ddot{x}\,\cos(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos^2(\theta) + \cancel{m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)} - m\,g\,\sin(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\sin^2(\theta) - \cancel{m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)} = 0,$$
$$-m\ddot{x}\,\cos(\theta) - m\,l\,\ddot{\theta}\,\underbrace{\left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)}_{=1} - m\,g\,\sin(\theta) = 0 \qquad \Big/ \cdot (-l)\,,$$

čime se dobiva jednadžba:

$$m\,l\,\ddot{x}\,\cos(\theta) + m\,l^2\,\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\sin(\theta) = 0. \tag{2.37}$$

Dobivena jednadžba je nepotpuna. Potrebno je sa lijeve strane jednadžbe dodati utjecaj rotacije njihala $I\,\ddot{\theta}$ i sa desne strane jednadžbe utjecaj viskoznog trenja na njihalo $-D_\theta\,\dot{\theta}$:

$$m\,l\,\ddot{x}\,\cos(\theta) + m\,l^2\,\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\sin(\theta) + I\,\ddot{\theta} = -D_\theta\,\dot{\theta},$$

grupiranjem izraza uz varijablu $\ddot{\theta}$, dobiva se druga jednadžba dinamičkog modela krana:

$$m\,l\,\ddot{x}\,\cos(\theta) + \left(I + m\,l^2\right)\,\ddot{\theta} + m\,g\,l\,\sin(\theta) = -D_\theta\,\dot{\theta}. \tag{2.38}$$

Jednadžbe (2.35) i (2.38) iste su kao i jednadžbe (2.21) i (2.22), čime je potvrđena točnost dobivenog dinamičkog modela krana.

3. Linearizirani dinamički model krana

Za uspješnu sintezu linearnih regulatora, potrebno je dinamički sustav prikazati u prostoru stanju. Prostor stanja matematički je model fizičkog sustava koji ima određen broj ulaza, izlaza i varijabli međusobno povezanih difernecijalnim jednadžbama prvog reda [9]. Osnovna forma vremenski invarijantnog prostora stanja linearnog sustava sa ulazima p, izlazima q i stanjima n zadana je formom ispod:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t), \tag{3.2}$$

gdje su:

$\mathbf{x}(t)$	- vektor stanja; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$,
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	- derivacija vektora stanja po vremenu; $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}$,
$\mathbf{y}(t)$	- vektor izlaza; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$,
$\mathbf{u}(t)$	- vektor ulaza; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$,
$\mathbf{A}$	- matrica stanja; $\dim[\mathbf{A}] = n \times n$,
$\mathbf{B}$	- matrica ulaza; $\dim[\mathbf{B}] = n \times p$,
$\mathbf{C}$	- matrica izlaza; $\dim[\mathbf{C}] = q \times n$ i
$\mathbf{D}$	- prijenosna matrica; $\dim[\mathbf{D}] = q \times p$.

Matrice **A**, **B**, **C** i **D** bit će vremenski invarijantne odnosno u sebi neće imati elemente ovisne o vremenu t. Za dobivanje prostora stanja, potrebno je linearizirati dinamički model. Prije nego što se napraviti linearizacija, potrebno je presložiti jednadžbe modela i raspregnuti stanja.

3.1. Rasprezanje jednadžbi za ubrzanja $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$

Nelinearne jednadžbe dinamičkog modela krana (2.21) i (2.22) (ili (2.35) i (2.38)) presložit će se:

$$(M+m)\,\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos(\theta) = -D_x\dot{x} + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) + u, \tag{3.3}$$

$$m\,l\,\ddot{x}\,\cos(\theta) + \left(I + m\,l^2\right)\,\ddot{\theta} = -D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,\sin(\theta). \tag{3.4}$$

Presložene jednadžbe prikazat će se u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M+m & m\,l\,\cos(\theta) \\ m\,l\,\cos(\theta) & \left(I+m\,l^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_x\dot{x} + m\,l\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta) \\ -D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

S ovakvim zapisom matrica bit će zamorno raditi osnovne matematičke operacije. Zato će se pisanje pojednostaviti supstitucijom članova unutar matrica [10]:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + u \\ f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

gdje supstitucijski elementi imaju vrijednosti:

$$K_{11} = M + m, \tag{3.7}$$

$$K_{12}(\theta) = K_{21}(\theta) = m\,l\cos(\theta), \tag{3.8}$$

$$K_{22} = I + m\,l^2, \tag{3.9}$$

$$f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) = -D_{\mathrm{x}}\,\dot{x} + m\,l\,\dot{\theta}^2\sin(\theta), \tag{3.10}$$

$$f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right) = -D_{\theta}\,\dot{\theta} - m\,g\,l\sin(\theta). \tag{3.11}$$

Matrica lijevo od vektora sa elementima $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$, označit će se sa $\mathbf{K}(\theta)$:

$$\mathbf{K}(\theta) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Jednadžba (3.6) s lijeve će se strane pomnožiti sa matricom $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta)\cdot/ \qquad \mathbf{K}(\theta)\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + u \\ f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right) \end{bmatrix},$$

čime se dobiva:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1}(\theta)\begin{bmatrix} f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + u \\ f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right) \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

gdje je $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ inverz matrice $\mathbf{K}(\theta)$. Inverz matrice dobit će se pomoću formule:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Elementi matrice $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ iz jednadžbe (3.12) uvrstit će se u formulu:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta) = \frac{1}{K_{11}\,K_{22} - K_{12}(\theta)\,K_{21}(\theta)}\begin{bmatrix} K_{22} & -K_{12}(\theta) \\ -K_{21}(\theta) & K_{11} \end{bmatrix},$$

gdje se, nakon uvrštavanja člana ispred matrice u matricu, dobiva:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}\,K_{22} - K_{12}(\theta)\,K_{21}(\theta)} & \frac{-K_{12}(\theta)}{K_{11}\,K_{22} - K_{12}(\theta)\,K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)}{K_{11}\,K_{22} - K_{12}(\theta)\,K_{21}(\theta)} & \frac{K_{11}}{K_{11}\,K_{22} - K_{12}(\theta)\,K_{21}(\theta)} \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Dobiveni izraz za inverz $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ uvrstit će se u jednadžbu (3.13):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{-K_{12}(\theta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21(\theta)}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)+u \\ f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Matrice s desne strane će se pomnožiti:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{22}u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{12}(\theta)f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ -\frac{K_{21}(\theta)f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{21}(\theta)u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{11}f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)-K_{12}(\theta)f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{22}u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)+K_{11}f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{21}(\theta)u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

čime se dobivaju raspregnute diferencijalne jednadžbe za horizontalno ubrzanje $\ddot{x}$ i kutno ubrzanje $\ddot{\theta}$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)-K_{12}(\theta)f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)f_1\left(\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)+K_{11}f_2\left(\theta,\dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ -\frac{K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} u. \tag{3.16}$$

Zbog jednostavnijeg zapisa, ovdje će se isto napraviti supstitucija članova:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) \\ h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(\theta) \\ b_2(\theta) \end{bmatrix} u, \tag{3.17}$$

gdje članovi vektora imaju vrijednosti:

$$h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) = \frac{K_{22}f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) - K_{12}(\theta)\, f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)\, K_{21}(\theta)}, \tag{3.18}$$

$$b_1(\theta) = \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)\, K_{21}(\theta)}, \tag{3.19}$$

$$h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) = \frac{-K_{21}(\theta)\, f_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + K_{11}f_2\left(\theta, \dot{\theta}\right)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)\, K_{21}(\theta)}, \tag{3.20}$$

$$b_2(\theta) = -\frac{K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)\, K_{21}(\theta)}. \tag{3.21}$$

Zbog referneciranja, diferencijalne jednadžbe u izrazu (3.17) će se zapisati zasebno:

$$\ddot{x} = h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + b_1(\theta)\, u, \tag{3.22}$$

$$\ddot{\theta} = h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) + b_2(\theta)\, u. \tag{3.23}$$

Sve što sad preostaje je uvrstiti izraze (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) i (3.11), u supstituirane članove vektora (3.18), (3.19), (3.20) i (3.21). Započet će se sa članom $h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) &= \frac{\left(I+ml^2\right)\left(-D_x\dot{x}+ml\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)-ml\cos(\theta)\left(-D_\theta\,\dot{\theta}-mgl\sin(\theta)\right)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-ml\cos(\theta)\cdot ml\cos(\theta)} \\ &= \frac{-\left(I+ml^2\right)D_x\dot{x}+\left(I+ml^2\right)ml\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)+mlD_\theta\,\dot{\theta}\cos(\theta)+m^2gl^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-m^2l^2\cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

gdje se, nakon preslagivanja, dobiva izraz za supstitucijski član $h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$:

$$h_1\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) = \frac{-\left(I+ml^2\right)D_x\dot{x}+mlD_\theta\,\dot{\theta}\cos(\theta)+\left(I+ml^2\right)ml\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)+m^2gl^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{-m^2l^2\cos^2(\theta)+(M+m)\left(I+ml^2\right)}. \tag{3.24}$$

Slijedi raspisivanje člana $b_1(\theta)$:

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \frac{I+ml^2}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-ml\cos(\theta)\cdot ml\cos(\theta)} \\ &= \frac{I+ml^2}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-m^2l^2\cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

čime se dobiva raspisani izraz za supstitucijski član $b_1(\theta)$:

$$b_1(\theta) = \frac{I+ml^2}{-m^2l^2\cos^2(\theta)+(M+m)\left(I+ml^2\right)}. \tag{3.25}$$

Dalje se raspisuje član $h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) &= \frac{-ml\cos(\theta)\left(-D_x\dot{x}+ml\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)+(M+m)\left(-D_\theta\,\dot{\theta}-mgl\sin(\theta)\right)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-ml\cos(\theta)\cdot ml\cos(\theta)} \\ &= \frac{mlD_x\dot{x}\cos(\theta)-m^2l^2\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)-(M+m)D_\theta\,\dot{\theta}-mgl\,(M+m)\sin(\theta)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-m^2l^2\cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

gdje se, nakon preslagivanja, dobivaizraz za supstitucijski član $h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right)$:

$$h_2\left(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right) = \frac{mlD_x\dot{x}\cos(\theta)-(M+m)D_\theta\,\dot{\theta}-m^2l^2\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta)-mgl\,(M+m)\sin(\theta)}{-m^2l^2\cos^2(\theta)+(M+m)\left(I+ml^2\right)}. \tag{3.26}$$

Preostaje još raspisati član $b_2(\theta)$:

$$\begin{aligned} b_2(\theta) &= \frac{-ml\cos(\theta)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-ml\cos(\theta)\cdot ml\cos(\theta)} \\ &= -\frac{ml\cos(\theta)}{(M+m)\left(I+ml^2\right)-m^2l^2\cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

čime se dobiva izraz za supstitucijski član $b_2(\theta)$:

$$b_2(\theta) = -\frac{m\,l\cos(\theta)}{-m^2\,l^2\cos^2(\theta) + (M+m)\,(I+m\,l^2)}. \tag{3.27}$$

Izrazi (3.24) i (3.25) uvrštavaju se u jednadžbu (3.22), dok se izrazi (3.26) i (3.27) uvrštavaju u jednadžbu (3.23) čime se dobivaju rasregnute nelinearne diferencijalne jednadžbe za horizontalno ubrzanje $\ddot{x}$ i kutno ubrzanje $\ddot{x}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = & \frac{-\left(I+m\,l^2\right)D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta}\cos(\theta) + \left(I+m\,l^2\right)m\,l\,\dot{\theta}^2\sin(\theta) + m^2\,g\,l^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{-m^2\,l^2\cos^2(\theta) + (M+m)\,(I+m\,l^2)} \\ & + \frac{I+m\,l^2}{-m^2\,l^2\cos^2(\theta) + (M+m)\,(I+m\,l^2)}\,u,\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} = & \frac{m\,l\,D_x\,\dot{x}\cos(\theta) - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m^2\,l^2\,\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta) - m\,g\,l\,(M+m)\sin(\theta)}{-m^2\,l^2\cos^2(\theta) + (M+m)\,(I+m\,l^2)} \\ & - \frac{m\,l\cos(\theta)}{-m^2\,l^2\cos^2(\theta) + (M+m)\,(I+m\,l^2)}\,u.\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2. Linearizacija nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

Linearizacija je postupak linearne aproksimacije nelinearnih funkcija [11]. Potrebno je linearizirati trigonometrijske funkcije $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ i nelinearan član $\dot{\theta}^2$. Postupak linearizacije napravit će se pomoću Taylorovog reda:

$$f(x) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\,f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\,f''(x_0) + \,...\, + \frac{(x_1 - x_0)^n}{n!}\,f^n(x_0), \tag{3.30}$$

gdje je:

$f(x)$ - funkcija koja se linearizira,

x_0 - vrijednost oko koje se funkcija aproksimira,

x_1 - vrijednost za koju se funkcija aproskimira.

Trigonometrijske funkcije $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ aproksimirat će se oko nule ($x_0 = \theta_0 = 0$). Takva aproksimacija se uzima jer je njihalo u stabilnom stanju kad je kut otklona jednak nuli. Kut otklona za koji se funkcije aproksimiraju bit će izrazito mal ($x_1 = \theta \ll$). Uzet će se samo prva dva člana reda. Ostali članovi su višeg reda i imaju izrazito male vrijednosti pa neće imati veliki utjecaj na aproksimaciju. Taylorov red će onda poprimiti sljedeći oblik:

$$f(\theta) = f(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\,f'(\theta_0). \tag{3.31}$$

Pomoću reduciranog Taylorovog reda prvo će se aproksimirati funkcija $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \sin(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\,\sin'(\theta_0)\\ &= \underbrace{\sin(0)}_{=0} + (\theta - 0)\,\underbrace{\cos(0)}_{=1},\end{aligned}$$

gdje je linearizirani funkcija za trigonometrijsku funkciju $\sin(\theta)$ jednaka:

$$\sin(\theta) = \theta. \tag{3.32}$$

Slijedi linearizacija trigonometrijske funkcije $\cos(\theta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\theta_0) + (\theta - \theta_0)\,\cos'(\theta_0)\\ &= \underbrace{\cos(0)}_{=1} + (\theta - 0)\,\underbrace{(-\sin(0))}_{=0},\end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana funkcija za trigonometrijsku funkciju $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = 1. \tag{3.33}$$

Preostaje još linearizirati član $\dot{\theta}^2$. Uzet će se prepostavka da je kutna brzina jako mala ($\dot{\theta} \ll$). Prateći logiku oko članova višeg reda u Taylorovom redu, kvadrat kutne brzine će biti izrazito mal i neće imati veliki utjecaj na linearnu aproksimaciju. Ovo znači da će imati vrijednost:

$$\dot{\theta}^2 = 0. \tag{3.34}$$

Dobiveni linearizirani izrazi (3.32), (3.33) i (3.34) uvrštavaju se u jednadžbu (3.28):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-\left(I + m\,l^2\right) D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta}\,\overbrace{\cos(\theta)}^{=1} + \left(I + m\,l^2\right) m\,l\,\overbrace{\dot{\theta}^2}^{=0}\,\overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta} + m^2\,g\,l^2\,\overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta}\,\overbrace{\cos(\theta)}^{=1}}{-m^2\,l^2\,\underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)\,(I + m\,l^2)}\\ &\quad + \frac{I + m\,l^2}{-m^2\,l^2\,\underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)\,(I + m\,l^2)}\,u\\ &= \frac{-\left(I + m\,l^2\right) D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta} + m^2\,g\,l^2\,\theta}{-m^2\,l^2 + (M+m)\,(I + m\,l^2)} + \frac{I + m\,l^2}{-m^2\,l^2 + (M+m)\,(I + m\,l^2)}\,u\\ &= \frac{-\left(I + m\,l^2\right) D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta} + m^2\,g\,l^2\,\theta}{-\cancel{m^2\,l^2} + (M+m)\,I + M\,m\,l^2 + \cancel{m^2\,l^2}} + \frac{I + m\,l^2}{-\cancel{m^2\,l^2} + (M+m)\,I + M\,m\,l^2 + \cancel{m^2\,l^2}}\,u,\end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za horizontalno ubrzanje kolica $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{-\left(I + m\,l^2\right) D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta} + m^2\,g\,l^2\,\theta}{(M+m)\,I + M\,m\,l^2} + \frac{I + m\,l^2}{(M+m)\,I + M\,m\,l^2}\,u. \tag{3.35}$$

Za zapis u prostoru stanja, potrebno je raspregnut stanja $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ i θ. Prije toga će se uvesti suspstitucija nazivnika razlomaka v kako bi zapis bio jednostavniji:

$$v = \frac{1}{(M+m)\,I + M\,m\,l^2}. \tag{3.36}$$

Uvrsti li se izraz za v u jednadžbu (3.35) dobit će se:

$$\ddot{x} = \left(-\left(I+m\,l^2\right)D_x\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,\dot{\theta} + m^2\,g\,l^2\,\theta\right)v + \left(I+m\,l^2\right)v\,u,$$

gdje se množenjem zagrade sa v dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za horizontalno ubrzanje kolica $\ddot{x}$ sa raspregnutim stanjima:

$$\ddot{x} = -\left(I+m\,l^2\right)D_x\,v\,\dot{x} + m\,l\,D_\theta\,v\,\dot{\theta} + m^2\,g\,l^2\,v\,\theta + \left(I+m\,l^2\right)v\,u. \tag{3.37}$$

Postupak uvrštavanja lineariziranih članova ponovit će se za jednadžbu (3.29):

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{m\,l\,D_\mathrm{x}\,\dot{x}\overbrace{\cos(\theta)}^{=1} - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m^2\,l^2\overbrace{\dot{\theta}^2}^{=0}\overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta}\overbrace{\cos(\theta)}^{=1} - m\,g\,l\,(M+m)\overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta}}{-m^2\,l^2\underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)\,(I+m\,l^2)} \\
&\quad - \frac{m\,l\overbrace{\cos(\theta)}^{=1}}{-m^2\,l^2\underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)\,(I+m\,l^2)}\,u \\
&= \frac{m\,l\,D_\mathrm{x}\,\dot{x} - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,(M+m)\,\theta}{-m^2\,l^2 + (M+m)\,(I+m\,l^2)} - \frac{m\,l}{-m^2\,l^2 + (M+m)\,(I+m\,l^2)}\,u \\
&= \frac{m\,l\,D_\mathrm{x}\,\dot{x} - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,(M+m)\,\theta}{-\cancel{m^2\,l^2} + (M+m)\,I + M\,m\,l^2 + \cancel{m^2\,l^2}} - \frac{m\,l}{-\cancel{m^2\,l^2} + (M+m)\,I + M\,m\,l^2 + \cancel{m^2\,l^2}}\,u,
\end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za kutno ubrzanje njihala $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{m\,l\,D_\mathrm{x}\,\dot{x} - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,(M+m)\,\theta}{(M+m)\,I + M\,m\,l^2} - \frac{m\,l}{(M+m)\,I + M\,m\,l^2}\,u. \tag{3.38}$$

Uvrštavanjem supstitucijskog izraza v (3.36) u jednadžbu (3.38), dobit će se:

$$\ddot{\theta} = \left(m\,l\,D_\mathrm{x}\,\dot{x} - (M+m)\,D_\theta\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,(M+m)\,\theta\right)v - m\,l\,v\,u, \tag{3.39}$$

gdje se množenjem zagrade sa v dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za kutno ubrzanje njihala $\ddot{\theta}$ sa raspregnutim stanjima:

$$\ddot{\theta} = m\,l\,D_\mathrm{x}\,v\,\dot{x} - (M+m)\,D_\theta\,v\,\dot{\theta} - m\,g\,l\,(M+m)\,v\,\theta - m\,l\,v\,u. \tag{3.40}$$

Budući da su članovi u lineariziranim diferencijalnim jednadžbama za ubrzanja $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ raspregnuti, moguće ih je napisati u obliku prostora stanja. Pomoću jednadžbi (3.1) i (3.2) ispisat će se potrebne matrice i vektori, započevši s vektorom stanja $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

gdje je onda derivacija vektora stanja po vremenu $\dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Matrica stanja **A** dobit će se ispisivanjem članova uz stanja u raspregnutim lineariziranim diferencijelanim jednadžbama (3.37) i (3.40):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(I+ml^2\right) D_\mathrm{x}\, v & m^2 g l^2\, v & \left(I+ml^2\right) v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m l D_\mathrm{x}\, v & -mgl\,(M+m)\, v & -(M+m)\, D_\theta\, v \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Isto tako će se dobiti i matrica **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(I+ml^2\right) v \\ 0 \\ -m l v \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

Vektor izlaza $\mathbf{y}(t)$ bit će:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Matrica izlaza **C** bit će:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Prijenosna matrica **D** bit će:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

jer nema nikakvog prijenosnog djelovanja upravljačke varijable u. Vektor ulaza $\mathbf{u}(t)$ bit će:

$$\mathbf{u}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

S obzirom da matrica $\mathbf{u}(t)$ ima samo jedan član u sebi, poprimit će oblik $u(t)$. Konačni oblik zapisa prostora stanja će onda biti:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t), \tag{3.49}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t). \tag{3.50}$$

Dobivanjem prostora stanja, ispunjen je uvjet za uspješnu sintezu regulatora. U sklopu svakog grafičkog prikaza istodobno će se prikazati regulacija linearnog i nelinearnog dinamičkog modela krana. Tako će se puno lakše i jednostavnije prikazati razlike u djelovanju različitih regulatora.

4. Linearne metode regulacije krana

Postupak sinteze regulatora i simulacije regulacije napravljeni su pomoću programskog paketa *MATLAB*. Glavni program i funkcije potrebne za rad programa nalaze se u prilogu rada. Komentarima su naznačeni segmenti koji se odnose na pojedine regulacije.

Kako bi se napravila simulacija, potrebno je postaviti parametre modela. Najjednostavnije je pronaći realne parametre u literaturi [12] i prikazati ih tablicom.

Tablica 1: Tablica parametara

M	1,0731 kg
m	0,23 kg
g	9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
D_x	5,4 $\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}$
D_θ	0,0024 $\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}$
l	0,3302 m

4.1. Upravljivost i mjerljivost

Prije regulacije bilo kojeg modela, potrebno je provjeriti svojstva upravljivosti (eng. *controllability*) i mjerljivosti (eng. *observability*).

Zadovoljena upravljivost značit će mogućnost dovođenja svih stanja od trenutne vrijednosti do željene vrijednosti u nekom konačnom vremenskom intervalu. Uvijet potpune upravljivosti po stanjima linearnih sustava [13]:

$$\text{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} = n, \tag{4.1}$$

gdje je n broj stanja u dinamičkom sustavu. Ovo će se u programskom paketu *MATLAB* dobiti pomoću naredbe [14]:

```
rank(ctrb(A,B)).
```

Ako je rezultat naredbe `rank()` jednak n, sva stanja sustava upravljiva su u svakom trenutku. Pokretanjem naredbe dobit će se:

```
>> rank(ctrb(A,B))

ans =

     4.
```

S obzirom da je rezultat naredbe četiri, što je jedanko broju stanja n, može se zaključiti da je dinamički model u potpunosti upravljiv.

Zadovoljena mjerljivost ukazuje na mogućnost pretpostavke vrijednosti stanja sustava za svaki trenutak na temelju izlaznih vrijednosti stanja. Potvrđuje da poznavanje izlazne putanje daje dovoljno informacija za točno predviđanje vrijednosti stanja sustava. Uvijet potpune mjerljivosti po stanjima linearnih sustava [13]:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{2} & \dots & \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{n-1}\end{bmatrix} = n \tag{4.2}$$

U *MATLAB*-u će se ovo dobiti pomoću naredbe [15]:

```
rank(obs(A,C)).
```

Ako je rezultat ove naredbe jednak n onda je mjerljivost zadovoljena. Pokretanjem naredbe dobit će se:

```
>> rank(obsv(A,C))

ans =

        4.
```

Kao i u slučaju upravljivosti, rezultat naredbe je četiri, što znači da je dinamički model u potpunosti mjerljiv. S tom potvrdom, može se započeti sa sintezom regulatora.

4.2. Odzivi sustava bez regulacije

Prije regulacije bilo kojeg dinamičkog modela, potrebno je provjeriti kako će se model ponašati bez prisutnosti ikakve regulacije. Ovo će se napraviti tako da se njihalo pomakne za proizvoljan kut i pusti da se slobodno njiše. Postavit će se da kut otklona θ iznosi:

$$\theta = 30^\circ. \tag{4.3}$$

To znači da će matrica početnih uvjeta imati oblik:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\pi}{6} & 0\end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

gdje će nule predstavljati početne uvjete ostalih stanja; horizontalni položaj kolica x, horizontalna brizna kolica $\dot{x}$ i kutna brzina θ. Kutovi i kutne brzine se u jednadžbe dinamičkog modela uvrštavaju isključivo u radijanima, zbog čega je kut u početnim uvjetima zapisan sa $\frac{\pi}{6}$. Zbog lakšeg razumijevanja, odzivi kutova i kutnog ubrzanja u grafovima će biti prikazani u stupnjevima (°, °/s). Za postavljeni kut otklona, prikazat će se simulacija slobodnog njihala u trajanju od 10 sekundi. Tijekom simulacije će se pratiti sva stanja sustava. Uz to će se prikazati i graf za upravljačku varijbalu u. Njen iznos će u ovom slučaju uvijek biti jednak nuli jer regulacija nije prisutna, odnosno vektor pojačanja **K** ima vrijednosti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

dok formula za vrijednost upravljačke varijalbe u kod linearne regulacije glasi:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + w(t), \tag{4.6}$$

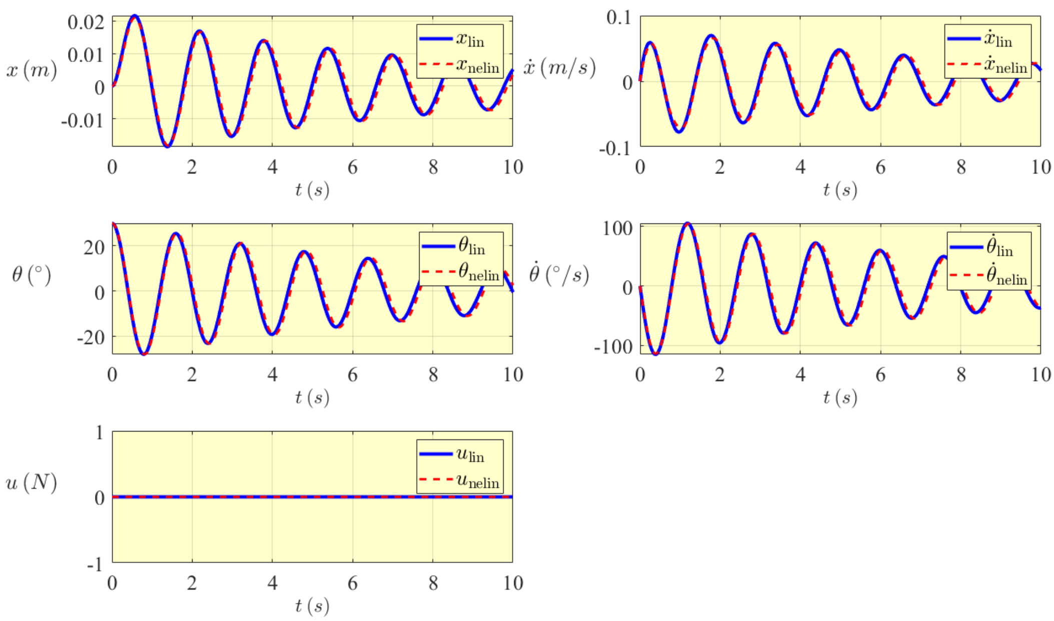
gdje je:

$w(t)$ - referentni vektor vođenja.

Za slučaju regulacije modela krana, referentni vektor vođenja iznosit će:

$$w(t) = 0 \tag{4.7}$$

U svakom od grafova će biti nacrtane dvije krivulje; jedna za odziv regulacije linearanog dinamičkog modela, a druga za odziv regulacije nelinearnog dinamičkog modela. Legendom će se naznačiti koja se krivulja odnosni na koji slučaj. Pokretanjem programa za pojačanje **K** (4.5) dobit će se simulacija slobodnog njihanja.



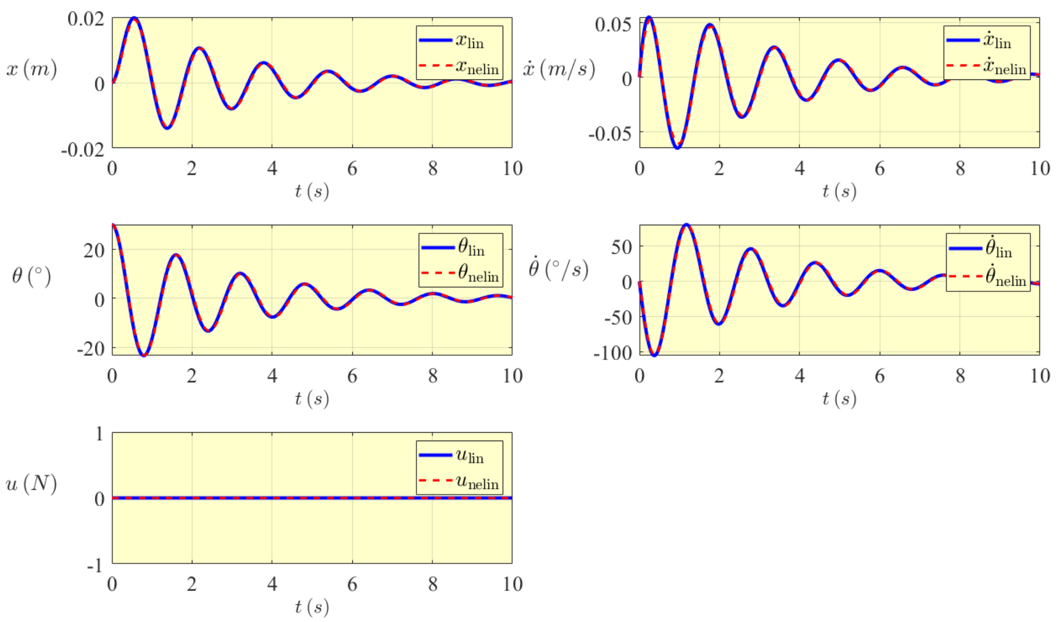
Slika 5: Odzivi nereguliranog dinamičkog modela krana; $\theta = 30°$, $D_\theta = 0,0024$ N · m · s · rad^{-1}

Nakon puštanja njihala, masa m će svojim kretanjem sinusoidno pomicati kolica, što se i vidi u grafu za horizontalni položaj x. Kako vrijeme prolazi, amplitude oscilacije njihala su sve manje zbog utjecaja gravitacije. Može se zaključiti da će se nakon nekog vremena njihalo u potpunosti smiriti.

Primjetit će se da postoji malo odstupanje između odziva linearnog i nelinearnog modela. Budući da se sustav linearizirao oko izrazito malih vrijednosti, za veliki kut otklona razlike u odzivima modela postat će zamijetne. S obzirom da se u sklopu regulacije neće postavljati početni uvjet otklona kuta, već će se samo postaviti početni horizontalni položaj, ovo neće predstavljati problem. Razlog velikom broju oscilacija je nizak koeficijent viskoznog trenja za njihalo D_θ. Koficijent viskoznog trenja će se povećati za deset puta:

$$D_\theta = 0,024\,\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}, \tag{4.8}$$

Pokretanjem programa za podešen koeficijent viskoznog trenja za njihalo D_θ (4.8) dobit će se odzivi koji će se stabilizirati u kraćem vremenskom periodu.



Slika 6: Odzivi nereguliranog dinamičkog modela krana; $\theta = 30^\circ$, $D_\theta = 0,024\,\mathrm{N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}}$

U ovom slučaju će oscilacije njihala biti znatno manje. Ovim se željelo pokazati koliko je bitno uračunati viskozno trenje u dinamički model krana. Za sve tipove regulacije nadalje u radu, koristit će se parametri zadani u tablici 1.

4.3. Sinteza regulatora metodom podešavanja polova

Cilj sinteze regulatora metodom podešavanja polova je određivanje matrice pojačanja **K**, tako da rješenje karakteristične jednadžbe budu željeni korijeni (polovi) sustava [13]:

$$\det(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\,\mathbf{K}) = (\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\ \ldots\ (\lambda-\lambda_n) \tag{4.9}$$

Budući da će se vrijednosti polova dobivati iterativnim postupkom, postavit će se da su svi polovi jednaki. Matrica polova **p** bit će zadana izrazom:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}, \qquad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 < 0. \tag{4.10}$$

Za dobivanje matrice pojačanja **K** u *MATLAB*-u će se koristiti naredba [16]:

```
K = acker(A,B,p),
```

koja daje pojačanje regulatora pomoću Ackermann-ove formule. Zbog lakšeg uspoređivanja odziva različitih tipova regulacije, postavit će se uvjeti podešavanja parametara regulicije:

1. Kolica se moraju vratiti u ishodište ($x = 0$) za ≈ 3 sekunde.
2. Maksimalan iznos upravljačke varijable u mora biti istog reda veličine za svaki tip regulacije; između -5 i -10 N.

Na taj način će se moći lakše uspoređivati odzivi ostalih stanja. Iterativnim postupkom pronać će se zadovoljavajući set polova za ispunjene uvjete:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3.25 & -3.25 & -3.25 & -3.25 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

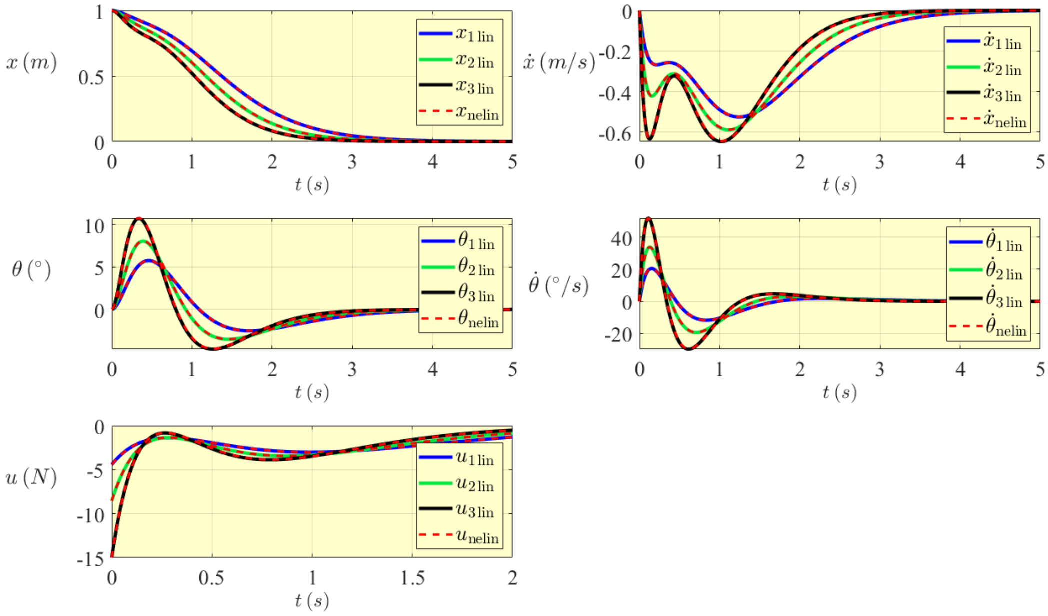
Sa svrhom boljeg prikaza kako odabir polova utječe na odzive, grafički će se na istom grafu prikazati tri slučaja:

$$\mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} -2.75 & -2.75 & -2.75 & -2.75 \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} -3.25 & -3.25 & -3.25 & -3.25 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{p_3} = \begin{bmatrix} -3.75 & -3.75 & -3.5 & -3.75 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Pokretanjem programa dobit će se graf odziva za tri slučaja metode podešavanja polova:



Slika 7: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog metodom podešavanja polova

Iz grafova se vidi da je pomicanje polova imalo mal utjecaj na promjenu horizontalnog položaja x. Najveće razlike se zamjećuju kod brzina $\dot{x}$ i $\dot{\theta}$, kod kuta otklona θ i upravljačke varijable u. Pomicanjem polova u desno smanjit će se amplituda oscilacije njihala kao i maksimalna vrijednost upravljačke varijable. Pomicanjem polova u lijevo te će se vrijednosti povećati. Poštujući zadane uvjete, kao idealan slučaj će se uzeti slučaj u kojem su odabrani polovi $\mathbf{p_2}$. U idućem potpoglavlju će se pokušati dobiti slični grafovi sintezom LQR-a.

4.4. Sinteza LQR regulatora

LQR (eng. *Linear Quadratic Regulation*) ili linearna kvardatična regulacija tip je regulacije u kojoj se postavke regulatora dobivaju rješavanjem problema optimalnog upravljanja [17]:

$$J = \int_0^\infty \left[\mathbf{x}(t)^T\,\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\,\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right]\mathrm{d}t, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0\,, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succeq 0, \tag{4.15}$$

gdje su:

Q - matrica težinskih faktora stanja linearnog kvadratičnog regulatora; $\dim[\mathbf{Q}] = n \times n$ i

R - matrica težinskih faktora ulaza linearnog kvadratičnog regulatora; $\dim[\mathbf{R}] = p \times p$

Parametri unutar matrice **Q** će svi bit nula osim na pozicijama $\mathbf{Q}(1,1)$ i $\mathbf{Q}(3,3)$. Dijagonala će predstavljati težinske faktore stanje, gdje vrijednost na poziciji $\mathbf{Q}(1,1)$ predstavlja težinski faktor horizontalnog položaja x. Spuštajući se dijagonalom, faktora će se odnositi na horizontalnu brzinu $\dot{x}$, kut oktlona θ i kutnu brzinu $\dot{\theta}$ tim redoslijedom. Što je težinski faktor veći, time će se stanje definirano tim članom brže kretati u nulu. Iterativno će se dobiti vrijednosti parametara za postavljene uvjete:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Težinska matrica **R** odnosni se na upravljačku varijablu u. Povećanjem vrijednosti težinskih faktora smanjit će se maksimalna vrijednost upravljačke varijable u, a smanjenjem parametra će se povećati. Zbog jednostavnosti postavit će se da je **R** jednak:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

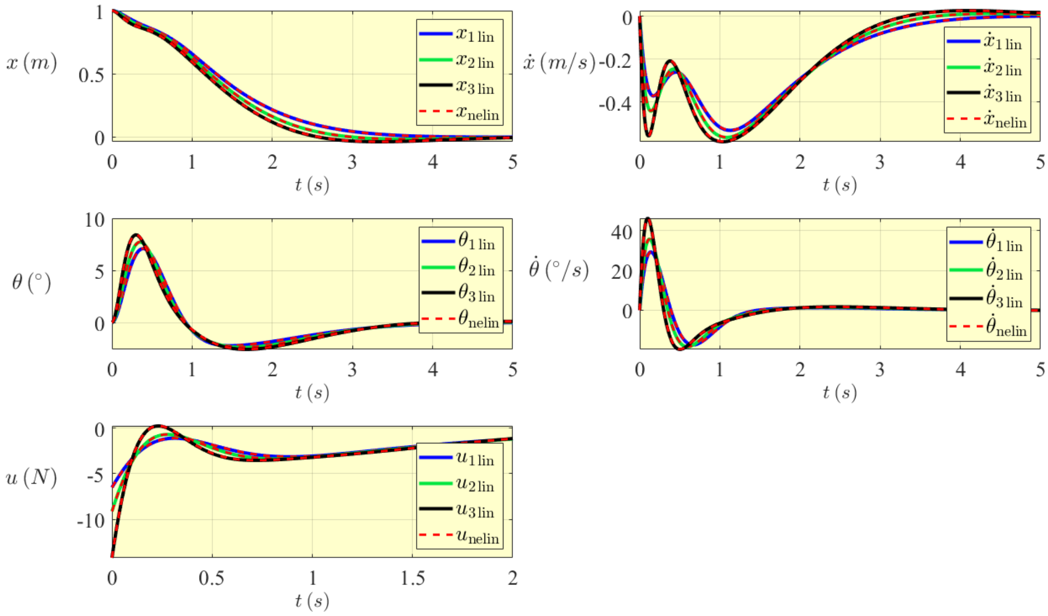
Težinska matrica **R** ima samo jedan parametar, stoga je točan zapis R, no da ne bi došlo do zabune ostavit će se matrični zapis. Naredba u *MATLAB*-u za dobivanje matrice pojačanja **K** je [18]:

```
K = lqr(A,B,Q,R).
```

Za bolji prikaz utjecaja težinskih faktora istovremeno će se prikazati odzivi za tri različite težinske matrice **Q**:

$$\mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Težinska matrica **R** će ostati ista za svaki slučaj (4.17). Pokretanjem programa za postavljene težinske matrice **Q**, dobiva se odziv za tri slučaja LQR-a:



Slika 8: Odziv dinamičkog modela krana reguliranog LQR-om

Odzivi za ova tri slučaju su gotovo identični odzivima kod regulacije metodom podešavanja polova. Jedina bitnija razlika je što se odzivi za kut otklona θ ne razlikuju kao kod metode podešavanja polova. Povećanjem parametara, maksimalna amplituda kuta otklona θ se povećava. Apsolutna vrijednost upravljačke varijable u će biti također biti veća što su parametri težinske matrice **Q** veći. Može se zaključiti da je povećanje težinskih parametara ekvivalentno pomicanju polova u lijevo kod metode podešavanja polova.

Ove metode funkcioniraju s pretpostavkom da su sva stanja mjerljiva. Treba podsjetiti da matrica izlaza **C** (3.46) ukazuje da su mjerljivi samo horizontalni položaj x i kut otklona θ. U idućem potpoglavlju će se provjeriti je li moguće upravljati sustavom na temelju poznavanja samo dva stanja.

4.5. Observer stanja

Osnovna ideja observera stanja je da na temelju mjerenja vektora izlaza **y** (3.50) asimptotski estimira vektor stanja **x**. Jednaždbe observera stanja je:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\left(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right), \tag{4.19}$$

gdje su:

$\hat{\mathbf{x}}(t)$	- vektor estimiranih stanja; $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$,
$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$	- derivacija vektora estimiranih stanja po vremenu; $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t}$ i
$\mathbf{L}$	- matrica pojačanja regulatora kod observera.

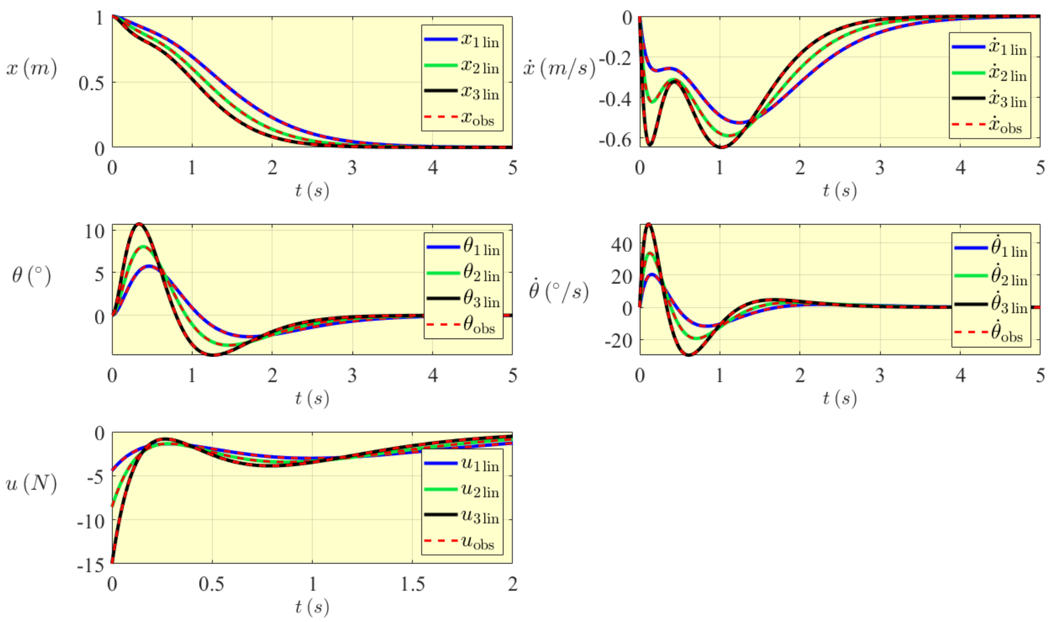
Upravljačka varijabla u kod observera će biti definira jednadžbom:

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{4.20}$$

Matrica pojačanja regulatora kod observer se u *MALTAB*-u također dobiva pomoću naredbe `lqr()`, s time da su parametri unutar zagrada drukčiji:

```
L = lqr(A',C',Q,R)',
```

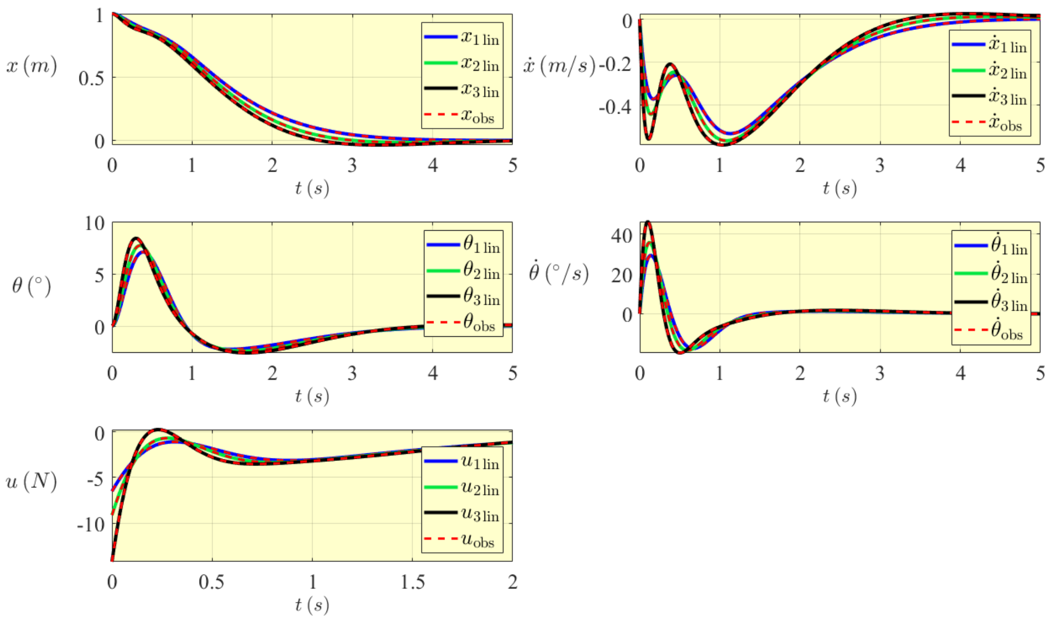
gdje znak `'` predstavlja transponiranu matricu. Observer će se prvo upotrijebiti se metodom sinteze regulatora podešavanjem polova za matricu izlaza **C** zadanu izrazom (3.46).



Slika 9: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog metodom podešavanja polova sa observerom

U slučaju regulacije sa observerom stanja, iscrtkana crvena linija predstavlja aproksimiran odziv, te je zbog toga u legendi označena sa $_{obs}$. Usporede li se slike 7 i 9, primjetit će se da su odzivi identični. Ovo znači da je pomoću observera stanja moguće aproksimirati odzive horizontalne brzine $\dot{x}$ i kutne brzine $\dot{\theta}$ na temelju poznavanja vrijednosti horizontalnog položaja x i kuta otklona θ.

Za isti slučaj matrice izlaz $\mathbf{C}$ iz izraza (3.46), napravit će se simulacija odziva sa LQR-om uz prisutnost observera stanja.



Slika 10: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog LQR-om sa observerom stanja

Usporede li slike 8 i 10 može se zaključiti da su i one identične, što znaći da je i u ovom slučaju pomoću observera stanja moguće aproksimirati odzive horizontalne brzine $\dot{x}$ i kutne brzine $\dot{\theta}$ na temelju poznavanja vrijednosti horizontalnog položaja x i kuta otklona θ. S obzirom da su oba regulatora linearna i rade na isti način (4.6), bilo je za očekivati da će biti moguće napraviti adekvatnu aproksimaciju pomoću observera stanja.

Odzivi reguliranih nelinearnih dinamičkih sustava sa observerom se neće prikazati. U prošla dva potpoglavlja se pokazalo da odzivi linearnog i nelinearnog dinamičkog modela krana prate jedni druge. Ovo znači da bi se dobili praktički identični grafovi kao na slikama 9 i 10.

5. Nelinearne robusne metode regulacije krana

U stvarnom svijetu česta su pojava poremećaji. Poremećaj može u ovom slučaju biti vjetar koji puše u određenim intervalima. Iduće potpoglavlje testirat će najbolje slučajeve parametara sinteze regulatora u slučaju prisutnosti sinusoidnog poremećaja. Jednadžbe stanja uz prisutnost poremećaja poprimit će oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,(u(t) + d(t)), \tag{5.1}$$

gdje je:

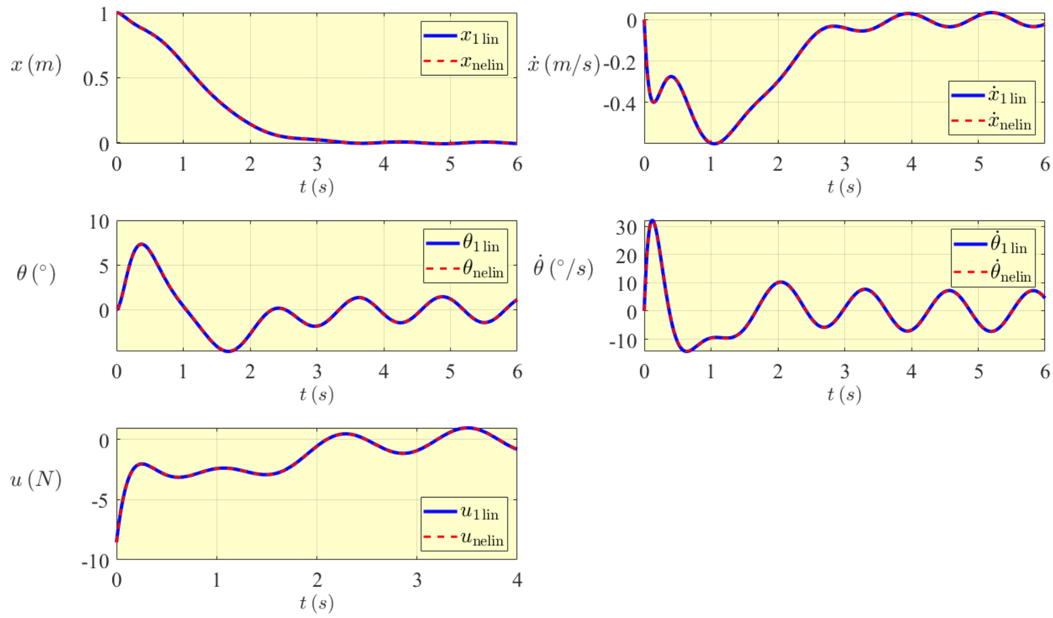
$d(t)$ - ukupni poremećaj koji djeluje na sustav.

Za ovaj slučaj, postavit će se da je dan izrazom:

$$d(t) = \sin(5t). \tag{5.2}$$

5.1. Utjecaj poremećaja na linearne regulacijske sustave

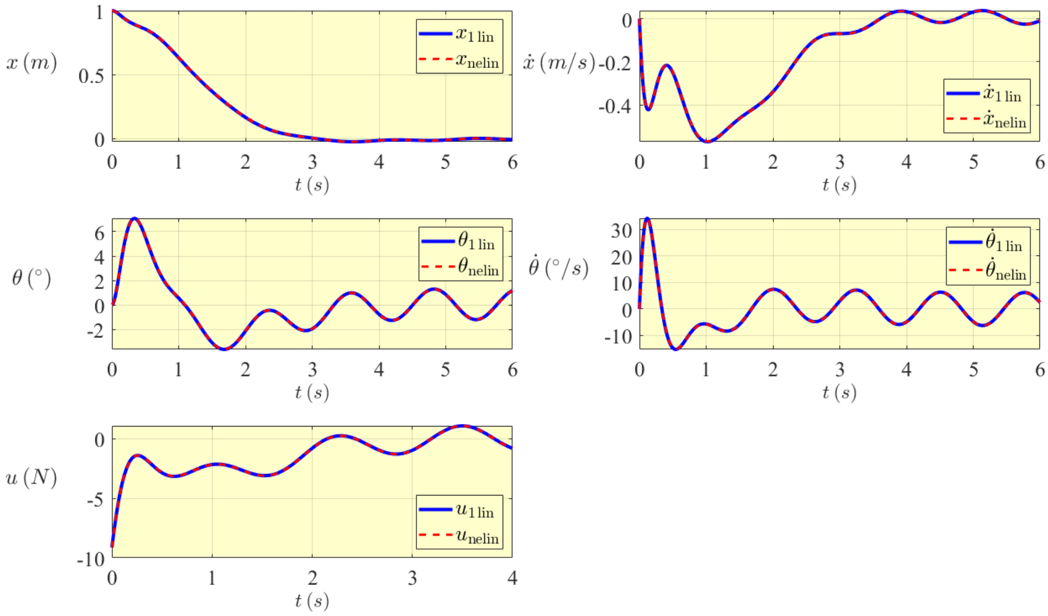
Utjecaj poremećaja testirat će se na linearnim regulatorima. Započet će se sa dinamičkim modelom krana reguliranim metodom podešavanja polova i to za slučaj gdje su polovi dani matricom $\mathbf{p_2}$ (4.13). Vrijeme simulacije će se produžiti, kako bi se bolje prikazao utjecaj poremećaja na odzive. Nakon podešenja parametara, pokreće se program.



Slika 11: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog metodom podešavanja polova uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$

Iz grafova se vidi da linearni regulator dobiven metodom podešavanja polova nije umogućnosti protubalancirati utjecaj poremećaja na sustav. U svakom od grafova se vidi sunusoidni utjecaj na sustav. U grafu upravljačke varijable u se vidi da regulator pokušava prevagnuti utjecaj sinusoide no u tome ipak ne uspjeva.

Isti postupak će se ponoviti za LQR. Uzet će se parametri dani matricama $\mathbf{Q_2}$ (4.18) i $\mathbf{R}$ (4.17). I ovdje će se simulacija produljiti kako bi se bolje prikazao utjecaj poremećaja na odzive. Parametri će se podesiti i pokrenut će se program.



Slika 12: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog sa LQR-om; $d\,(t) = \sin(5\,t)$

Odzivi na slikama 11 i 12 su skoro identični. I u slučaju LQR-a, regulator neće moći prigušiti utjecaj sinusoidnog poremećaja. Za sustave u kojima je prisutan poremećaj, koristit će se nelinearni regulatori. Njihova sinteza i odzivi će se objasniti i prikazati u narednim potpotpoglavljima.

5.2. Robusni nelinearni regulator

Realni dinamčki model krana opisan jednadžbom [19]:

$$\dot{\mathbf{x}}\,(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{B}\,\left(u\,(t) + f\,(\mathbf{x}\,(t)) + d_{\mathrm{ext}}\,(t)\right), \tag{5.3}$$

gdje je:

$f\,(\mathbf{x}\,(t))$ - nepoznata funkcija koja reprezentira nemodeliranu dinamiku modela i

$d_{\mathrm{ext}}\,(t)$ - vanjski poremećaj.

Funkcija $f(\mathbf{x}(t))$ zapravo je nelinearni dio dinamičkog modela koji je u slučaju modela krana zanemaren jer je izrazito mali. Za sumu nemodelirane dinamike modela i vanjskog poremećaja mora vrijediti:

$$|\underbrace{f(\mathbf{x}(t)) + d_{\text{ext}}(t)}_{=d(t)}| \leq \rho, \tag{5.4}$$

gdje je:

ρ - pojačanje robusnog nelinearnog regulatora.

Upravljačka varijabla $u(t)$ će u ovom slučaju imati dvije komponenete:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + u_{\text{R}}(t), \tag{5.5}$$

gdje je:

$u_{\text{R}}(t)$ - nelinearni član regulatora.

Član $u_{\text{R}}(t)$ opisan je jednadžbom [19]:

$$u_{\text{R}}(t) = -\rho \frac{\mathbf{B}^{\text{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{B}^{\text{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}(t)| + \varepsilon}, \tag{5.6}$$

gdje je parametar ε dodan kako bi se izbjegla singularnost (nula u nazivniku). Matrica **P** određena je rješavanjem Lyapunovljeve jednadžbe:

$$\mathbf{A}_{\text{cl}}{}^{\text{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{\text{cl}} = -\mathbf{Q}, \tag{5.7}$$

gdje je:

$\mathbf{A}_{\text{cl}}$ - matrica zatvorenog kruga,

zadana izrazom:

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}. \tag{5.8}$$

Težinska matrica **Q** ovdje će imati drukčije težinske parametre jer se radi o potpuno drukčijem dizajnu regulatora:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Za dobivanje matrice **P** u *MATLAB*-u koristit će se naredba [20]:

```
P = lyap(Ar',Q).
```

Pojačanje linearnog dijela regulatora **K** u *MATLAB*-u će se dobit na identičan način kao i pojačanje kod LQR-a:

```
K = lqr(A,B,Q,R),
```

gdje će matrica **R** biti zadana sa vrijednosti:

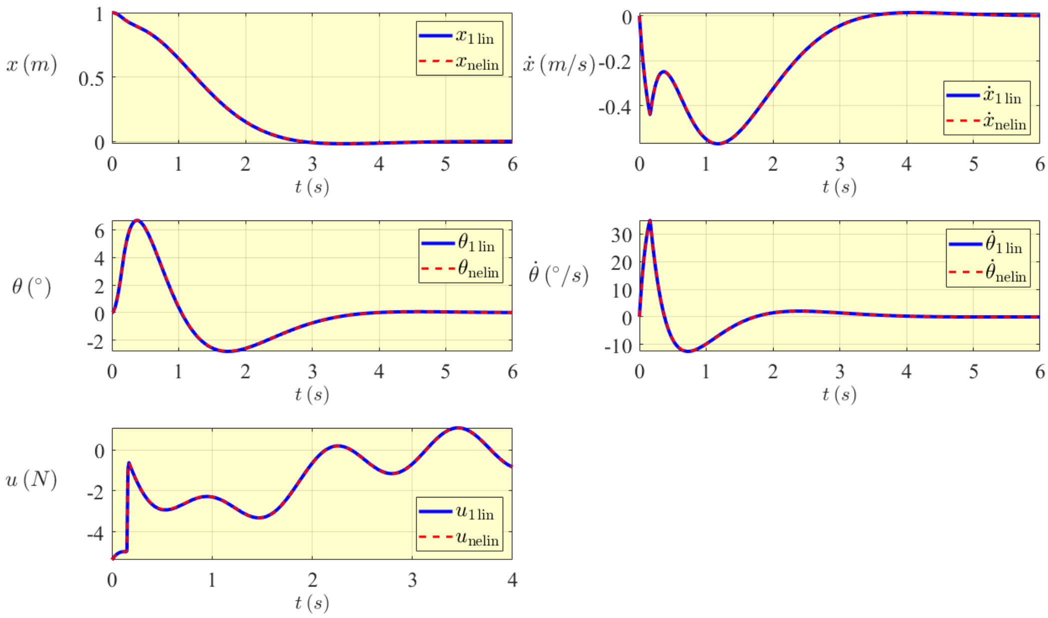
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Pojačanje ρ iznosit će:

$$\rho = 5, \tag{5.11}$$

dok će parametar ε iznositi:

$$\varepsilon = 0.001. \tag{5.12}$$



Slika 13: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog nelinearnim robusnim regulatorom uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5\,t)$

Za slučaj robusnog nelinearnog regulatora, poremećaj će biti prevladan. Iz grafa za odziv upravljačke varijable $u(t)$ vidi se sinusoidno djelovanje regulatora, koje uspješno prigušuje djelovanje sinusoidnog poremećaja. Stanja reguliranog dinamičkog modela krana se u kratkom vremenu stabiliziraju u nulu čime je regulacija uspješna.

5.3. Robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada

Sinteza regulatora s kliznim režimom rada započinje podjelom matrice ulaza **B** na način [21]:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

gdje su dimenzije matrica $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$:

$$\mathbf{B}_1 = (n-m) \times m, \qquad \dim\left[\mathbf{B}_2\right] = m \times m, \tag{5.14}$$

za $n = 4$ i $m = 1$. Uvodi se matrica transformacija **T**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2{}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_2{}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

gdje vrijedi:

$$\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, \qquad \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{m}. \tag{5.16}$$

Matrica transformacija **T** transformirat će matricu stanja **A** i matricu ulaza **A**:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{tr}} = \mathbf{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}^{-1}, \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{tr}} = \mathbf{T}\,\mathbf{B}, \tag{5.17}$$

tako da će jednaždbe stanja linearnog dinamičkog modela krana (3.49) prijeći u takozvani normalni oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{x}_2(t), \tag{5.18}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t), \tag{5.19}$$

gdje su matrice $\mathbf{A}_{ij}$ zadane kao:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{\mathrm{tr}}(1:3, 1:3), \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{\mathrm{tr}}(1:3, 4), \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{\mathrm{tr}}(4, 1:3), \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{\mathrm{tr}}(4, 4). \tag{5.20}$$

Klizna površina matematički je opisana izrazom:

$$s = \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}_1(t), \tag{5.21}$$

Upravljačka varijabla $u(t)$ imat će linearni i nelinearni dio. Prvi korak u dobivanju linearnog dijela bit će preslagivanje jednadžbe (5.21):

$$\mathbf{x}_2(t) = s - \mathbf{K}\,\mathbf{x}_1(t). \tag{5.22}$$

Jednadžba (5.22) uvrstit će se u jednadžbu (5.18), čime se dobiva:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}(s - \mathbf{K}\mathbf{x}_1(t)), \tag{5.23}$$

koju je potrebno raspisati i presložiti:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}s - \mathbf{A}_{12}\mathbf{K}\mathbf{x}_1(t)\\ &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{K})\,\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}s,\end{aligned} \tag{5.24}$$

čime se dobiva izraz:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}s, \tag{5.25}$$

gdje je:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{cl}} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{K}. \tag{5.26}$$

Izraz u jednadžbi (5.22) potrebno je derivirati:

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \dot{s} - \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}_1(t), \tag{5.27}$$

i onda uvrstiti u jednadžbu (5.19):

$$\dot{s} - \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t). \tag{5.28}$$

Izraz (5.25) će se zatim uvrstiti u jednaždbu (5.28) koja će se presložiti na način da se dobije izraz za $\dot{s}$:

$$\dot{s} - \mathbf{K}(\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}s) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t),$$

čime se dobiva raspisan izraz za $\dot{s}$:

$$\dot{s} = (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{cl}})\,\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}s + u(t) + d(t). \tag{5.29}$$

Odabire se dinamika upravljačke varijable $u(t)$:

$$u(t) = -(\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{cl}})\,\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}s + u_{\mathrm{R}}(t). \tag{5.30}$$

Uvrštavanjem izraza (5.30) u jednadžbu (5.29), dobiva se dinamika zatvorenog kruga:

$$\dot{s} = u_{\mathrm{R}}(t) + d(t). \tag{5.31}$$

Nelinearni dio upravljačke varijable $u_{\mathrm{R}}(t)$ zadan je izrazom:

$$u_{\mathrm{R}}(t) = -\rho\,\mathrm{sign}(s), \tag{5.32}$$

gdje je $\mathrm{sign}(s)$ funkcija nekontinuirana za $s = 0$. Zbog toga će se funkcija $\mathrm{sign}(s)$ aproksimirati:

$$\mathrm{sign}(s) = \tanh(10s). \tag{5.33}$$

Izraz (5.33) uvrstit će se u izraz (5.32) čime se dobiva:

$$u_{\mathrm{R}}(t) = -\rho \tanh(10s). \tag{5.34}$$

Novi izraz za nelinearni dio upravljačke varijable $u_{\mathrm{R}}(t)$ (5.34) uvrstit će se u jednadžbu (5.30):

$$u(t) = -(\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{cl}})\,\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}\,s - \rho \tanh(10s), \tag{5.35}$$

nakon čega se dobiva konačni oblik upravljačke varijable $u(t)$ za robusni nelinarni regulator s kliznim režimom rada. Matrica pojačanja **K** će se u *MATLAB*-u dobiti pomoću naredbe:

```
K = acker(A,B,p).
```

Iterativnim postupkom će se dobiti matrica polova **p** koja će zadovoljiti postavljene uvjete:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -6,3 & -6,3 & -6,3 \end{bmatrix}. \tag{5.36}$$

Iz dinamike zatvorenog kruga opisane jednadžbom (5.31), slijedi uvjet za pojačanje:

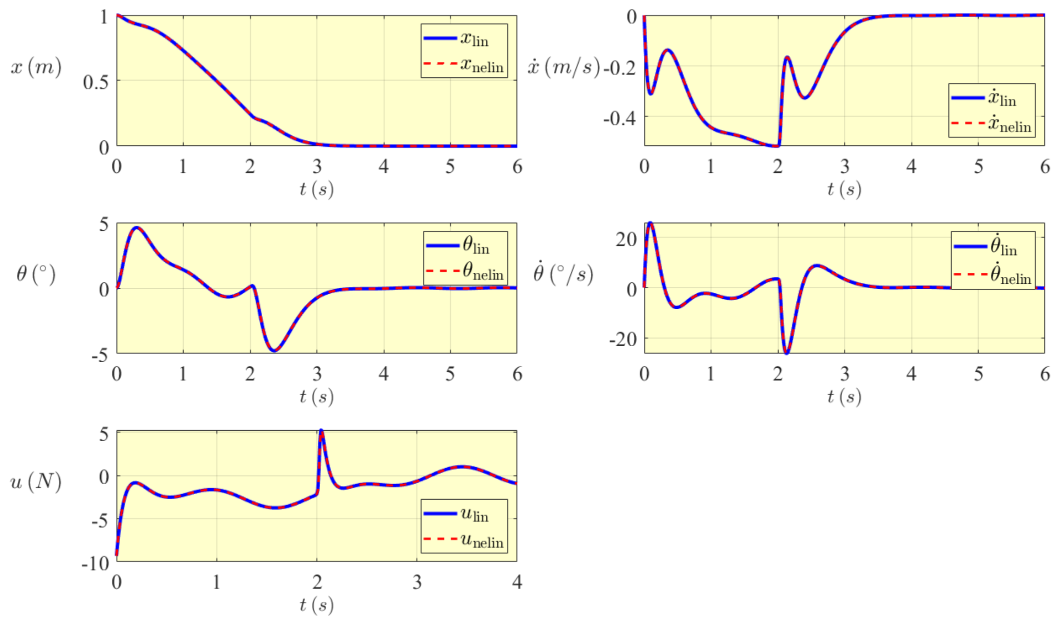
$$\rho > |d(t)|. \tag{5.37}$$

Drugim riječima, pojačanje treba biti veće od maksimalne amplitude totalno poremećaja $d(t)$. Za simuliranje će se koristiti pojačanje:

$$\rho = 10, \tag{5.38}$$

koje je veće od amplitude sinusnog poremećaja (5.2).

Nakon podešavanja parametara, pokreće se program.



Slika 14: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom sa kliznim režimom rada uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$

Odzivi stanja će u slučaju ove regulacije biti iznimno različite prirode naspram odziva prijašnjih regulacija. Ovdje će se u odzivima svakog stanja, osim horizontalnog položaja x, vidjeti nagli pomak u iznimno kratkom vremenskom intervalu. To je djelovanje kliznog režima, koji naglo prepravlja razliku između stvarnih i željenih vrijednosti. Usprkos tome, uvjeti su zadovoljeni i maksimalne amplitude otklona njihala su manje u odnosu na prijašnje slučajeve. Uz to, djelovanje regulatora uspješno će prevladati poremećaj $d(t)$ i stabilizirati sustav.

Na početku poglavlja postavili su se parametri. Radi se o nominalnim vrijednostima, za koje se uzela pretpostavka da su poznati i točni. Pitanje je što će se dogoditi ako na primjer ovješen teret m nije poznat.

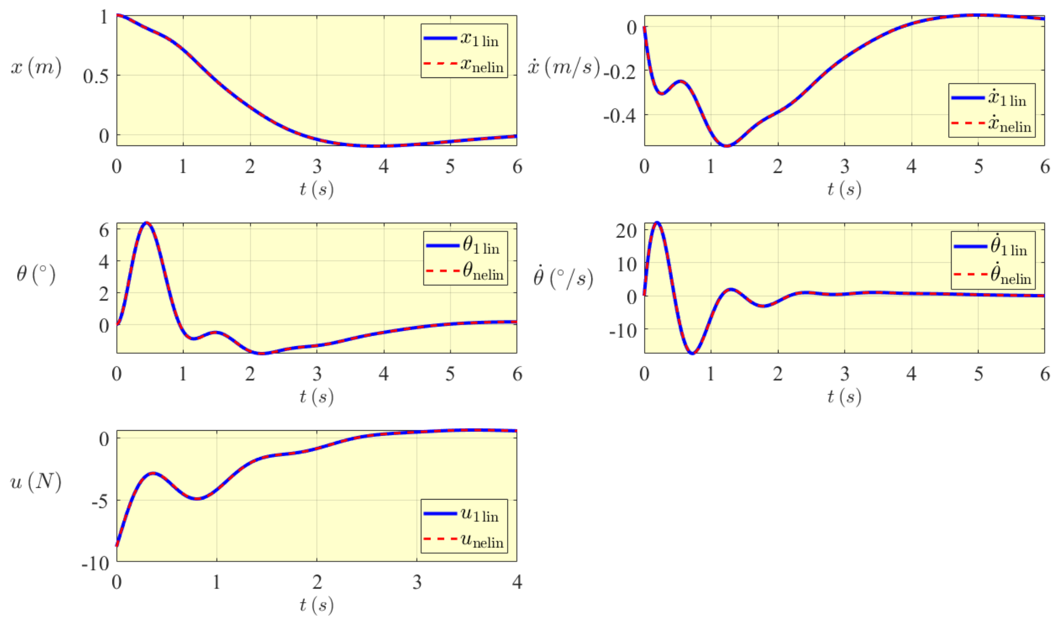
5.4. Uspoređivanje performansi regulatora za slučaj nepoznate mase ovješenog tereta

Neprecizno poznavanje znači da nije poznata točna vrijednost nekog parametra. U ovom slučaju, pretpostavit će se da se točno ne poznaje masa ovješenog tereta m. Njena nominalna vrijednost dana je u tablici 1. Već sintezirani regulatori, koji su se napravili za ovješen teret mase m, koristit će se za ovješen teret ≈ 20 puta veće mase. Ovo znači da će nova vrijednost ovješene mase m biti:

$$m \approx 4,6\text{kg} \tag{5.39}$$

Performanse će se uspoređivati zasebno za svaki graf. Grafovi odziva za modificiranu masu uspoređivat će se sa grafovima dobivenima pripadajućem tipu regulacije bez prisutnosti poremećaja s nemodificiranom masom.

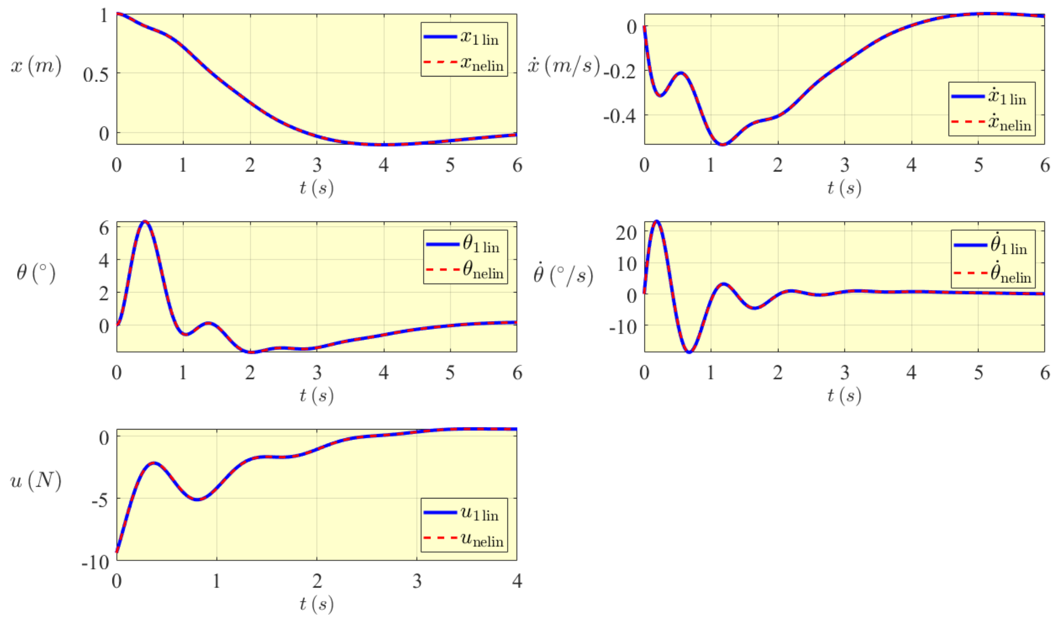
Za sintezu regulatora metodom podešavanja polova, koristit će se polovi u matrici polova $\mathbf{p}_2$ (4.13). U programu će se promijeniti parametar ovješene mase m na vrijednost u izrazu (5.39) i program će se pokrenuti.



Slika 15: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog metodom podešavanja polova za slučaj nepoznate mase ovješenog tereta; $m \approx 4,6kg$

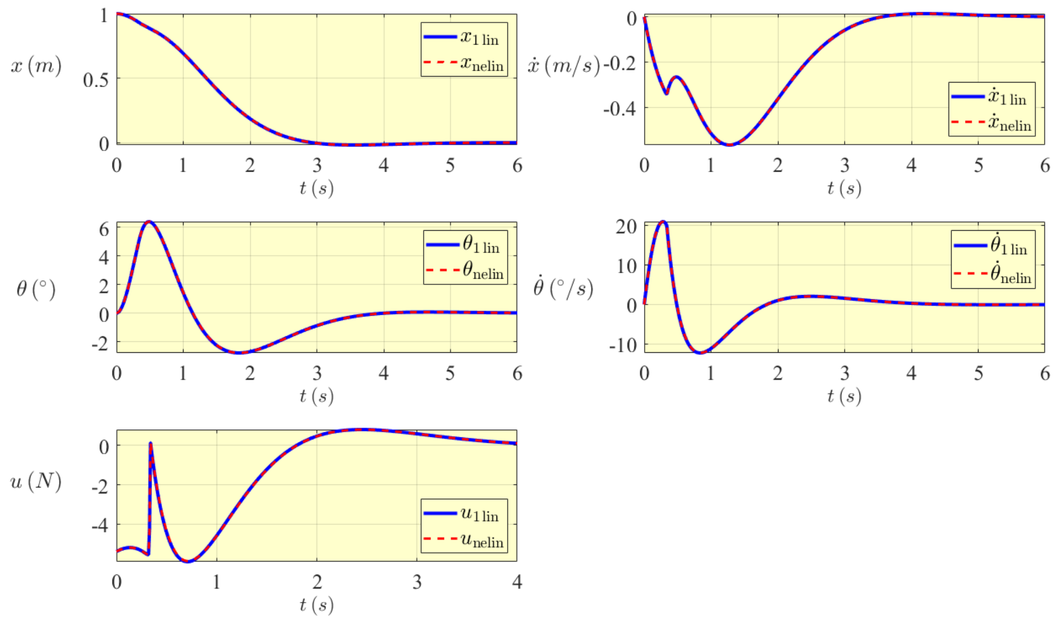
Iz grafa se vidi da se kolica kreću puno sporije i da promašaju ishodišnu poziciju i odlaze u drugom smjeru. Ovo će rezultirati duljoj simulaciji s čime je nezadovoljen zadani uvjet regulacije. Amplitude oscilacije njihala ostaje identične no njihalu treba dulje da se stabilizira.

Kod LQR-a, koristit će se slučaj s težinskim matricima $\mathbf{Q}_2$ (4.16) i $\mathbf{R}$ (4.17).



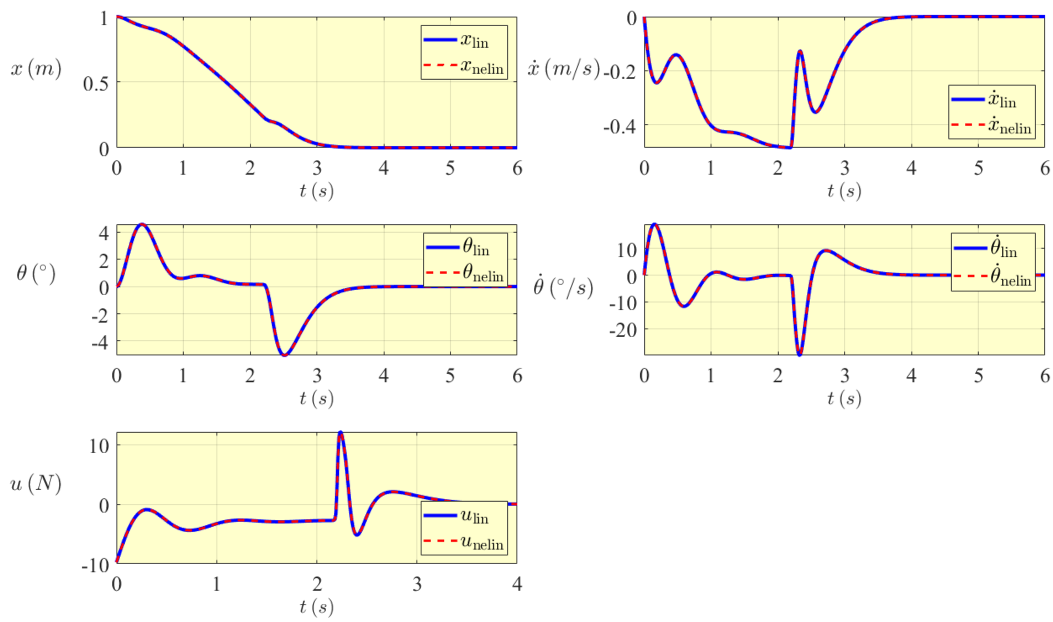
Slika 16: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog LQR-om za slučaj nepoznate mase ovješenog tereta; $m \approx 4,6kg$

Odzivi na slici 16 identični su odzivima na slici 15, stoga isti komentari kao za metodu podešavanja polova vrijede i ovdje. Slijedi provjera performanse robusnog nelinearnog regulatora s modificiranom ovješenom masom m.



Slika 17: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom za slučaj nepoznate mase ovješenog tereta; $m \approx 4,6kg$

Kod odziva robusnog nelinearnog regulatora nema drastičnih promjena. Kolica će i dalje doći u ishodišnu poziciju za oko tri sekunde. Amplitude oscilacija njihala će ostati iste, s tim da će se oko četvrtinu sekunde više njihati, no to je praktički zanemarivo. Odziv upravljačke varijable će imati malo veći apsolutni maksimum. Usprkos tome, ne kriši drugi postavljeni zahtjev jer se kreće u vrijednosti između -5 i -10 N. S istim postavkama će se provjeriti odzivi robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada.



Slika 18: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom sa kliznim režimom rada za slučaj nepoznate mase ovješenog tereta; $m \approx 4,6kg$

Kao i kod robusnog nelinearnog regulatora, odziv horizontalnog položaja kolica x će se i dalje smanjiti u nulu za tri sekunde. Amplitude oscilacije još su manje u usporedbi sa odzivom otklona njihala θ na slici 14. Interesantno je što će i u ovom slučaju maksimum upravljačke varijable $u(t)$ biti veći. Ovdje se već krši drugi postavljen uvjet, jer je maksimalna vrijednost ≈ 11 N. S obzirom da je vrijednost i dalje istog reda veličine, to će biti prihvatljivo.

Provjerom ovih performansi dodatno se pokazalo zašto su nelinearni regulatori bolji i efektivniji. Vidi se da je njihova robusnost iznimno velika naspram linearnih regulatora.

6. Zaključak

U radu je izveden dinamički model krana s pomoću Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode. Prikazana je metoda linearizacije nelinearnog dinamičkog modela krana. Slijedio je grafički prikaz odziva slobodnog njihanja, s kojima se potvrdila točnost dobivenog modela. Na istim se grafovima prikazao utjecaj viskoznog trenja na kretanje kolica i njihala. Opisana su se dva tipa linearne regulacije; sinteza regulatora metodom podešavanja polova i sinteza regulatora LQR metodom. Postavili su se željeni uvjeti simulacije za koje su se iterativno dobili parametri za oba tipa regulacije. Pokazalo se da je moguće dobiti gotovo identične odzive kod oba slučaja. Korištenjem observera stanja se potvrdilo da je na temelju poznavanje odziva horizontalnog položaja i otklona kuta moguće estimirati horizontalnu brzinu i kutno ubrzanje. U narednim segmentima se grafički prikazalo djelovanje poremećaja na linearne regulatore. Ispostavilo se da ne mogu prigušiti utjecaj poremećaja na izlazne varijable. Kod takvih situacija se ispostavilo da je robusni nelinearni regulator iznimno dobar. Uz njega se kao još jedan primjer nelinearnog regulatora, matematički prikazalo djelovanje robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada. Oba nelinearna regulatora su uspješno prigušila sinusni poremećaj. Kod slučaja gdje se ne poznaje točna masa ovješenog tereta, zaključilo se da svaki od regulatora uspješno reguliraju sustav, iako se kod linearnih regulatora vrijeme stabilizacije značajnije produljilo. Na drugu ruku, nelinearni regulatori su usprkos pretpostavci znatno veće ovješene mase, uspješno regulirali sustav u zadovoljavajućem vremenskom intervalu. Po svim performansama, nelinearni regulatori su se pokazali boljima. Iz svega se može povući zaključak kako su nelinearni regulatori bolji od linearnih, jer imaju bolje performanse i veću robusnost. Usprkos tome, treba imati na umu složenost i cijenu regulatora. U slučaju da su poremećaji mali i parametri sustava se dobro poznaju, svi navedeni regulatori imaju zadovoljavajuće performanse, iako je u takvim situacijama isplativije koristiti linearni regulator. U slučaju da se želi najbolja performansa i velika robusnost sustava, primijenit će se nelinearni regulator.

Literatura

[1] "Single Pendulum Gantry (SPG)," Appendix B. Non-Linear Equations of Motion (EOM) (stranice 30-33), *Quanser*, `http://www.me.unlv.edu/Undergraduate/coursenotes/control/IP02Gantry.pdf` (pristupljeno 20.3.2024.)

[2] "Potential energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Potential_energy&oldid=1195652569` (pristupljeno 20.3.2024).

[3] "Kinetic energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kinetic_energy&oldid=1208400633` (pristupljeno 20.3.2024).

[4] "Rotational energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotational_energy&oldid=1181495410` (pristupljeno 20.3.2024).

[5] "Moment of inertia," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moment_of_inertia&oldid=1209101186` (pristupljeno 20.3.2024.).

[6] "Lagrangian mechanics," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lagrangian_mechanics&oldid=1208372218` (pristupljeno 20.3.2024.).

[7] Ashwani Kharola, "Position Regulation and Anti-Swing Control of Overhead Gantry Inverted Pendulum (GIP) using Different Soft-computing Techniques", *International Journal of Intelligent Systems and Applications(IJISA)*, Vol.8, No.2, pp.28-34, 2016.

[8] "d'Alembert's principle," *Encyclopedia Britannica*, `https://www.britannica.com/science/dAlemberts-principle` (pristupljeno 20.3.2024.).

[9] "State-space representation," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=State-space_representation&oldid=1194760127` (pristupljeno 20.3.2024.).

[10] Emad, Q. Hussein and Ayad Q. Al-Dujaili and Ahmed R. Ajel, "Design of Sliding Mode Control for Overhead Crane Systems", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, Baghdad, Iraq, 15 April 2020

[11] "Linear approximation," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linear_approximation&oldid=1184279580 (pristupljeno 20.3.2024.).

[12] Dey, Rajeeb & Sinha, Nishant & Chaubey, Priyanka & Ghosh, Sandip & Ray, Goshaidas, "Active sway control of a single pendulum gantry crane system using output-delayed feedback control technique", *11th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, Singapore, 7-10 December 2010.

[13] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja – Viševarijabilni sustavi*, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.

[14] "ctrb," *MathWorks*, https://www.mathworks.com/help/control/ref/statespacemodel.ctrb.html (pristupljeno 20.3.2024.).

[15] "obsv," *MathWorks*, https://www.mathworks.com/help/control/ref/statespacemodel.obsv.html (pristupljeno 20.3.2024.).

[16] "acker," *Northwestern University*, http://www.ece.northwestern.edu/local-apps/matlabhelp/toolbox/control/ref/acker.html (pristupljeno 20.3.2024.)

[17] "Underactuated Robotics", *Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*, https://underactuated.mit.edu/lqr.html (pristupljeno 20.3.2024.)

[18] "lqr," *MathWorks*, https://www.mathworks.com/help/control/ref/lti.lqr.html (pristupljeno 20.3.2024.)

[19] Stanislaw H. Żak, *Systems and Control*, Oxford university press, 2003.

[20] "lyap", *MathWorks*, https://www.mathworks.com/help/control/ref/lyap.html

[21] Vadim Utkin, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, CRC Press, 2009.

[22] "Sign function," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sign_function&oldid=1205334629 (pristupljeno 20.3.2024.)

Prilog

I. *MATLAB* program

(Napravljeno u MATLAB R2018a)

```
close all
clear variables
clc

global Do Dx g l M m I v A B C K ...
       w LL P rho eps dist Acl ...
       TT A21 A12 A22

C = [1 0 0 0;
     0 1 0 0;
     0 0 1 0;
     0 0 0 1];
D = 0;
% Do = 0.024;
Do = 0.0024;
Dx = 5.4;
g = 9.81;
l = 0.3302;
M = 1.0713;
m = 0.23;
x0 = [1 0 0 0 0];

options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);

T = 6;
Tu = 4;

vpoz = 0;
nep = 20;

for i = 1:7

    if i == 1  % dinamicki model bez regulacije

```

```
        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        dist = 0;
        x0 = [0 0 pi/6 0 0];

        K = [0 0 0 0];

        duljina = size(K,1);
        prekl = 1;
        precizno = 1;

    elseif i == 2  % metoda podesavanja polova

        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        dist = 0;
        x0 = [1 0 0 0 0];
```

```

        p1 = [-1 -1 -1 -1];
        p = 3.25*p1;
%         p = [2.75*p1 3.25*p1 3.75*p1];

        duljina = size(p,2)/4;
        prekl = 1;
        precizno = 1;

    elseif i == 3  % LQR

        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        dist = 0;
        x0 = [1 0 0 0 0];

        Q1 = [45 0 0 0;
              0 0 0 0;
              0 0 1000 0;
              0 0 0 0];
        Qall = 2*Q1;
%         Qall = [1*Q1 2*Q1 5*Q1];

        Rall = 1*ones(1,size(Qall,2)/4);

        duljina = size(Qall,2)/4;
        prekl = 1;
        precizno = 1;
```

```

    elseif i == 4   % observer stanja s
                    % metodom podesavanja polova
        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        dist = 0;
        w = 0;
        C = [1 0 1 0];
        x0 = [1 0 0 0 1 0 0 0 0 0];

        po = [-15; -14; -13; -12];

        p1 = [-1 -1 -1 -1];
        p = 3.25*p1;
%         p = [2.75*p1 3.25*p1 3.75*p1];

        duljina = size(p,2)/4;
        prekl = 1;

    elseif i == 5   % observer stanja s LQR-om

        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
```

```
                0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        dist = 0;
        w = 0;
        C = [1 0 1 0];
        x0 = [1 0 0 0 1 0 0 0 0 0];

        Q1 = [45 0 0 0;
              0 0 0 0;
              0 0 1000 0;
              0 0 0 0];
        Qall = 2*Q1;
%         Qall = [1*Q1 2*Q1 5*Q1];

        Rall = 1.*ones(1,size(Qall,2)/4);

        duljina = size(Qall,2)/4;
        prekl = 1;

    elseif i == 6  %  nelinearni robusni regulator

        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        eps = 0.001;
```

```
        rho = 5;
        dist = 1;
        x0 = [1 0 0 0 0];

        Q1 = [2 0 0 0;
              0 0 0 0;
              0 0 25 0;
              0 0 0 0];
        Qall = 1*Q1;
%         Qall = [1*Q1 2*Q1 4*Q1];

        Rall = 1.*ones(1,size(Qall,2)/4);

        p1 = [-1 -1 -1 -1];
        p = 1.5*p1;
%         p = [1.5*p1 2*p1 2.5*p1];

        duljina = size(p,2)/4;
        prekl = 1;
        precizno = 1;

    elseif i == 7  %  nelinearni robusni regulator
                   %  s kliznim rezimom rada
        m = 0.23;
        I = m*(l^2);
        v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));

        A = [0 1 0 0;
             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
             0 0 0 1;
             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
        B = [0;
             (I+(l^2)*m)*v;
             0;
             -m*l*v];

        rho = 10;
        dist = 1;
        x0 = [1 0 0 0 0];
```

```

        B1 = B(1:3);
        B2 = B(4);

        TT = [eye(3) -B1/B2;
              zeros(1,3) 1/B2];

        Atr = TT*A/TT;

        A11 = Atr(1:3,1:3);
        A12 = Atr(1:3,4);
        A21 = Atr(4,1:3);
        A22 = Atr(4,4);

        p1 = [-1 -1 -1];
        p = 6.3*p1;
%         p = [3*p1 3.5*p1 4*p1];

        duljina = size(p,2)/3;
        prekl = 1;
        precizno = 1;

    end

    for j = 1:duljina

        if i == 1

            t = 0:0.01:10;
            t1 = 0:0.01:9.99;
            k = -0.2*10;
            k1 = -0.2*9.99;

        else

            t = 0:0.01:T;
            t1 = 0:0.01:Tu;
            k = -0.2*T;
            k1 = -0.2*Tu;
```

```
        end

        if i == 1

            if rank(ctrb(A,B)) == size(A,2)

                fprintf(['\n rank(ctrb(A,B)) = 4 -> '...
                         'Sustav JE ' ...
                         'upravljiv! \n'])

            else

                fprintf(['\n rank(ctrb(A,B)) ~= 4 -> ' ...
                         'Sustav NIJE ' ...
                         'upravljiv! \n'])

            end

            if rank(obsv(A,C)) == size(A,2)

                fprintf(['\n rank(obsv(A,C)) = 4 -> '...
                         'Sustav JE ' ...
                         'mjerljiv! \n\n'])

            else

                fprintf(['\n rank(obsv(A,C)) ~= 4 -> '...
                         'Sustav NIJE ' ...
                         'mjerljiv! \n\n'])

            end

        elseif i == 2

            K = acker(A,B,p(1,(4*j-3:4*j)));

            if precizno == 0

```

```
                m = nep*m;
                I = m*(l^2);
                v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
                A = [0 1 0 0;
                     0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
                     ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
                     0 0 0 1;
                     0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
                     -(M+m)*Do*v];
                B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];

            end

        elseif i == 3

            Q = Qall(1:4,(4*j-3:4*j));
            R = Rall(j);
            K = lqr(A,B,Q,R);

            if precizno == 0

                m = nep*m;
                I = m*(l^2);
                v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
                A = [0 1 0 0;
                     0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
                     ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
                     0 0 0 1;
                     0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
                     -(M+m)*Do*v];
                B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];

            end

        elseif i == 4

            K = acker(A,B,p(1,(4*j-3:4*j)));
            Acl = A-B*K;

```

```
            LL = place(A',C',po')';

        elseif i == 5

            Q = Qall(1:4,(4*j-3:4*j));
            R = Rall(j);
            K = lqr(A,B,Q,R);
            Acl = A-B*K;

            RR = eye(size(C,1));
            QQ = Q;
            LL = lqr(A',C',QQ,RR)';

        elseif i == 6

            K = acker(A,B,p(1,(4*j-3:4*j)));
            Acl = A-B*K;

            Q = Qall(1:4,(4*j-3:4*j));
            P = lyap(Acl',Q);

            if precizno == 0

                m = nep*m;
                I = m*(l^2);
                v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
                A = [0 1 0 0;
                     0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
                     ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
                     0 0 0 1;
                     0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
                     -(M+m)*Do*v];
                B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];

            end

        elseif i == 7

            K = acker(A11,A12,p(1,(3*j-2:3*j)));
```

```
            Acl = A11-A12*K;

            if precizno == 0

                m = nep*m;
                I = m*(l^2);
                v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
                A = [0 1 0 0;
                     0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
                     ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
                     0 0 0 1;
                     0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
                     -(M+m)*Do*v];
                B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];

            end

        end

        if j == 1

            odziv_lin = zeros(length(t),duljina*5);
            odziv_nelin = zeros(length(t),duljina*5);

        end

        if i == 1 || i == 2 || i == 3

            [t,x1] = ode15s('linearni_model',t,x0,options);
            uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);

            [t,x2] = ode15s('nelinearni_model',t,x0,options);
            uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);

        elseif i == 4 || i == 5

            [t,x1] = ode15s('observer_linearni',t,x0,options);
            uk_lin = diff(x1(:,9))./diff(t);
            uk_obs = diff(x1(:,10))./diff(t);
```

```

%            [t,x1] = ode15s('observer_nelinearni', ...
%                             t,x0,options);
%            uk_lin = diff(x1(:,9))./diff(t);
%            uk_obs = diff(x1(:,10))./diff(t);

        elseif i == 6

            [t,x1] = ode15s('robusni_linearni', ...
                            t,x0,options);
            uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);

            [t,x2] = ode15s('robusni_nelinearni',...
                            t,x0,options);
            uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);

        elseif i == 7

            [t,x1] = ode15s('sliding_mode_linearni', ...
                            t,x0,options);
            uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);

            [t,x2] = ode15s('sliding_mode_nelinearni', ...
                            t,x0,options);
            uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);

        end

        if i == 4 || i == 5

            odziv_lin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x1(:,1:4);
            odziv_lin(1:length(t)-1,5*j) = ...
              uk_lin(1:length(t)-1,1);

            odziv_nelin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x1(:,5:8);
            odziv_nelin(1:length(t)-1,5*j) = ...
              uk_obs(1:length(t)-1,1);

        else
```

```

        odziv_lin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x1(:,1:4);
        odziv_lin(1:length(t)-1,5*j) = ...
          uk_lin(1:length(t)-1,1);

        odziv_nelin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x2(:,1:4);
        odziv_nelin(1:length(t)-1,5*j) = ...
          uk_nelin(1:length(t)-1,1);

    end

    if prekl == 0 || j == duljina

        hFig = figure(j-j*prekl+prekl+vpoz);
        set(hFig, ...
            'Position', ...
            [150+20*(j-j*prekl+prekl+vpoz+1) ...
            205-20*(j-j*prekl+prekl+vpoz+1) 1425 825])

        boje = [[0 0 1], [0 0.9 0.25], [0 0 0]];

        pop_fiz = {'x \, (m)', '\dot{x} \, (m/s)', ...
                   '\theta \, (^\circ)', ...
                   '\dot{\theta} \, (^\circ/s)', ...
                   'u \, (N)'};
        pop_stanja = {'x' '\dot{x}' '\theta' ...
                      '\dot{\theta}', 'u'};

        if i == 4 || i == 5

            opis = {'obs'};

        else

            opis = {'nelin'};

        end

        for a = 1:5
```

```

            if a == 1

                b = 1;
                leg_lok = 'northeast';

            elseif a == 2

                b = 1;

                if i == 1

                    leg_lok = 'northeast';

                else

                    leg_lok = 'southeast';

                end

            elseif a == 3

                b = (180/pi);
                leg_lok = 'northeast';

            elseif a == 4

                b = (180/pi);
                leg_lok = 'northeast';

            elseif a == 5

                t = t1;
                k = k1;
                b = 1;

                if i == 1

                    leg_lok = 'northeast';
```

```
                else

                    leg_lok = 'southeast';

                end

            end

            subplot(3,2,a),

            if prekl == 0

                plot(t, odziv_lin(1:length(t), ...
                    (5*j-5+a))*b, ...
                    'Color', [0 0 1], ...
                    'Linewidth', 3),
                grid on,
                set(gca, 'FontSize', 19, ...
                         'FontName', 'Times');
                set(gca, 'Color', [1 1 0.8]');
                hold on

                plot(t, odziv_nelin(1:length(t), ...
                    (5*j-5+a))*b,'--', ...
                    'Color', [1 0 0], ...
                    'LineWidth', 2.15),
                grid on,
                set(gca, 'FontSize', 19, ...
                         'FontName', 'Times');
                set(gca, 'Color', [1 1 0.8]');
                hold on

            else

                for n = 1:j

                    plot(t, odziv_lin(1:length(t), ...
                        (5*n-5+a))*b, ...
```

```
                            'Color', boje((n*3-2):n*3), ...
                            'LineWidth', 3),
                        grid on,
                        set(gca, 'FontSize', 19, ...
                                 'FontName', 'Times');
                        set(gca, 'Color', [1 1 0.8]');
                        hold on

                        if n ~= j

                            plot(t, ...
                                odziv_nelin(1:length(t), ...
                                (5*n-5+a))*b,'--', ...
                                'Color', [1 0 0], ...
                                'LineWidth', 2.15, ...
                                'HandleVisibility', 'Off'),
                            grid on

                        else

                            plot(t, ...
                                odziv_nelin(1:length(t), ...
                                (5*n-5+a))*b,'--', ...
                                'Color', [1 0 0], ...
                                'LineWidth', 2.15, ...
                                'HandleVisibility', 'On'),
                            grid on

                        end

                        grid on,
                        set(gca, 'FontSize', 19, ...
                                 'FontName', 'Times');
                        set(gca,'Color', [1 1 0.8]');
                        hold on

                    end

                end
```

```

        yl = ylabel('$'+string(pop_fiz(a))+'$', ...
            'Interpreter','LaTeX', ...
            'Rotation',0,'FontSize',19.5, ...
            'FontName','Times');
        yl.Position(1) = k;
        xlabel('$t \, (s)$', ...
            'Interpreter','LaTeX', ...
            'FontSize',17.5, ...
            'FontName','Times');

        if prekl == 0

            legenda = ...
                legend('$'+string(pop_stanja(a))+ ...
                       '_\mathrm{lin}$', ...
                       '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
                       '_\mathrm{'+string(opis)+'}$');
            set(legenda,'Interpreter','LaTeX', ...
                'FontSize',19,'FontName','Times', ...
                'Location',leg_lok);

        else

            legend_list = cell(1,j+1);

            for r = 1:j

                new_element = ...
                    '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
                    '_{'+int2str(r)+ ...
                    '\, \mathrm{lin}}$';
                legend_list{r} = new_element;

            end

            legend_list{r+1} = ...
                '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
                '_\mathrm{'...
```

```
                        +string(opis)+'}$';
                    legenda = legend(legend_list);
                    set(legenda,'Interpreter','LaTeX', ...
                        'FontSize',19,'FontName','Times', ...
                        'Location',leg_lok),

            end

        end

        if i == 1

%             suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                       '\fontsize{20}\bf' ...
%                       'Sustav bez regulacije'])

        elseif i == 2

%             if prekl == 0
%
%                 suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                           '\fontsize{20}\bf' ...
%                           'Pole placement; ' ...
%                           'p_1 = ', ...
%                           num2str(p(1,4*j-3)), ...
%                           ', p_2 = ', ...
%                           num2str(p(1,4*j-2)), ...
%                           ', p_3 = ', ...
%                           num2str(p(1,4*j-1)), ...
%                           ', p_4 = ', ...
%                           num2str(p(1,4*j-3))]);
%
%             else
%
%                 suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                           '\fontsize{20}\bf' ...
%                           'Pole placement'])
%
%             end
```

```

        elseif i == 3

%             if prekl == 0
%
%                 suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                           '\fontsize{20}\bf' ...
%                           'LQR; ' ...
%                           'Q_{all} = ', ...
%                           num2str(j), ...
%                           '\cdotQ_1']);
%
%             else
%
%                 suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                           '\fontsize{20}\bf' ...
%                           'LQR']);
%
%             end

        elseif i == 4

%             suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                       '\fontsize{20}\bf' ...
%                       'Pole placement ' ...
%                       'sa observerom']);

        elseif i == 5

%             suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                       '\fontsize{20}\bf' ...
%                       'LQR sa observerom']);

        elseif i == 6

%             suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                       '\fontsize{20}\bf' ...
%                       'Nelinearni robusni regulator']);

```

```
            elseif i == 7

%                 suptitle(['\fontname{Times}' ...
%                          '\fontsize{20}\bf' ...
%                          'Nelinearni robusni ' ...
%                          'klizni regulator']);

            end

        end

        if j == duljina

            if prekl == 0

                vpoz = vpoz + duljina;

            elseif prekl == 1

                vpoz = vpoz + 1;

            end

        end

    end

end
```

```
function dx = linearni_model(t,x)

global A B K dist

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

u = -K*x(1:4);
d = dist*sin(5*t);

dx(1:4) = A*x+B*(u+d);
dx(5) = u;
```

```
function dx = nelinearni_model(t,x)

global M m l I Dx Do K v g dist

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

u = -K*x(1:4);
d = dist*sin(5*t);

dx(1) = x(2);
dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
        m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
        (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u + d);
dx(3) = x(4);
dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
        (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
        Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/ ...
        ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
        (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
        (-m*l)*v*(u + d);
dx(5) = u;
```

```
function dx = observer_linearni(t,x)

global A Acl LL C w B K dist

dx = zeros(10,1);

x = x(1:8);

u1 = -K*x(1:4);
u2 = -K*x(5:8);

d = dist*sin(5*t);

dx(1:4) = A*x(1:4)+B*(-K*x(5:8)+d+w);
dx(5:8) = Acl*x(5:8)+B*(w+d)+LL*(C*x(1:4)-C*x(5:8));
dx(9) = u1;
dx(10) = u2;
```

```
function dx = observer_nelinearni(t,x)

global Acl LL C w B K dist M m l I Dx Do v g

dx = zeros(10,1);

x = x(1:8);

u1 = -K*x(1:4);
u2 = -K*x(5:8);

d = dist*sin(5*t);

dx(1) = x(2);
dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
        m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
         (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u2+d+w);
dx(3) = x(4);
dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
         (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
        Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/ ...
         ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
         (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
         (-m*l)*v*(u2+d+w);
dx(5:8) = Acl*x(5:8)+B*(w+d)+LL*(C*x(1:4)-C*x(5:8));
dx(9) = u1;
dx(10) = u2;
```

```
function dx = robusni_linearni(t,x)

global A B K P rho eps dist

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

u1= -K*x(1:4);
u2= -rho*B'*P*x(1:4)/(abs(B'*P*x(1:4))+eps);

u = u1 + u2;
d = dist*sin(5*t);

dx(1:4) = A*x(1:4) + B*(u + d);
dx(5) =  u;
```

```
function dx = robusni_nelinearni(t,x)

global M m l I Dx Do K v g B P rho eps dist

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

u1= -K*x(1:4);
u2= -rho*B'*P*x(1:4)/(abs(B'*P*x(1:4))+eps);

u = u1 + u2;
d = dist*sin(5*t);

dx(1) = x(2);
dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
        m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
        (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u+d);
dx(3) = x(4);
dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
        (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
        Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/ ...
        ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
        (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
        (-m*l)*v*(u+d);
dx(5) = u;
```

```
function dx = sliding_mode_linearni(t,x)

global A B K Acl rho dist A21 A12 A22 TT

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

xtr = TT*x;
x1 = xtr(1:3);
x2 = xtr(4);

s = x2 + K*x1;

u = -(A21+K*Acl)*x1-A22*x2-K*A12*s-rho*tanh(10*s);
d = dist*sin(5*t);

dx(1:4) = A*x + B*(u + d);
dx(5) = u;
```

```
function dx = sliding_mode_nelinearni(t,x)

global K Acl dist rho Dx M m Do g l I v A21 A12 A22 TT

dx = zeros(5,1);

x = x(1:4);

xtr = TT*x;
x1 = xtr(1:3);
x2 = xtr(4);

s = x2 + K*x1;

u = -(A21+K*Acl)*x1-A22*x2-K*A12*s-rho*tanh(10*s);
d = dist*sin(5*t);

dx(1) = x(2);
dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
        m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
         (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u+d);
dx(3) = x(4);
dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
         (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
        Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
        Do*x(4)))/ ...
         ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
         (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
         (-m*l)*v*(u+d);
dx(5) = u;
```